

2026 春实用随机过程

作业参考答案与习题课讲义

助教-刘玉涵、余清扬

2026 · 06 · 29

目录

I	作业参考答案	1
1	第一周作业	2
2	第二周作业	7
3	第三周作业	13
4	第四周作业	17
5	第五周作业	21
6	第六周作业	27
7	第七周作业	29
8	第八周作业	31
9	第九周作业	39
10	第十周作业	44
11	第十一周作业	47
12	第十二周作业	50
13	第十三周作业	58
14	第十四周作业	62
II	习题课讲义	65
1	期中习题课	66
1.1	知识点梳理	66

1.2 部分作业题与往年考题	76
2 期末习题课	105
2.1 知识点梳理	105
2.2 部分作业题与往年考题	143

Part I

作业参考答案

第1章

第一周作业

Exercise 1.1 (Ex 1.6)

令 $X_1, X_2, \dots$ 是独立同分布的连续随机变量。若 $X_n > \max(X_1, \dots, X_{n-1})$, 这里 $X_0 = -\infty$, 则我们说在时刻 $n (n > 0)$ 产生了一个记录, 并有记录值 X_n .

(a) 以 N_n 记到时刻 n 为止 (包含 n) 已产生的记录的个数。计算 $\mathbb{E}[N_n]$ 和 $\text{Var}(N_n)$.

(b) 令 $T = \min\{n : n > 1 \text{ 且在 } n \text{ 有一个记录}\}$. 计算 $P(T > n)$ 并证明 $P(T < \infty) = 1$ 和 $\mathbb{E}[T] = \infty$.

(c) 以 T_y 记首个大于 y 的记录值出现的时刻。即

$$T_y = \min\{n : X_n > y\}.$$

证明 T_y 与 X_{T_y} 独立。即取值首次大于 y 的时刻与它的值独立。(如果你将这个命题逆转, 它似乎更直观。)

证明. (a) 设 $I_k = \mathbf{1}_{\{X_k \text{ 是记录值}\}}$, 则

$$N_n = \sum_{k=1}^n I_k, \quad \mathbb{E}[N_n] = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[I_k] = \sum_{k=1}^n P(I_k = 1).$$

而计算可得

$$\begin{aligned} P(I_k = 1) &= \int_{-\infty}^{+\infty} P(I_k = 1 \mid X_k = x) dF(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^x dF(t) \right)^{k-1} dF(x) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} F^{k-1}(x) dF(x) = \frac{1}{k} F^k(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

于是我们有

$$\mathbb{E}[N_n] = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

由上面的过程有

$$I_k \sim B\left(1, \frac{1}{k}\right), \quad \text{Var}(I_k) = \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2}.$$

设 $k > l$, 则我们有

$$\begin{aligned} P(I_k I_l = 1) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_x^{+\infty} P(I_k I_l = 1 \mid X_l = x, X_k = y) dF(y) dF(x) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_x^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^y dF(t) \right)^{k-1-l} \left(\int_{-\infty}^x dF(t) \right)^{l-1} dF(y) dF(x) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{k-l} \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - F^{k-l}(x)) F^{l-1}(x) dF(x) = \frac{1}{kl} = P(I_k = 1)P(I_l = 1).$$

因此有

$$\mathbb{E}[I_k I_l] = P(I_k I_l = 1) = \frac{1}{lk} = \mathbb{E}[I_k] \mathbb{E}[I_l], \text{Cov}(I_k, I_l) = 0.$$

从而

$$\text{Var}(N_n) = \sum_{k=1}^n \text{Var}(I_k) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k^2} \right).$$

(b) 由题 $T = n$ ($n > 1$) 即 $X_2, \dots, X_n$ 中仅有 $X_n > X_1$. 则

$$\begin{aligned} P(T = n) &= \int_{-\infty}^{+\infty} P(T = n | X_1 = x) dF(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_x^{+\infty} dF(t) \left(\int_{-\infty}^x dF(t) \right)^{n-2} dF(x) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - F(x)) F^{n-2}(x) dF(x) = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2 - n}. \end{aligned}$$

从而

$$P(T > n) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = \frac{1}{n}, P(T \geq n) = P(T > n-1) = \frac{1}{n-1}.$$

于是

$$\begin{aligned} P(T < \infty) &= 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} P(T \geq n) = 1. \\ \mathbb{E}[T] &= \sum_{k=2}^{\infty} k \cdot P(T = k) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty. \end{aligned}$$

(c) 我们有

$$P(X_{T_y} > x | T_y = k) = P(X_k > x | X_0 \leq y, \dots, X_{k-1} \leq y, X_k > y).$$

由 $X_1, X_2, \dots$ 独立同分布, 则

$$P(X_{T_y} > x | T_y = k) = P(X_k > x | X_k > y) = \begin{cases} 1, & x < y, \\ \frac{1 - F(x)}{1 - F(y)}, & x \geq y. \end{cases}$$

该表达式与 k 无关, 故 T_y 与 X_{T_y} 独立。 □

Exercise 1.2 (Ex 1.16)

令 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是概率密度函数。假设对一切 x , 存在某个 c 使 $f(x) \leq cg(x)$. 假设我们可以生成具有密度函数 g 的随机变量, 且考虑以下算法:

第1步: 生成具有密度函数 g 的随机变量 Y .

第2步: 生成均匀的 $(0, 1)$ 随机变量 U .

第3步: 若 $U \leq \frac{f(Y)}{cg(Y)}$, 则令 $X = Y$; 否则返回第1步。

假定相继生成的随机变量是独立的, 证明

(a) X 具有密度函数 $f(x)$.

(b) 此算法生成 X 必须迭代的次数是均值为 c 的几何随机变量。

证明. (a) 我们有

$$P(X \leq x) = P\left(Y \leq x \mid U \leq \frac{f(Y)}{cg(Y)}\right) = \frac{P\left(Y \leq x, U \leq \frac{f(Y)}{cg(Y)}\right)}{P\left(U \leq \frac{f(Y)}{cg(Y)}\right)}.$$

先计算分子

$$P\left(Y \leq x, U \leq \frac{f(Y)}{cg(Y)}\right) = \int_{-\infty}^x P\left(U \leq \frac{f(Y)}{cg(Y)} \mid Y = y\right) g(y) dy = \int_{-\infty}^x \frac{f(y)}{c} dy.$$

再计算分母

$$P\left(U \leq \frac{f(Y)}{cg(Y)}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} P\left(U \leq \frac{f(Y)}{cg(Y)} \mid Y = y\right) g(y) dy = \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) dy = \frac{1}{c}.$$

因此

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(y) dy, P_X(x) = f(x).$$

即 X 具有密度函数 $f(x)$.

(b) 由 (a) 我们有

$$P\left(U \leq \frac{f(Y)}{cg(Y)}\right) = \frac{1}{c}.$$

即每次迭代生成 X 的概率为 $1/c$ 且每轮迭代相互独立。故此算法生成 X 必须迭代的次数是均值为 c 的几何随机变量。□

Exercise 1.3 (Ex 1.21)

令 $U_1, U_2, \dots$ 为独立的 $(0, 1)$ 均匀随机变量，而以 N 记 n 使

$$\prod_{i=1}^n U_i \geq e^{-\lambda} > \prod_{i=1}^{n+1} U_i, \text{ 其中 } \prod_{i=1}^0 U_i = 1$$

的 $(n \geq 0)$ 的最小值。证明 N 是具有均值 λ 的 Poisson 随机变量。

(提示：对 n 用归纳法，取条件于 U_1 ，证明 $P(N = n) = e^{-\lambda} \lambda^n / n!$.)

证明. 我们有 $P(N = 0) = P(1 \geq e^{-\lambda} > U_1) = P(U_1 < e^{-\lambda}) = e^{-\lambda}$ ，即 $n = 0$ 时成立。

设 $n = k$ ($k \geq 0$) 时有

$$P(N = k) = \frac{1}{k!} e^{-\lambda} \lambda^k.$$

从而

$$\begin{aligned} P(N = k + 1) &= \int_0^1 P(N = k + 1 \mid U_1 = x) dx \\ &= \int_{e^{-\lambda}}^1 P(xU_2 \geq e^{-\lambda}, xU_2U_3 \geq e^{-\lambda}, \dots, xU_2 \cdots U_{k+1} \geq e^{-\lambda}, xU_2 \cdots U_{k+2} < e^{-\lambda}) dx \\ &= \int_{e^{-\lambda}}^1 P\left(U_2 \geq \frac{e^{-\lambda}}{x}, U_2U_3 \geq \frac{e^{-\lambda}}{x}, \dots, U_2 \cdots U_{k+1} \geq \frac{e^{-\lambda}}{x}, U_2 \cdots U_{k+2} < \frac{e^{-\lambda}}{x}\right) dx \\ &= \int_{e^{-\lambda}}^1 P(U_2 \geq e^{-(\lambda + \ln x)}, U_2U_3 \geq e^{-(\lambda + \ln x)}, \dots, U_2 \cdots U_{k+1} \geq e^{-(\lambda + \ln x)}, U_2 \cdots U_{k+2} < e^{-(\lambda + \ln x)}) dx \\ &= \int_{e^{-\lambda}}^1 \frac{1}{k!} e^{-(\lambda + \ln x)} (\lambda + \ln x)^k dx = \frac{e^{-\lambda}}{k!} \int_{e^{-\lambda}}^1 (\lambda + \ln x)^k d \ln x = \frac{e^{-\lambda}}{k!} \cdot \frac{\lambda^{k+1}}{k+1} = \frac{e^{-\lambda} \lambda^{k+1}}{(k+1)!}. \end{aligned}$$

故 $n = k + 1$ 时也成立，于是 N 为均值 λ 的 Poisson 随机变量。□

Exercise 1.4 (Ex 1.31)

如果 X 和 Y 是分别具有均值 $1/\lambda_1$ 和 $1/\lambda_2$ 的指数随机变量，计算 $Z = \min(X, Y)$ 的分布。给定 $Z = X$ 时 Z 的条件分布是什么？

解. $\forall z \in (0, +\infty)$, 我们有

$$P(Z \leq z) = 1 - P(X > z, Y > z) = 1 - (1 - F_X(z))(1 - F_Y(z)) = 1 - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)z}.$$

故 Z 服从参数为 $\lambda_1 + \lambda_2$ 的指数分布。

而给定 $Z = X$ 时, 对 $\forall z \in (0, +\infty)$ 有

$$P(Z \leq z | Z = X) = P(X \leq z | Y \geq X) = \frac{P(X \leq z, Y \geq X)}{P(Y \geq X)}.$$

先计算分子, 该式即 $P(X \leq \min(z, Y))$, 即

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^z P(X \leq y) f_Y(y) dy + \int_z^{+\infty} P(X \leq z) f_Y(y) dy \\ &= \int_0^z (1 - e^{-\lambda_1 y}) \lambda_2 e^{-\lambda_2 y} dy + \int_z^{+\infty} (1 - e^{-\lambda_1 z}) \lambda_2 e^{-\lambda_2 y} dy \\ &= 1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} (1 - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)z}) - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)z} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} (1 - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)z}). \end{aligned}$$

再来计算分母 $P(Y \geq X)$, 即

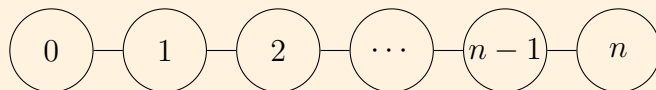
$$\int_0^{+\infty} P(X \leq y) f_Y(y) dy = \int_0^{+\infty} (1 - e^{-\lambda_1 y}) \lambda_2 e^{-\lambda_2 y} dy = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

则 $P(Z \leq z | Z = X) = 1 - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)z}$, 故此时 Z 的条件分布仍是参数为 $\lambda_1 + \lambda_2$ 的指数分布。

注记 1.1. 由本题可得出一个结论: 两个速率为 v_1, v_2 的泊松过程的叠加过程的速率是 $v_1 + v_2$.

Exercise 1.5 (Ex 1.39)

一个质点沿如下的图移动, 使得每一步等可能地移向它的任意一个邻居。



证明: 如果它从 0 出发, 则到达 n 的期望步数是 n^2 .

(提示: 以 T_i 记它从顶点 $i-1$ 走到顶点 i ($i = 1, \dots, n$) 所需的时间。先从 $i = 1$, 然后 $i = 2$, 等等, 递推地确定 $\mathbb{E}[T_i]$.)

证明. 记 T_i 为质点从顶点 $(i-1)$ 走到顶点 i 所需时间, 显然 $T_1 \equiv 1$. 接下来归纳证明 $\mathbb{E}[T_i] = 2i - 1$.

首先 $i = 1$ 时显然成立。设 $i = k - 1$ 时成立, 即 $\mathbb{E}[T_{k-1}] = 2k - 3$ ($k \geq 2$), 则

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[T_k] &= \frac{1}{2} \mathbb{E}[T_k | \text{下一步走到 } k] + \frac{1}{2} \mathbb{E}[T_k | \text{下一步走到 } k-2] \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} (1 + \mathbb{E}[T_{k-1}] + \mathbb{E}[T_k]) = 1 + \frac{1}{2} (2k - 3) + \frac{1}{2} \mathbb{E}[T_k]. \end{aligned}$$

从而有 $\mathbb{E}[T_k] = 2k - 1$, 即 $i = k$ 时也成立, 故 $\mathbb{E}[T_i] = 2i - 1$. 从而所求期望为

$$\sum_{i=1}^n \mathbb{E}[T_i] = \sum_{i=1}^n (2i - 1) = n^2.$$

这样就完成了证明。 □

Exercise 1.6 (Ex 2.3)

对于 Poisson 过程, 证明对 $s < t$ 有

$$P(N(s) = k | N(t) = n) = \binom{n}{k} \left(\frac{s}{t}\right)^k \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{n-k}, k = 0, 1, \dots, n.$$

证明. 对 $k, n \in \mathbb{N}$ 且 $n \geq k$ 有

$$P(N(s) = k \mid N(t) = n) = \frac{P(N(s) = k, N(t) = n)}{P(N(t) = n)} = \frac{P(N(s) = k, N(t) - N(s) = n - k)}{P(N(t) = n)}.$$

由于 Poisson 过程具有独立增量

$$P(N(s) = k, N(t) - N(s) = n - k) = P(N(s) = k)P(N(t - s) = n - k).$$

而

$$P(N(s) = k) = \frac{e^{-\lambda s}(\lambda s)^k}{k!}, \quad P(N(t - s) = n - k) = \frac{e^{-\lambda(t-s)}(\lambda(t-s))^{n-k}}{(n-k)!}.$$

于是

$$P(N(s) = k, N(t) = n) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda s)^k(\lambda(t-s))^{n-k}}{k!(n-k)!}.$$

又由于

$$P(N(t) = n) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}.$$

因此

$$P(N(s) = k \mid N(t) = n) = \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{s^k(t-s)^{n-k}}{t^n} = \binom{n}{k} \left(\frac{s}{t}\right)^k \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{n-k}.$$

这样就完成了证明。 □

Exercise 1.7 (Ex 2.4)

令 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是速率为 λ 的 Poisson 过程。计算 $\mathbb{E}[N(t)N(t+s)]$ 。

解. 首先我们有

$$N(t+s) = N(t) + (N(t+s) - N(t)).$$

因此

$$\mathbb{E}[N(t)N(t+s)] = \mathbb{E}[N(t)^2] + \mathbb{E}[N(t)(N(t+s) - N(t))].$$

由于 Poisson 过程具有独立增量，故 $N(t)$ 与 $N(t+s) - N(t)$ 独立，于是

$$\mathbb{E}[N(t)(N(t+s) - N(t))] = \mathbb{E}[N(t)]\mathbb{E}[N(t+s) - N(t)] = \lambda t \cdot \lambda s = \lambda^2 ts.$$

而

$$\mathbb{E}[N(t)^2] = \text{Var}(N(t)) + (\mathbb{E}[N(t)])^2 = \lambda t + (\lambda t)^2.$$

从而

$$\mathbb{E}[N(t)N(t+s)] = \lambda t + \lambda^2 t^2 + \lambda^2 ts = \lambda t + \lambda^2 t(t+s).$$

第2章

第二周作业

Exercise 2.1 (Ex 2.5)

假设 $\{N_1(t), t \geq 0\}$ 和 $\{N_2(t), t \geq 0\}$ 是速率分别为 λ_1 和 λ_2 的独立的 Poisson 过程。证明 $\{N_1(t) + N_2(t), t \geq 0\}$ 是速率为 $\lambda_1 + \lambda_2$ 的 Poisson 过程。进而，证明这个联合过程的首个事件来自 $\{N_1(t), t \geq 0\}$ 的概率是 $\lambda_1/(\lambda_1 + \lambda_2)$ ，它独立于此事件发生的时刻。

证明. 依 Poisson 过程的定义，易由 $\{N_1(t), t \geq 0\}$ 和 $\{N_2(t), t \geq 0\}$ 是速率分别为 λ_1 和 λ_2 的独立的 Poisson 过程，得到：

1. $N_1(0) + N_2(0) = 0$;
2. $[N_1(t+s) + N_2(t+s)] - [N_1(t) + N_2(t)] = [N_1(t+s) - N_1(t)] + [N_2(t+s) - N_2(t)]$ 与 $N_1(t)$ 和 $N_2(t)$ 都独立，从而也与 $N_1(t) + N_2(t)$ 独立；

3. $P((N_1(t+s) + N_2(t+s)) - (N_1(s) + N_2(s)) = n)$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=0}^n P(N_1(t+s) - N_1(s) = k, N_2(t+s) - N_2(s) = n-k) \\ &= \sum_{k=0}^n e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t} \frac{\lambda_1^k \lambda_2^{n-k}}{k!(n-k)!} t^n \\ &= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t} \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^n}{n!} t^n. \end{aligned}$$

由定义，我们证得 $\{N_1(t) + N_2(t), t \geq 0\}$ 是速率为 $\lambda_1 + \lambda_2$ 的 Poisson 过程。

联合过程的首个事件来自于 $\{N_1(t), t \geq 0\}$ ，即 $N_1(t) = 1, N_2(t) = 0 \mid N_1(t) + N_2(t) = 1$.

$$\begin{aligned} P(N_1(t) = 1, N_2(t) = 0 \mid N_1(t) + N_2(t) = 1) &= \frac{P(N_1(t) = 1, N_2(t) = 0)}{P(N_1(t) + N_2(t) = 1)} \\ &= \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}, \text{ 与 } t \text{ 无关。} \end{aligned}$$

因此，它独立于事件发生的时刻。 □

Exercise 2.2 (Ex 2.10)

公交车按速率为 λ 的 Poisson 过程到达某个车站。你从这个车站上车，从你进入公交车的时刻开始计算你到家需要时间 R 。如果你步行，从这个车站到家需要时间 W 。假设你的策略是：到达车站时等待一段时间 s ，而如果在此时间内公交车还未到达，那么你步行回家。

- (a) 计算从你到达车站时直至到家的期望时间。
- (b) 证明若 $W < 1/\lambda + R$, 则 (a) 部分的期望时间在取 $s = 0$ 时最小; 若 $W > 1/\lambda + R$, 则它在取 $s = \infty$ 时最小 (就是你应该继续等车); 而当 $W = 1/\lambda + R$ 时所有 s 值都给出相同的期望时间。
- (c) 对于为什么当使期望时间最小时我们只需考虑 $s = 0$ 和 $s = \infty$ 的情形给出一个直观的解释。

解. (a) 设公交车在人到达车站后 T 时间到达, 记人到达车站时直至到家的时间为 X , 则

$$X = \begin{cases} T + R, & T \leq s \\ s + W & T > s \end{cases}$$

所以

$$\mathbb{E}[X] = P(X \leq s)(\mathbb{E}[X | X \leq s] + R) + P(X > s)(s + W).$$

因为公交车按照速率为 λ 的速率到达, 所以由无记忆性, T 与公交车到达间隔同分布, 即 $T \sim \text{Exp}(\lambda)$, 所以

$$P(X \leq s) = 1 - e^{-\lambda s},$$

$$\mathbb{E}[X | X \leq s] = \int_0^s s \frac{\lambda e^{-\lambda x} dx}{1 - e^{-\lambda s}} = \frac{-se^{-\lambda s} + (1 - e^{-\lambda s})/\lambda}{1 - e^{-\lambda s}}.$$

所以

$$\mathbb{E}[X] = (W - 1/\lambda - R)e^{-\lambda s} + 1/\lambda + R.$$

(b) 令 $f(s) = \mathbb{E}[X] \ (s \geq 0)$

$$\frac{df(s)}{ds} = -\lambda(W - 1/\lambda - R)e^{-\lambda s}.$$

若 $W < 1/\lambda + R$, 则 $f(s)$ 为单调递增函数, $s = 0$ 时 q 期望时间取最小值; 若 $W > 1/\lambda + R$ 则为单调递减函数, $s = \infty$ 时最小; 而当 $W = 1/\lambda + R$ 时期望时间为定值, 与 s 值无关。

(c) 若步行回家时间小于等车时间期望和坐车回家时间之和, 就应该立刻开始步行 ($s = 0$), 等待只是在浪费时间; 反之, 若步行回家时间大于等车时间期望和坐车回家时间之和, 就应该一直等车, 设置等车上限只是减少了选择最优策略的概率。

Exercise 2.3 (Ex 2.11)

汽车按速率为 λ 的 Poisson 过程经过某个街道位置。某人在此位置等待直至此后的 T 个时间单位她都看不到车时过街, 求此人在过街前等待的期望时间。(注意, 例如, 若在前 T 个时间单位没有车通过则等待时间是 0)

解. 设 $X_n, n \geq 1$ 为某人开始等待后一系列连续汽车通过时间间隔, 其中 X_n 为某人看见的第 $n-1$ 辆车和第 n 辆车之间的时间。记 $Y = \min\{n | X_n > T\}$, 此人等待的时间为 W , 则有

$$W = \sum_{k=1}^{Y-1} X_k + T.$$

又因为 $\{X_n\}$ 之间相互独立, 且都有 $P(X_n > T) = e^{-\lambda T}$, 所以 $Y \sim \text{Geo}(e^{-\lambda T})$.

所以有

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[W] &= \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{Y-1} X_k\right] \\
 &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{Y-1} X_k \mid Y\right]\right] \\
 &= \mathbb{E}[(Y-1)\mathbb{E}[X_k \mid k < Y]] \\
 &= \mathbb{E}[(Y-1)]\mathbb{E}[X_k \mid X_k \leq T] \\
 &= \frac{e^{\lambda T} - 1}{\lambda} - T.
 \end{aligned}$$

Exercise 2.4 (Ex 2.12)

按速率为 λ 的 Poisson 过程发生的事件由一个计数器记录。然而，每当一个事件被记录时，计数器变得在此后的 b 个时间单位不起作用，且不再记录在此段时间中发生的任何新事件。以 $R(t)$ 记在时刻 t 前被记录的事件数。

(a) 求前 k 个事件被记录的概率。

(b) 对 $t \geq (n-1)b$, 求 $P\{R(t) \geq n\}$

解. (a) “前 k 个事件被记录”意味着系统原始的 Poisson 过程的前 k 个事件全都被计数器记录下来。设该 Poisson 过程的到达时间间隔为 $T_1, T_2, \dots, T_k$, 它们独立同分布且服从 $\text{Exp}(\lambda)$. 第一个事件必然被记录。为了让第 2 个到第 k 个事件也全被记录，每次事件发生后，下一个事件的到达时间必须大于计数器的失效时间 b 。即要求对于 $i = 2, 3, \dots, k$, 都有 $T_i > b$. 由于 $T_i \sim \text{Exp}(\lambda)$, 有 $P(T_i > b) = e^{-\lambda b}$. 因此，前 k 个事件被记录的概率为

$$P(T_2 > b, T_3 > b, \dots, T_k > b) = \prod_{i=2}^k P(T_i > b) = (e^{-\lambda b})^{k-1} = e^{-\lambda b(k-1)}.$$

(b) 记 S_n^* 为第 n 个被记录事件的发生时刻。事件 $R(t) \geq n$ 等价于 $S_n^* \leq t$. 观察记录过程可知，除了第一个被记录的事件等待时间是普通的指数分布 $E_1 \sim \text{Exp}(\lambda)$, 对于此后的每一个被记录的事件，其与上一个被记录事件的时间间隔均为 $b + E_i$, 其中 $E_i \sim \text{Exp}(\lambda)$ 为失效期结束后等待下一个事件到来的时间。因此，第 n 个被记录事件的发生时刻可以表示为

$$S_n^* = E_1 + (b + E_2) + \dots + (b + E_n) = \sum_{i=1}^n E_i + (n-1)b.$$

其中 $\sum_{i=1}^n E_i$ 即为原速率为 λ 的 Poisson 过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 中第 n 个事件的到达时刻 S_n . 于是有

$$\begin{aligned}
 P(R(t) \geq n) &= P(S_n^* \leq t) \\
 &= P(S_n + (n-1)b \leq t) \\
 &= P(S_n \leq t - (n-1)b).
 \end{aligned}$$

这恰好等价于原 Poisson 过程在 $t - (n-1)b$ 时间内的到达事件数大于等于 n . 故

$$P(R(t) \geq n) = P(N(t - (n-1)b) \geq n) = \sum_{k=n}^{\infty} e^{-\lambda(t-(n-1)b)} \frac{[\lambda(t-(n-1)b)]^k}{k!}.$$

Exercise 2.5 (Ex 2.19)

载顾客的公交车以速率为 λ 的 Poisson 过程到达一个有无穷多条服务线的排队系统。以 G 记服务分布。一辆公交车以概率 $a_j (j = 1, 2, \dots)$ 载有 j 个顾客。以 $X(t)$ 记在时刻 t 前完成服务的顾客数。

(a) $\mathbb{E}[X(t)] = ?$

(b) $X(t)$ 是否 Poisson 分布?

解. (a) 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 为公交车到达的 Poisson 过程。记第 j 辆公交车的到达时刻为 S_j ，其载有顾客数为 K_j ，且 $P(K_j = k) = a_k$ 。则有一次到达的期望顾客数为 $\mathbb{E}[K] = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k$ 。对于第 j 辆车上的第 m 个顾客，其服务时间为 $Y_{j,m} \sim G$ 。该顾客在时刻 t 前完成服务，当且仅当 $S_j + Y_{j,m} \leq t$ ，即 $Y_{j,m} \leq t - S_j$ 。因此，时刻 t 前完成服务的总顾客数可以表示为

$$X(t) = \sum_{j=1}^{N(t)} \sum_{m=1}^{K_j} I(Y_{j,m} \leq t - S_j).$$

给定 $N(t) = n$ 及所有到达时间 $S_1, \dots, S_n$ 和各车载客数 $K_1, \dots, K_n$ ，求条件期望

$$\mathbb{E}[X(t) \mid N(t) = n, S_1, \dots, S_n, K_1, \dots, K_n] = \sum_{j=1}^n K_j G(t - S_j).$$

进一步对载客数 K_j 取期望

$$\mathbb{E}[X(t) \mid N(t) = n, S_1, \dots, S_n] = \sum_{j=1}^n \mathbb{E}[K_j] G(t - S_j) = \mathbb{E}[K] \sum_{j=1}^n G(t - S_j).$$

由 Poisson 过程的性质，给定 $N(t) = n$ 时， $S_1, \dots, S_n$ 的联合分布等价于 n 个在 $(0, t)$ 上均匀分布的独立随机变量的顺序统计量。因此进一步对 $S_1, \dots, S_n$ 取期望

$$\mathbb{E} \left[\mathbb{E}[K] \sum_{j=1}^n G(t - S_j) \mid N(t) = n \right] = n \mathbb{E}[K] \int_0^t G(t - u) \frac{1}{t} du = \frac{n}{t} \mathbb{E}[K] \int_0^t G(s) ds.$$

所以 $\mathbb{E}[X(t) \mid N(t) = n] = \frac{n}{t} \mathbb{E}[K] \int_0^t G(s) ds$ 。最后对 $N(t)$ 取期望

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X(t)] &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[X(t) \mid N(t) = n] P(N(t) = n) \\ &= \mathbb{E}[K] \frac{\mathbb{E}[N(t)]}{t} \int_0^t G(s) ds \\ &= \lambda \sum_{k=1}^{\infty} k a_k \int_0^t G(s) ds. \end{aligned}$$

(b) $X(t)$ 不是 Poisson 分布。因为一辆公交车可能同时带来多个顾客，这些同乘一辆车的顾客虽然服务时间独立，但他们的到达时间 S_j 是完全相同的，这导致他们的完成服务时间存在相关性。由于存在成批到达且状态关联的情况，事件的发生并不满足独立增量的特性，因此 $X(t)$ 通常不服从 Poisson 分布（除非每辆车必定只载 1 人，即 $P(K_j = 1) = 1$ ）。

Exercise 2.6 (Ex 2.21)

个体按速率为 λ 的 Poisson 过程进入系统。每个到达者独立地处在系统地各个状态。以 $a_i(s)$ 记一个人在到达 s 时间后处在状态 i 的概率。以 $N_i(t)$ 记在时刻 t 处在状态 i 的人数。证明

$N_i(t) (i \geq 1)$ 是独立的且 $N_i(t)$ 是具有均值 $\lambda E[\text{在前 } t \text{ 个单位时间在系统中的个体处在状态 } i \text{ 的时间总量}]$ 的 Poisson 随机变量。

证明. 给定在 $[0, t]$ 时间内有 $N(t) = n$ 个个体到达系统, 设它们的到达时刻为 $S_1, S_2, \dots, S_n$ 。由 Poisson 过程的性质可知, 这些到达时刻的联合分布等价于 n 个独立同分布于 $(0, t)$ 上的均匀分布随机变量的顺序统计量。

对于在 s 时刻到达的个体, 其在时刻 t 处在状态 i 的概率为 $P_i(s) = \alpha_i(t - s)$ 。由命题 2.3.2 得到,

$$\begin{aligned} N_i(t) &= \lambda t p \\ &= \lambda t \frac{1}{t} \int_0^t \alpha_i(t - s) ds \\ &\stackrel{u=t-s}{=} \lambda \int_0^t \alpha_i(u) du. \end{aligned}$$

我们来考察积分 $\int_0^t \alpha_i(u) du$ 的实际意义。设一个经过系统的个体, 其在进入系统后经过时间 u 时是否处于状态 i 的示性函数为 $I(u)$, 则 $E[I(u)] = \alpha_i(u)$ 。

该个体在到达系统后的前 t 个单位时间内, 处在状态 i 的总时间期望为

$$E \left[\int_0^t I(u) du \right] = \int_0^t E[I(u)] du = \int_0^t \alpha_i(u) du.$$

因此, 均值恰为 $\lambda E[\text{单个个体在其到达后的 } t \text{ 个单位时间内处在状态 } i \text{ 的时间总量}]$ 。得证。 $\square$

Exercise 2.7 (Ex 2.37)

令 $\{X(t), t \geq 0\}$ 是一个复合 Poisson 过程: $X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$, 且假设 X_i 只能取有限个可能得值。论证对充分大的 t , $X(t)$ 的分布是渐进正态的。

证明. 此题利用特征函数证明中心极限定理。已知复合 Poisson 过程 $X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$ 。由于 X_i 取值有限, 其各阶矩均存在。记 $E[X_1] = \mu$, $\text{Var}(X_1) = E[X_1^2] - \mu^2$, 且记二阶原点矩 $E[X_1^2] = \sigma_0^2$ 。根据复合 Poisson 过程的性质, 可求得期望和方差:

$$E[X(t)] = \lambda t E[X_1] = \lambda t \mu.$$

$$\text{Var}(X(t)) = \lambda t E[X_1^2] = \lambda t \sigma_0^2.$$

构造标准化随机变量:

$$Z(t) = \frac{X(t) - E[X(t)]}{\sqrt{\text{Var}(X(t))}} = \frac{X(t) - \lambda t \mu}{\sigma_0 \sqrt{\lambda t}}.$$

已知 $X(t)$ 的特征函数为 $\phi_{X(t)}(u) = E[e^{iuX(t)}] = \exp\{\lambda t(\phi_X(u) - 1)\}$, 其中 $\phi_X(u)$ 是单次跳跃 X_i 的特征函数。那么 $Z(t)$ 的特征函数可以表示为

$$\begin{aligned} \phi_{Z(t)}(u) &= E \left[\exp \left\{ iu \frac{X(t) - \lambda t \mu}{\sigma_0 \sqrt{\lambda t}} \right\} \right] \\ &= \exp \left\{ -iu \frac{\lambda t \mu}{\sigma_0 \sqrt{\lambda t}} \right\} \phi_{X(t)} \left(\frac{u}{\sigma_0 \sqrt{\lambda t}} \right) \\ &= \exp \left\{ -iu \mu \frac{\sqrt{\lambda t}}{\sigma_0} + \lambda t \left(\phi_X \left(\frac{u}{\sigma_0 \sqrt{\lambda t}} \right) - 1 \right) \right\}. \end{aligned}$$

对 $\phi_X(\cdot)$ 在原点附近进行二阶泰勒展开:

$$\phi_X(v) = E[e^{ivX_1}] = 1 + i\mu v - \frac{1}{2} E[X_1^2] v^2 + o(v^2) = 1 + i\mu v - \frac{1}{2} \sigma_0^2 v^2 + o(v^2).$$

将 $v = \frac{u}{\sigma_0 \sqrt{\lambda t}}$ 代入, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $v \rightarrow 0$, 有:

$$\begin{aligned} \lambda t \left(\phi_X \left(\frac{u}{\sigma_0 \sqrt{\lambda t}} \right) - 1 \right) &= \lambda t \left(i\mu \frac{u}{\sigma_0 \sqrt{\lambda t}} - \frac{1}{2} \sigma_0^2 \frac{u^2}{\sigma_0^2 \lambda t} + o\left(\frac{1}{t}\right) \right) \\ &= i\mu u \frac{\sqrt{\lambda t}}{\sigma_0} - \frac{1}{2} u^2 + o(1). \end{aligned}$$

将此结果代回 $\phi_{Z(t)}(u)$ 的指数中:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_{Z(t)}(u) = \lim_{t \rightarrow \infty} \exp \left\{ -iu\mu \frac{\sqrt{\lambda t}}{\sigma_0} + i\mu u \frac{\sqrt{\lambda t}}{\sigma_0} - \frac{1}{2} u^2 + o(1) \right\} = e^{-u^2/2}.$$

这恰为标准正态分布 $N(0, 1)$ 的特征函数。因而对充分大的 t , $Z(t)$ 依分布收敛于标准正态分布, 即 $X(t)$ 渐近正态。□

Exercise 2.8 (Ex 2.39)

对复合 Poisson 过程计算 $\text{Cov}(X(s), X(t))$ 。

解. 设 $X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$ 是速率为 λ 的复合 Poisson 过程。不妨设 $s < t$, 将 $X(t)$ 拆分为两部分:

$$X(t) = X(s) + (X(t) - X(s)).$$

计算两者的协方差:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X(s), X(t)) &= \text{Cov}(X(s), X(s) + X(t) - X(s)) \\ &= \text{Cov}(X(s), X(s)) + \text{Cov}(X(s), X(t) - X(s)) \\ &= \text{Var}(X(s)) + \text{Cov}(X(s), X(t) - X(s)). \end{aligned}$$

由 Poisson 过程的独立增量性可知, 时间段 $(s, t]$ 内到达的事件数 $N(t) - N(s)$ 与时间段 $[0, s]$ 内到达的事件数 $N(s)$ 相互独立; 且对应的 X_i 相互独立。因此, 区间 $(s, t]$ 内的过程增量 $X(t) - X(s) = \sum_{i=N(s)+1}^{N(t)} X_i$ 与区间 $[0, s]$ 内的过程 $X(s) = \sum_{i=1}^{N(s)} X_i$ 相互独立。独立变量的协方差为 0, 即 $\text{Cov}(X(s), X(t) - X(s)) = 0$. 于是:

$$\text{Cov}(X(s), X(t)) = \text{Var}(X(s)).$$

对于复合 Poisson 过程, 其方差为 $\text{Var}(X(s)) = \lambda s \mathbb{E}[X_1^2]$. 综上, 考虑到 s 和 t 的对称性, 对于任意的 s 和 t , 有:

$$\text{Cov}(X(s), X(t)) = \lambda \min\{s, t\} \mathbb{E}[X_1^2].$$

第3章

第三周作业

Exercise 3.1 (Ex 3.2)

在定义更新过程中，我们假设到达间隔时间为有限值的概率 $F(\infty)$ 等于 1. 若 $F(\infty) < 1$ ，则在每次更新后以一个正概率 $1 - F(\infty)$ 没有别的更新。证明在 $F(\infty) < 1$ 时，若记总更新数为 $N(\infty)$ ，则 $1 + N(\infty)$ 具有以 $1/(1 - F(\infty))$ 为均值的几何分布。

证明. 我们有 $P(1 + N(\infty) = n) = P(N(\infty) = n - 1) = P(\text{在第 } (n - 1) \text{ 个更新后没有别的更新}) = P(X_1, \dots, X_{n-1} < \infty, X_n = \infty) = (F(\infty))^{n-1} \cdot (1 - F(\infty)), n \in \mathbb{N}^+$. 因此 $1 + N(\infty)$ 服从参数为 $p = 1 - F(\infty)$ 的几何分布，从而均值为 $\mathbb{E}[1 + N(\infty)] = 1/(1 - F(\infty))$. $\square$

Exercise 3.2 (Ex 3.7)

若到达间隔分布 F 是 $(0, 1)$ 均匀分布，证明

$$m(t) = e^t - 1, 0 \leq t \leq 1.$$

现在论证：为使到达间隔时间加起来刚好超过 1 所需的 $(0, 1)$ 均匀随机变量的个数的期望是 e .

证明. 设更新函数为 $m(t) = \mathbb{E}[N(t)]$. 对 X_1 取条件可得

$$m(t) = F(t) + \int_0^t m(t-x) dF(x).$$

由于 F 是 $(0, 1)$ 上的均匀分布，当 $0 \leq t \leq 1$ 时有 $F(t) = t, dF(x) = dx$. 于是有

$$m(t) = t + \int_0^t m(t-x) dx = t + \int_0^t m(x) dx, 0 \leq t \leq 1.$$

两边对 t 求导得 $m'(t) = 1 + m(t), 0 \leq t \leq 1$. 又 $m(0) = 0$. 故解此微分方程得 $m(t) = e^t - 1, 0 \leq t \leq 1$. 由于 $X_1, X_2, \dots$ 为独立的 $(0, 1)$ 均匀随机变量，并且有

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i, N(1) = \max\{n : S_n \leq 1\}.$$

则“为使到达间隔时间加起来刚好超过 1 所需的 $(0, 1)$ 均匀随机变量的个数”恰为 $N(1) + 1$. 因此其期望为 $\mathbb{E}[N(1) + 1] = m(1) + 1 = e - 1 + 1 = e$. $\square$

Exercise 3.3 (Ex 3.3)

用语言表述随机变量 $X_{N(t)+1}$ 代表什么？（提示：它是哪个更新区间的长度？）证明

$$P\{X_{N(t)+1} \geq x\} \geq \bar{F}(x).$$

当 $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ 时精确地计算上式的左边的项。

证明. $X_{N(t)+1}$ 代表第 $(N(t) + 1)$ 个更新区间的长度。由于 $N(t)$ 为直至时刻 t 的更新次数，所以 t 落在第 $(N(t) + 1)$ 个更新区间中，从而 $X_{N(t)+1}$ 表示包含时刻 t 的更新区间长度。

注记 3.1. 这里的更新区间均取为左闭右开，而若取为左开右闭，则 $X_{N(t)+1}$ 表示从时刻 t 后开始直至下一次更新发生时，最后一个更新区间的长度。

考虑对 $S_{N(t)} = \max\{S_n : S_n \leq t\}$ 取条件，对任意的 $y \geq 0$ ，我们有

$$\begin{aligned} P(X_{N(t)+1} \geq x \mid S_{N(t)} = y) &= P(X_{N(t)+1} \geq x \mid X_{N(t)+1} > t - y) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P(N(t) = n) P(X_{n+1} \geq x \mid X_{n+1} > t - y) = \sum_{n=0}^{\infty} P(N(t) = n) P(X_1 \geq x \mid X_1 > t - y) \\ &= P(X \geq x \mid X > t - y) \geq P(X > x) = \bar{F}(x). \end{aligned}$$

显然有 $0 \leq S_{N(t)} \leq t$ ，于是就有

$$P(X_{N(t)+1} \geq x) = \int_{[0,t]} P(X_{N(t)+1} \geq x \mid S_{N(t)} = y) dF_{S_{N(t)}}(y) \geq \bar{F}(x) \int_{[0,t]} dF_{S_{N(t)}}(y) = \bar{F}(x).$$

即 $P(X_{N(t)+1} \geq x) \geq \bar{F}(x)$ ，即证。而若 $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ ， $\bar{F}(x) = e^{-\lambda x}$ ，则此时 X 为连续型随机变量且 $\{N(t), t \geq 0\}$ 为具有速率 λ 的 Poisson 过程，于是 $m(y) = \mathbb{E}[N(y)] = \lambda y$ ，则由教材引理 3.4.3 及其推论有 $P(S_{N(t)} = 0) = \bar{F}(t) = e^{-\lambda t}$ ， $dF_{S_{N(t)}}(y) = \bar{F}(t - y) dm(y) = \lambda e^{-\lambda(t-y)} dy$ ， $y > 0$ ，从而

$$\begin{aligned} &P(X_{N(t)+1} \geq x) \\ &= P(X_{N(t)+1} \geq x \mid S_{N(t)} = 0) P(S_{N(t)} = 0) + \int_{(0,t]} P(X_{N(t)+1} \geq x \mid S_{N(t)} = y) dF_{S_{N(t)}}(y) \\ &= P(X > x, X > t) + \int_{(0,t]} \lambda P(X > x, X > t - y) dy \\ &= \bar{F}(\max(x, t)) + \lambda \int_{(0,t]} \bar{F}(\max(x, t - y)) dy = e^{-\lambda \max(x, t)} + \lambda \int_0^t e^{-\lambda \max(x, t-y)} dy. \end{aligned}$$

注记 3.2. 这里对 0 单独计算是因为 $P(S_{N(t)} = 0)$ 并不为 0 (事件 $\{X_1 > t\}$ 蕴含事件 $\{S_{N(t)} = 0\}$)。

若 $t \leq x$ ，则 $t - y \leq x$ ，从而

$$P(X_{N(t)+1} \geq x) = e^{-\lambda x} + \lambda e^{-\lambda x} \int_0^t dy = e^{-\lambda x} (1 + \lambda t).$$

若 $0 \leq x < t$ ，则有

$$P(X_{N(t)+1} \geq x) = e^{-\lambda t} + \lambda \int_0^{t-x} e^{-\lambda(t-y)} dy + \lambda e^{-\lambda x} \int_{t-x}^t dy = e^{-\lambda x} (1 + \lambda x).$$

综上所述可得

$$P(X_{N(t)+1} \geq x) = \begin{cases} e^{-\lambda x} (1 + \lambda t), & x \geq t, \\ e^{-\lambda x} (1 + \lambda x), & 0 \leq x < t. \end{cases}$$

这便是所要求的结果。 □

Exercise 3.4 (Ex 3.10)

设 $X_1, X_2, \dots$ 独立同分布， $\mathbb{E}[X_i] < \infty$ 。又设 $N_1, N_2, \dots$ 为独立同分布的对序列 $X_1, X_2, \dots$ 的停时， $\mathbb{E}[N_i] < \infty$ 。依次地观察 X_i ，停止在 N_1 。现在开始在余下的 X_i 中抽样（像刚从 X_{N_1+1}

开始一样) 在附加时间 N_2 之后停止 (这样 $X_1 + \cdots + X_{N_1}$ 与 $X_{N_1+1} + \cdots + X_{N_1+N_2}$ 同分布)。现在开始在余下的 X_i 中抽样 (也像刚开始一样) 在附加时间 N_3 之后停止。如此继续。

(a) 令

$$S_1 = \sum_{i=1}^{N_1} X_i, S_2 = \sum_{i=N_1+1}^{N_1+N_2} X_i, \cdots, S_m = \sum_{i=N_1+\cdots+N_{m-1}+1}^{N_1+\cdots+N_m} X_i.$$

用强大数定律计算

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{S_1 + \cdots + S_m}{N_1 + \cdots + N_m} \right).$$

(b) 写出

$$\frac{S_1 + \cdots + S_m}{N_1 + \cdots + N_m} = \frac{S_1 + \cdots + S_m}{m} \frac{m}{N_1 + \cdots + N_m}.$$

推导 (a) 中极限的另一个表达式。

(c) 令两个表达式相等以得到 Wald 方程。

证明. (a) 由题我们有

$$\frac{S_1 + \cdots + S_m}{N_1 + \cdots + N_m} = \frac{\sum_{i=1}^{N_1+\cdots+N_m} X_i}{N_1 + \cdots + N_m}.$$

当 $m \rightarrow \infty$ 时, $N_1 + \cdots + N_m \rightarrow \infty$, 由强大数定律

$$\frac{\sum_{i=1}^{N_1+\cdots+N_m} X_i}{N_1 + \cdots + N_m} \rightarrow \mathbb{E}[X].$$

也就是

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{S_1 + \cdots + S_m}{N_1 + \cdots + N_m} \right) = \mathbb{E}[X].$$

(b) 由

$$\frac{S_1 + \cdots + S_m}{N_1 + \cdots + N_m} = \left(\frac{S_1 + \cdots + S_m}{m} \right) / \left(\frac{N_1 + \cdots + N_m}{m} \right),$$

分别对分子分母使用强大数定律, 首先对分母有 $\frac{N_1 + \cdots + N_m}{m} \rightarrow \mathbb{E}[N]$. 再考虑分子, 下证 $\mathbb{E}[S] < \infty$, 其中 $S = \sum_{i=1}^N X_i$, 我们有

$$\mathbb{E}[S] = \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^N X_i \right] = \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^{\infty} X_i \mathbf{1}_{\{N \geq i\}} \right] = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}[X_i \mathbf{1}_{\{N \geq i\}}].$$

注记 3.3. 这里交换期望和求和顺序是合理的, 可以参考教材定理 3.3.2 后的注。

由于 $\{N \geq i\}^c = \{N \leq i-1\} \in \sigma(X_1, \cdots, X_{i-1}) \perp X_i$, 从而与事件 $\{N \geq i\}$ 与 X_i 独立, 因此

$$\mathbb{E}[S] = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}[X] P(N \geq i) = \mathbb{E}[X] \sum_{i=1}^{\infty} P(N \geq i) = \mathbb{E}[X] \mathbb{E}[N] < \infty.$$

从而 $S_1, S_2, \cdots$ 独立同分布且具有有限期望, 因此有

$$\frac{S_1 + \cdots + S_m}{m} \rightarrow \mathbb{E}[S] \Rightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{S_1 + \cdots + S_m}{N_1 + \cdots + N_m} \right) = \frac{\mathbb{E}[S]}{\mathbb{E}[N]}.$$

(c) 由 (a)(b) 两式极限相等, 得到 $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[S]/\mathbb{E}[N]$, 即 $\mathbb{E}[S] = \mathbb{E}[N]\mathbb{E}[X]$, 也即 Wald 方程。□

Exercise 3.5 (Ex 3.11)

考虑一个矿工陷在一个有三个门的矿井中, 1 号门引导他经两天路程后脱险, 2 号门引导他经四天路程后回到矿井, 3 号门引导他经八天路程后回到矿井。假定他在每次都等可能地选取

三个门中的一个，而以 T 记此矿工脱险所用的时间。

(a) 定义一个独立同分布随机变量序列 $X_1, X_2, \dots$ 和一个停时 N ，满足

$$T = \sum_{i=1}^N X_i.$$

注：你也许可以考虑假设此矿工即使在到达安全地之后，仍继续随机地取那些门。

(b) 用 Wald 方程求 $\mathbb{E}[T]$ 。

(c) 计算 $\mathbb{E}[\sum_{i=1}^n X_i \mid N = n]$ ，注意它不等于 $\mathbb{E}[\sum_{i=1}^n X_i]$ 。

(d) 利用 (c) 再次推导 $\mathbb{E}[T]$ 。

解. (a) 取

$$X_i = \begin{cases} 2, & \text{第 } i \text{ 次时选 1 号门} \\ 4, & \text{第 } i \text{ 次时选 2 号门} \\ 8, & \text{第 } i \text{ 次时选 3 号门} \end{cases}$$

满足 $P(X_i = 2) = P(X_i = 4) = P(X_i = 8) = 1/3$ ，且 $\{X_i\}$ 独立同分布。令 $N = \min\{n : X_n = 2\}$ ，则 $T = \sum_{i=1}^N X_i$ 满足题目要求。

(b) 我们有

$$P(N = n) = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{3}.$$

于是 N 为参数为 $1/3$ 的几何分布，所以 $\mathbb{E}[N] = 3 < \infty$ 。又因为 $\mathbb{E}[X] = (2 + 4 + 8)/3 = 14/3$ ，故由 Wald 方程可得 $\mathbb{E}[T] = \mathbb{E}[N]\mathbb{E}[X] = 14$ 。（单位：天）

(c) 我们有

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n X_i \mid N = n\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n X_i \mid X_1 \neq 2, \dots, X_{n-1} \neq 2, X_n = 2\right] \\ &= 2 + \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n-1} X_i \mid X_i \neq 2\right] = 2 + 6(n-1) = 6n - 4. \end{aligned}$$

但是另一方面，我们有

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = n\mathbb{E}[X_i] = \frac{14}{3}n.$$

从而可知二者通常并不相等。

(d) 由全期望公式， $\mathbb{E}[T] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[T \mid N]] = \mathbb{E}[6N - 4] = 6\mathbb{E}[N] - 4 = 18 - 4 = 14$ 。

第4章

第四周作业

Exercise 4.1 (Ex 3.4)

证明更新方程

$$m(t) = F(t) + \int_0^t m(t-x) dF(x).$$

证明. 记 X_1 为第一次更新发生的时间, 其分布函数为 $F(x)$ 。考虑在给定 $X_1 = x$ 的条件下的更新过程 $N(t)$ 。

当 $x \leq t$ 时, 时刻 x 发生了一次更新, 此后过程重新开始, 故在 $(x, t]$ 内发生的期望更新数为 $m(t-x)$, 因此有

$$\mathbb{E}[N(t) \mid X_1 = x] = 1 + m(t-x).$$

当 $x > t$ 时, 在 $(0, t]$ 内没有更新发生, 因此有

$$\mathbb{E}[N(t) \mid X_1 = x] = 0.$$

由全期望公式, 对 X_1 取期望可得:

$$\begin{aligned} m(t) &= \mathbb{E}[N(t)] = \int_0^\infty \mathbb{E}[N(t) \mid X_1 = x] dF(x) \\ &= \int_0^t (1 + m(t-x)) dF(x) + \int_t^\infty 0 dF(x) \\ &= \int_0^t dF(x) + \int_0^t m(t-x) dF(x) \\ &= F(t) + \int_0^t m(t-x) dF(x). \end{aligned}$$

原命题得证。 □

Exercise 4.2 (Ex 3.13)

一个过程处在 $1, 2, \dots, n$ 中的状态之一。它开始处在状态 1, 且在那里保持一个具有分布 F_1 的时间总量。在离开状态 1 后, 它转移到状态 2, 且在那里保持一个具有分布 F_2 的时间总量。当它离开状态 2 时, 它转移到状态 3, 如此继续。从状态 n , 它返回到 1, 并且重新开始, 求

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P\{\text{在时刻 } t \text{ 过程处在状态 } i\}$$

假定在进入状态 1 之间的时间的分布 H 不是格点的, 且其均值有限。

解. 该过程是一个交替更新过程的推广。我们将过程从状态 1 出发再次回到状态 1 的行为视为一个完整的“更新周期”。

记 X_k 为第 k 个周期中停留在状态 j 的时间, 已知其分布为 F_j , 均值为 $\mu_j = \int_0^\infty x dF_j(x)$ ($j = 1, 2, \dots, n$). 则一个完整更新周期的时间长度 T 的期望为:

$$\mathbb{E}[T] = \sum_{j=1}^n \mu_j.$$

在一个周期内, 过程处在状态 i 的总时间即为该周期内经历状态 i 的时间 μ_i .

由于进入状态 1 之间的时间分布 H (即周期长度的分布) 不是格点的, 且其均值 $\mathbb{E}[T] < \infty$, 根据定理 3.4.4:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P\{\text{在时刻 } t \text{ 过程处在状态 } i\} = \frac{\mu_i}{\mathbb{E}[T]} = \frac{\mu_i}{\sum_{j=1}^n \mu_j}.$$

Exercise 4.3 (Ex 3.9)

考虑只有一个服务员的银行, 顾客按速率为 λ 的 Poisson 过程到达。然而当顾客到达时, 只在服务员空闲时他才能进银行。以 G 记服务时间的分布。

- (a) 顾客进银行的速率是什么?
- (b) 潜在的顾客中进银行的占多少比例?
- (c) 服务员的忙期占多少时间比例?

解. 由于只有在服务员空闲时顾客才能进入, 系统在“空闲期”和“忙期”之间交替进行, 构成一个交替更新过程。

设服务员的一个完整的“更新周期”为 T , 由一个空闲期 I 和一个忙期 B 组成。已知顾客按速率为 λ 的 Poisson 过程到达, 故空闲期 $I \sim \text{Exp}(\lambda)$, 有 $\mathbb{E}[I] = \frac{1}{\lambda}$. 忙期即为服务一位顾客的时间, 分布为 G , 设其均值为 $\mathbb{E}[S]$, 故 $\mathbb{E}[B] = \mathbb{E}[S] = \int_0^\infty x dG$.

一个周期的期望长度为 $\mathbb{E}[T] = \mathbb{E}[I] + \mathbb{E}[B] = \frac{1}{\lambda} + \int_0^\infty x dG$.

(a) 在每个周期内恰好只有一名顾客进入银行。由更新定理, 顾客进银行的长期速率为:

$$\lambda_{\text{in}} = \frac{1}{\mathbb{E}[T]} = \frac{1}{\frac{1}{\lambda} + \mathbb{E}[S]} = \frac{\lambda}{1 + \lambda \int_0^\infty x dG}.$$

(b) 潜在顾客中进银行的比例, 即进入速率与总到达速率 λ 之比:

$$P(\text{进入}) = \frac{\lambda_{\text{in}}}{\lambda} = \frac{1}{1 + \lambda \int_0^\infty x dG}.$$

(c) 服务员的忙期占时间比例为系统中忙碌时间在总时间中的占比:

$$P(\text{忙碌}) = \frac{\mathbb{E}[B]}{\mathbb{E}[T]} = \frac{\mathbb{E}[S]}{\frac{1}{\lambda} + \mathbb{E}[S]} = \frac{\lambda \int_0^\infty x dG}{1 + \lambda \int_0^\infty x dG}.$$

Exercise 4.4 (Ex 3.15)

以 $A(t)$ 和 $Y(t)$ 分别记在时刻 t 的年龄和剩余寿命。求:

- (a) $P\{Y(t) > x \mid A(t) = s\}$.
- (b) $P\{Y(t) > x \mid A(t + x/2) = s\}$.
- (c) 对 Poisson 过程计算 $P\{Y(t) > x \mid A(t + x) > s\}$.
- (d) $P\{Y(t) > x, A(t) > y\}$.

(e) 若 $\mu < \infty$, 证明当 $t \rightarrow \infty$ 时, 以概率为 1 地有 $A(t)/t \rightarrow 0$.

解. 记更新间隔时间序列为 $\{X_n\}$, 其分布函数为 $F(x)$, 尾概率为 $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$.

(a) 条件 $A(t) = s$ 表示当前更新间隔已经持续了 s 的时间. 剩余寿命 $Y(t) > x$ 等价于总间隔时间 $X > s + x$. 所以有:

$$P\{Y(t) > x \mid A(t) = s\} = P\{X > s + x \mid X > s\} = \frac{\bar{F}(s+x)}{\bar{F}(s)}.$$

(b) 考虑上一次更新发生的时间 $t + x/2 - s$ 与时刻 t 的关系: 若 $s \leq x/2$, 则在 $(t, t + x/2]$ 之间必有更新发生, 故必然有 $Y(t) \leq x/2 < x$, 概率为 0. 若 $s > x/2$, 则 $(t, t + x/2]$ 内无更新. 已知在 $t + x/2$ 时年龄为 s , 要求 $Y(t) > x$ 相当于要求在 $t + x/2$ 后还要存活至少 $x/2$. 所以有:

$$P\{Y(t) > x \mid A(t + x/2) = s\} = \begin{cases} 0, & s \leq x/2 \\ \frac{\bar{F}(s+x/2)}{\bar{F}(s)}, & s > x/2 \end{cases}$$

(c) 对于 Poisson 过程, 若 $s \geq x$, 条件区间 $(t + x - s, t + x]$ 包含结论区间 $(t, t + x]$, 故区间内无事件发生必定成立, 概率为 1. 若 $s < x$, 利用独立增量性:

$$P\{Y(t) > x \mid A(t + x) > s\} = P\{\text{在 } (t, t + x - s] \text{ 内无事件}\} = e^{-\lambda(x-s)}.$$

(d) $A(t) > y$ 且 $Y(t) > x$ 表示在整个区间 $(t - y, t + x]$ 内无更新发生. 平移观察区间可知, 这等价于在时刻 $t + x$ 的年龄大于 $x + y$:

$$P\{Y(t) > x, A(t) > y\} = P\{A(t + x) > x + y\}.$$

(e) 记 S_n 为第 n 次更新发生的时刻, 由年龄的定义有 $A(t) = t - S_{N(t)}$, 故

$$\frac{A(t)}{t} = 1 - \frac{S_{N(t)}}{t} = 1 - \left(\frac{S_{N(t)}}{N(t)} \cdot \frac{N(t)}{t} \right).$$

由强大数定律, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $\frac{S_{N(t)}}{N(t)} \rightarrow \mu$ (a.s.) 且 $\frac{N(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu}$ (a.s.). 所以有:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{A(t)}{t} = 1 - \mu \cdot \frac{1}{\mu} = 0 \text{ (a.s.)}.$$

原命题得证。

Exercise 4.5 (Ex 3.16)

考虑一个更新过程, 其到达间隔时间是参数为 (n, λ) 的 gamma 分布. 利用命题 3.4.6 证明

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[Y(t)] = \frac{n+1}{2\lambda}.$$

现在请解释不用计算如何得到它。

证明. 已知到达间隔时间 $X \sim \text{Gamma}(n, \lambda)$, 则其期望和二阶矩分别为 $\mathbb{E}[X] = \frac{n}{\lambda}$, 且方差 $\text{Var}(X) = \frac{n}{\lambda^2}$, 故 $\mathbb{E}[X^2] = \text{Var}(X) + (\mathbb{E}[X])^2 = \frac{n(n+1)}{\lambda^2}$.

由命题 3.4.6 的极限公式有:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[Y(t)] = \frac{\mathbb{E}[X^2]}{2\mathbb{E}[X]} = \frac{\frac{n(n+1)}{\lambda^2}}{2 \cdot \frac{n}{\lambda}} = \frac{n+1}{2\lambda}.$$

不用计算的直观解释:

可以将参数为 (n, λ) 的 Gamma 分布视为由底层 Poisson 过程诱导的 n 个相互独立的、均值为 $\frac{1}{\lambda}$ 的指数分布阶段拼合而成。

当 $t \rightarrow \infty$ 时, 随机观察时刻 t 等概率地落在组成当前更新间隔的 n 个阶段中的任意一个。由于检查悖论, 被时刻 t 击中的那个特定阶段, 其包含时刻 t 的期望长度为原本的两倍 (即向左和向右看均服从无记忆性的指数分布, 期望各为 $\frac{1}{\lambda}$, 总和为 $\frac{2}{\lambda}$)。

因此, 包含时刻 t 的完整更新间隔的总期望长度变为:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_{N(t)+1}] = \frac{2}{\lambda} + (n-1)\frac{1}{\lambda} = \frac{n+1}{\lambda}.$$

在非周期更新过程的极限状态下, 因为剩余寿命与年龄的极限分布相同 (命题 3.4.5), 所以极限情况下平均剩余寿命 = t 所在更新区间长度期望的一半 (即 $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[Y(t)] = \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_{N(t)+1}]$), 所以有 $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[Y(t)] = (n+1)/(2\lambda)$. $\square$

第5章

第五周作业

Exercise 5.1 (Ex 3.20)

考虑连续投掷一枚均匀的硬币。

(a) 计算直到模式 HHTHHTT 出现的平均投掷次数。

(b) 在模式 HHTT 或 HTHT 中哪个对投掷要求更长的期望时间？

解. (a) 由硬币均匀则有掷出正面 H 的概率 $p = 1/2$, 掷出反面 T 的概率 $q = 1/2$. 模式 HHTHHTT 以 H 始以 T 结尾, 故由例 3.5 (A) 有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\text{直到HHTHHTT出现的投掷次数}] &= \mathbb{E}[\text{该模式两次出现间的投掷次数}] \\ &= p^{-4}q^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-7} = 2^7 = 128 \text{ (次)}.\end{aligned}$$

即平均投掷次数为 128 次。

(b) 由例 3.5 (A) 有 $\mathbb{E}[\text{直到HHTT的时间}] = \mathbb{E}[\text{该模式两次出现间的时间}] = p^{-2}q^{-2} = 2^4 = 16$. 并且又有 $\mathbb{E}[\text{直到HTHT的时间}] = \mathbb{E}[\text{直到HT的时间}] + p^{-2}q^{-2} = p^{-1}q^{-1} + p^{-2}q^{-2} = 20 > 16$. 故模式 HTHT 对投掷要求更长的期望时间。

Exercise 5.2 (Ex 3.21)

一个赌徒在每次赌博中, 独立于过去的结果, 分别以概率 p 和 $1 - p$ 赢或输一个单位。假设该赌徒的策略是: 当他首次连续赢 k 次时离开。求在他离开时

(a) 他赢的期望次数, (b) 他已赢得的赌资的期望数。

解. (a) 记 $X_i = \mathbf{1}_{\{\text{第}i\text{次赢}\}}$, 由于每次赌博相互独立, 则 X_i 相互独立。记 $N = \min\{n : X_n + X_{n-1} + \cdots + X_{n-k+1} = k\}$. 则 $N = n$ 当且仅当 $X_{n-k+1} = \cdots = X_n = 1$, 与 $X_{n+1}, X_{n+2}, \cdots$ 均独立, 则 N 为 $X_1, X_2, \cdots$ 的一个停时, 且

$$T_1 = \sum_{i=1}^N X_i$$

即为离开时赢的次数。由例 3.5 (A) 有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\text{直到连续赢}k\text{次的赌博次数}] &= \mathbb{E}[N] \\ &= \frac{1}{p^k} + \mathbb{E}[\text{直到连续赢}(k-1)\text{次的赌博次数}] = \cdots = \sum_{i=1}^k \left(\frac{1}{p}\right)^i < \infty.\end{aligned}$$

而 $\mathbb{E}[X_i] = p < \infty$, 则由 Wald 方程可得

$$\mathbb{E}[T_1] = \mathbb{E}[N] \cdot \mathbb{E}[X_i] = p \cdot \sum_{i=1}^k \left(\frac{1}{p}\right)^i = \sum_{i=1}^k \left(\frac{1}{p}\right)^{i-1} = \frac{p - p^{1-k}}{p - 1}.$$

(b) 记 $Y_i = 2X_i - 1$, 即第 i 次赢时 $Y_i = 1$, 第 i 次输时 $Y_i = -1$, 则 Y_i 也相互独立. 记 $\tilde{N} = \min\{n : Y_n + Y_{n-1} + \cdots + Y_{n-k+1} = k\}$. 则 $\tilde{N} = n$ 当且仅当 $Y_{n-k+1} = \cdots = Y_n = 1$, 与 $Y_{n+1}, Y_{n+2}, \cdots$ 均独立, 则 $\tilde{N}$ 为 $Y_1, Y_2, \cdots$ 的一个停时, 且

$$T_2 = \sum_{i=1}^{\tilde{N}} Y_i$$

为离开时赢得的赌资. 又 $\mathbb{E}[Y_i] = p + (-1)(1-p) = 2p - 1 < \infty$, 而

$$\mathbb{E}[\tilde{N}] = \mathbb{E}[N] = \sum_{i=1}^k \left(\frac{1}{p}\right)^i < \infty.$$

则由 Wald 方程有

$$\mathbb{E}[T_2] = \mathbb{E}[\tilde{N}]\mathbb{E}[Y_i] = (2p - 1) \sum_{i=1}^k \left(\frac{1}{p}\right)^i = \frac{(1 - p^{-k})(2p - 1)}{p - 1}.$$

Exercise 5.3 (Ex 3.22)

考虑连续投掷一个出现正面的概率为 p 的硬币. 求直至下列序列出现时的期望投掷数:

(a) $A = \text{HHTTHH}$, (b) $B = \text{HTHTT}$.

现在假设 $p = 1/2$.

(c) 求 $P\{A \text{ 在 } B \text{ 前发生}\}$.

(d) 求直至 A 或 B 之一发生时的期望投掷数.

解. (a) 同样是由例 3.5 (A) 有 $\mathbb{E}[\text{HHTTHH}] = \mathbb{E}[\text{HHTTHH} | \text{HH}] + \mathbb{E}[\text{HH}]$. 以及

$$\mathbb{E}[\text{HHTTHH} | \text{HH}] = \mathbb{E}[\text{HHTTHH} | \text{HHTTHH}] = p^{-2}q^{-2}p^{-2} = p^{-4}q^{-2}.$$

$$\mathbb{E}[\text{HH}] = \mathbb{E}[\text{HH} | \text{H}] + \mathbb{E}[\text{H}] = \mathbb{E}[\text{HH} | \text{HH}] + \mathbb{E}[\text{H}] = p^{-2} + p^{-1}.$$

于是我们得到 $\mathbb{E}[\text{HHTTHH}] = p^{-4}q^{-2} + p^{-2} + p^{-1}$.

(b) 同理可得 $\mathbb{E}[\text{HTHTT}] = \mathbb{E}[\text{HTHTT} | \text{HTHTT}] = p^{-2}q^{-3}$.

(c)(d) 现在 $p = q = 1/2$, 从而代入 (a)(b) 的结果可得

$$\mathbb{E}[\text{HHTTHH}] = 64 + 4 + 2 = 70, \mathbb{E}[\text{HTHTT}] = 32.$$

我们设 $M = \min\{N_A, N_B\}$, 即两个花样中首次出现其所时的投掷次数, 再记 P_A 为 A 先于 B 出现的概率. 这类题目通常的思路是先求 $\mathbb{E}[N_{A|B}]$ 与 $\mathbb{E}[N_{B|A}]$, 再利用 $\mathbb{E}[N_A] = \mathbb{E}[M] + \mathbb{E}[N_{A|B}](1 - P_A)$, $\mathbb{E}[N_B] = \mathbb{E}[M] + \mathbb{E}[N_{B|A}]P_A$, 求解方程组得到答案.

由于在出现模式 $B = \text{HTHTT}$ 之后, 对模式 $A = \text{HHTTHH}$ 没有可利用的尾子序列, 因此我们有 $\mathbb{E}[\text{HHTTHH} | \text{HTHTT}] = \mathbb{E}[\text{HHTTHH}] = 70$. 而在出现模式 $A = \text{HHTTHH}$ 之后, 对模式 $B = \text{HTHTT}$ 可以利用的最长尾子序列为 H , 故 $\mathbb{E}[\text{HTHTT} | \text{HHTTHH}] = \mathbb{E}[\text{HTHTT} | \text{H}] = \mathbb{E}[\text{HTHTT}] - \mathbb{E}[\text{H}] = 32 - 2 = 30$. 于是有 $70 = \mathbb{E}[M] + 70(1 - P_A)$, $32 = \mathbb{E}[M] + 30P_A$. 解这个二元一次方程组可得 $P_A = 8/25 = 0.32$, $\mathbb{E}[M] = 112/5 = 22.4$. 故 $P\{A \text{ 在 } B \text{ 前发生}\} = 8/25$, 且直至 A 或 B 之一发生时的期望投掷数为 $\mathbb{E}[M] = 112/5$.

Exercise 5.4 (Ex 3.24)

从一副标准的扑克牌中（不考虑大小王）每次有放回地抽出一张。求直至连续出现四张同花色的牌时所抽牌的期望数。

解. 不考虑大小王：记4种花色为A, B, C, D，即为求模式XXXX (X为A或B或C或D) 首次出现时所抽牌数的期望。设所求期望为 $\mathbb{E}[XXXX]$ ，假设连续抽取扑克牌，在任意时刻，若最后的四张牌花色相同，则称发生了一次更新，于是更新之间的时间间隔的期望为

$$\mathbb{E}[\text{更新之间的时间}] = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\mathbb{E}[XXXX].$$

这是因为若下一张牌仍同花色则更新之间的时间为1，否则为 $\mathbb{E}[XXXX]$ 。而由Blackwell定理有 $\mathbb{E}[\text{更新之间的时间}] = (4/4^4)^{-1} = 64$ 。代入解得 $\mathbb{E}[XXXX] = 85$ 。

另解：设所求期望为 $\mathbb{E}[XXXX]$ ，取条件于第一次抽牌结果，我们有

$$\mathbb{E}[XXXX] = \frac{1}{4}\mathbb{E}[XXXX | \text{第一次为A}] + \cdots + \frac{1}{4}\mathbb{E}[XXXX | \text{第一次为D}].$$

由4花色对称性， $\mathbb{E}[XXXX] = \mathbb{E}[XXXX | \text{第一次为A}] \triangleq \mathbb{E}[XXXX | A]$ 。由各次抽牌结果独立，再取条件于第二次结果，就有

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[XXXX] &= \mathbb{E}[XXXX | A] \\ &= \frac{1}{4}\mathbb{E}[XXXX | \text{前2次为AA}] + \frac{1}{4}\mathbb{E}[XXXX | \text{前2次为AB}] + \cdots + \frac{1}{4}\mathbb{E}[XXXX | \text{前2次为AD}] \\ &\triangleq \frac{1}{4}\mathbb{E}[XXXX | AA] + \frac{3}{4}(1 + \mathbb{E}[XXXX | B]) = \frac{1}{4}\mathbb{E}[XXXX | AA] + \frac{3}{4}(1 + \mathbb{E}[XXXX | A]). \end{aligned}$$

化简后再继续取条件于第三次抽牌结果，我们有

$$\mathbb{E}[XXXX] = 3 + \mathbb{E}[XXXX | AA] = 3 + \frac{1}{4}\mathbb{E}[XXXX | AAA] + \frac{3}{4}(2 + \mathbb{E}[XXXX | A]).$$

再次化简得到

$$\mathbb{E}[XXXX] = 18 + \mathbb{E}[XXXX | AAA] = 18 + \frac{1}{4} \cdot 4 + \frac{3}{4}(3 + \mathbb{E}[XXXX | A]).$$

于是解得 $\mathbb{E}[XXXX] = 85$ 。

注记 5.1. 例3.5 (A) 中出现的解题思路与方法是一门课考试常考的，大家最好要熟练掌握。

Exercise 5.5 (Ex 3.28)

在例3.6 (C) 中，假设到达的更新过程是均值为 μ 的Poisson过程。如果每当有 N 个旅客等待时就开走一辆火车，以 N^* 记使长程平均费用最小的 N 值。另一类型策略是每 T 个时间单位开走一辆火车。计算此策略的长程平均费用，并以 T^* 记使之最小的 T 值。证明每当有 N^* 个旅客等待时就开走一辆火车的策略，比每 T^* 个时间单位就开走一辆火车的策略，产生较小的平均费用。

证明. 采用每 T 个时间单位开走一辆车的策略时，则每个循环长度均为 T ，设 $N(T)$ 为时间长度为 T 的区间中到达的人数，则由题有 $N(T) \sim \text{Poi}(\mu T)$ 。给定 $N(T) = n$ 时，记 S_k 为第 k 个人到达的时间，则 $S_1, S_2, \dots, S_n$ 与 $(0, T)$ 上均匀分布的次序统计量同分布。于是可等效地看作将 $[0, T]$ 以 $S_1, \dots, S_n$ 为节点随机分成 $(n+1)$ 段，每段上人数依次为 $0, 1, \dots, n$ ，则平均每段人数为 $(0+1+\dots+n)/(n+1) = n/2$ ，故由此可得

$$\mathbb{E}[\text{一个循环费用} | N(T) = n] = \frac{n}{2} \cdot cT + K = \frac{cT}{2} N(T) + K.$$

于是我们得到

$$\mathbb{E}[\text{一个循环费用}] = K + \frac{cT}{2}\mu T = K + \frac{c\mu T^2}{2}.$$

因此此策略支付的长程平均费用为

$$\frac{K}{T} + \frac{c\mu T}{2} \geq 2\sqrt{\left(\frac{K}{T}\right)\left(\frac{c\mu T}{2}\right)} = \sqrt{2Kc\mu}.$$

当且仅当 $K/T = c\mu T/2$ 时取等号, 也即

$$T^* = \sqrt{\frac{2K}{c\mu}}.$$

而采取 3.6 (C) 中的策略时, 由题知平均费用为

$$\frac{cN}{2} - \frac{c}{2} + \frac{K\mu}{N} \geq 2\sqrt{\left(\frac{cN}{2}\right)\left(\frac{K\mu}{N}\right)} - \frac{c}{2} = \sqrt{2Kc\mu} - \frac{c}{2}.$$

当且仅当 $cN/2 = K\mu/N$ 时取等号, 也即

$$N^* = \sqrt{\frac{2K\mu}{c}}.$$

于是得到每有 N^* 个旅客等待时开走一辆火车产生的平均费用较小, 这样就完成了证明。□

注记 5.2. 这里的 μ 是 Poisson 过程的速率, 而例 3.6 (C) 中的 μ 是旅客平均到达时间间隔, 因此我们代入时应代入 $1/\mu$ 而不是 μ .

Exercise 5.6 (Ex 3.29)

小汽车的寿命是一个分布为 F 的随机变量。当汽车损坏或年龄达到 A 时, 有一个以旧换新的策略。以 $R(A)$ 记一辆用了 A 年的车的卖出价格。损坏的车不再有价值。以 C_1 记一辆新车的价格, 且假设每当车毁坏时再以旧换新要付额外费用 C_2 。

(a) 每次购买一辆新车时说一个循环开始。计算单位时间长程平均费用。

(b) 每次在用的一辆车损坏时说一个循环开始。计算单位时间长程平均费用。

注: 在 (a) 和 (b) 两种情形, 你要计算在一个循环中的期望费用与一个循环的期望时间的比值。当然在这两种算法下得到的答案应该是相同的。

解. (a) 记汽车寿命为 X , 则由题有 $X \sim F$. 于是一个循环支付的费用为

$$\begin{cases} C_1 + C_2, & X \leq A \\ C_1 - R(A), & X > A \end{cases}$$

一个循环的长度为

$$\begin{cases} X, & X \leq A \\ A, & X > A \end{cases}$$

则有 $\mathbb{E}[\text{一个循环的费用}] = (C_1 + C_2)F(A) + (C_1 - R(A))\bar{F}(A) = C_1 + C_2F(A) - R(A)\bar{F}(A)$. 以及

$$\mathbb{E}[\text{一个循环的长度}] = \mathbb{E}[X | X \leq A] + A\bar{F}(A) = \int_0^A x dF(x) + A\bar{F}(A).$$

故长程平均费用为

$$\frac{C_1 + C_2F(A) - R(A)\bar{F}(A)}{\int_0^A x dF(x) + A\bar{F}(A)}.$$

(b) 我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\text{一个循环的长度}] &= \int_0^{+\infty} \mathbb{E}[\text{一个循环的长度} \mid X = x] dF(x) \\ &= \int_0^A x dF(x) + \int_A^{+\infty} (A + \mathbb{E}[\text{一个循环的长度}]) dF(x) \\ &= \int_0^A x dF(x) + A\bar{F}(A) + \bar{F}(A)\mathbb{E}[\text{一个循环的长度}].\end{aligned}$$

则

$$\mathbb{E}[\text{一个循环的长度}] = \frac{1}{F(A)} \left(\int_0^A x dF(x) + A\bar{F}(A) \right).$$

又

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\text{一个循环的费用}] &= \int_0^{+\infty} \mathbb{E}[\text{一个循环的费用} \mid X = x] dF(x) \\ &= \int_0^A (C_1 + C_2) dF(x) + \int_A^{+\infty} (C_1 - R(A) + \mathbb{E}[\text{一个循环的费用}]) dF(x) \\ &= (C_1 + C_2)F(A) + (C_1 - R(A))\bar{F}(A) + \bar{F}(A)\mathbb{E}[\text{一个循环的费用}].\end{aligned}$$

则

$$\mathbb{E}[\text{一个循环的费用}] = \frac{1}{F(A)} (C_1 + C_2F(A) - R(A)\bar{F}(A)).$$

故长程平均费用为

$$\frac{C_1 + C_2F(A) - R(A)\bar{F}(A)}{\int_0^A x dF(x) + A\bar{F}(A)}.$$

结果与 (a) 中相同。

Exercise 5.7 (Ex 3.31)

一个包含四个部件的系统称为在工作，如果每当有部件 1 和 2 中至少有一个在工作，又有部件 3 和 4 中至少有一个在工作。假设部件 i 按照具有非格点分布 F_i 和 G_i ($i = 1, 2, 3, 4$) 的交替更新过程交替地处于工作状态和失效状态。若这些交替更新过程都是独立的，求 $\lim_{t \rightarrow \infty} P\{\text{系统在时刻 } t \text{ 在工作}\}$ 。

解. 设 F_i 的均值是 μ_i ，以及 G_i 的均值是 ν_i ，那么我们有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(\text{部件 } i \text{ 在工作状态}) = \frac{\mu_i}{\mu_i + \nu_i}.$$

系统工作的概率即 1, 2 中至少有一个在工作的概率乘 3, 4 中至少有一个在工作的概率，即为

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P\{\text{系统在时刻 } t \text{ 在工作}\} = \left(1 - \frac{\nu_1\nu_2}{(\mu_1 + \nu_1)(\mu_2 + \nu_2)}\right) \left(1 - \frac{\nu_3\nu_4}{(\mu_3 + \nu_3)(\mu_4 + \nu_4)}\right).$$

Exercise 5.8 (Ex 3.32)

考虑一个按速率为 λ 的 Poisson 过程到达的单条服务线排队系统，其具有均值为 μ_G 的服务分布 G 。假设 $\lambda\mu_G < 1$ 。

(a) 求系统空闲的时间比例 P_0 。

(b) 当系统非空时就称为在忙（故而服务线在忙）。计算忙期的平均长度。

(c) 利用 (b) 部分和 Wald 方程计算在一个忙期中服务过的期望顾客数。

解. (a) 分别以 I 与 B 记空闲期与忙期长度, 由于顾客按速率 λ 的 Poisson 过程到达, 则 I 为顾客全离开直至下一个顾客到达的时间间隔。由 Poisson 过程有独立增量及指数分布的无记忆性, 我们有 $\mathbb{E}[I] = 1/\lambda$. 而由教材定理 3.6.2, 在接受服务的时间平均人数 $= \lambda \mathbb{E}[\text{一个顾客的服务时间}] = \lambda \mu_G$. 由于只有一条服务线, 我们有 $P_0 = (t - \lambda \mu_G t)/t = 1 - \lambda \mu_G$.

(b) 我们有

$$P_0 = \frac{\mathbb{E}[I]}{\mathbb{E}[I] + \mathbb{E}[B]} = 1 - \lambda \mu_G = \frac{1/\lambda}{1/\lambda + \mathbb{E}[B]}.$$

解得忙期的平均长度为

$$\mathbb{E}[B] = \frac{\mu_G}{1 - \lambda \mu_G}.$$

(c) 记 N 为一个忙期中服务的顾客数, 且记 Y_i 为一个忙期中第 i 个顾客的服务时间, 以及记 X_i 为第 i 个顾客与第 $(i+1)$ 个顾客的到达时间间隔, 则我们有

$$B = \sum_{i=1}^N Y_i.$$

于是 $N = n \Leftrightarrow Y_1 \geq X_1, Y_2 + Y_1 \geq X_2 + X_1, \dots, Y_{n-1} + \dots + Y_1 \geq X_{n-1} + \dots + X_1, Y_n + \dots + Y_1 < X_n + \dots + X_1$. 由 $\{Y_i\}$ 独立同分布, $\{N = n\}$ 与 $Y_{n+1}, \dots$ 无关, 故 N 为 $Y_1, Y_2, \dots$ 的一个停时。从而由 Wald 方程可得

$$\mathbb{E}[B] = \frac{\mu_G}{1 - \lambda \mu_G} = \mathbb{E}[N] \mathbb{E}[Y_i] = \mathbb{E}[N] \cdot \mu_G.$$

$$\mathbb{E}[N] = \frac{1}{1 - \lambda \mu_G}.$$

即为一个忙期中服务过的顾客数的期望。

第6章

第六周作业

Exercise 6.1 (Ex 4.1)

一个商店对某种商品的库存用以下的 (s, S) 订货策略：若在一个时期开始时商店的供应量是 x ，则订货

$$\begin{cases} 0, & \text{若 } x \geq s \\ S - x, & \text{若 } x < s \end{cases}$$

订货立刻供应。每天的需求以概率 α_j 等于 j ，各天的需求是独立的。而不能立刻满足的需求就会失去。以 X_n 记在第 n 个时期结束时的存货水平。论证 $\{X_n, n \geq 1\}$ 是 Markov 链并计算它的转移概率。

解. 设第 n 个时期开始时，订货后的总供应量为 $Y_n = X_{n-1} + (S - X_{n-1})I_{\{X_{n-1} < s\}}$ 。记第 n 天的需求量为 D_n ，由题意可知 D_n 独立同分布，且 $P(D_n = j) = \alpha_j$ （应有 $\alpha_j = 0, \forall j < 0$ ）。

因为不能立刻满足的需求会失去，所以第 n 个时期结束时的存货水平为 $X_n = \max(0, Y_n - D_n)$ 。给定历史状态 $X_1 = i_1, \dots, X_{n-1} = i$ 时， X_n 的条件分布仅依赖于 X_{n-1} 的取值，即：

$$\begin{aligned} P(X_n = j \mid X_1 = i_1, \dots, X_{n-1} = i) \\ = P(\max(0, X_{n-1} + (S - X_{n-1})I_{\{X_{n-1} < s\}} - D_n) = j \mid X_{n-1} = i) = P(X_n = j \mid X_{n-1} = i). \end{aligned}$$

故 $\{X_n, n \geq 1\}$ 是 Markov 链。

其转移概率 $P_{ij} = P(X_n = j \mid X_{n-1} = i)$ 需分两种情况计算：

1. 当 $j > 0$ 时，期末有剩余库存，说明当期需求量 $D_n = i + (S - i)I_{\{i < s\}} - j$ ：

$$P_{ij} = P(D_n = i + (S - i)I_{\{i < s\}} - j) = \alpha_{i + (S - i)I_{\{i < s\}} - j}.$$

2. 当 $j = 0$ 时，期末库存为空，说明当期需求量大于等于订货后的总供应量，即 $D_n \geq i + (S - i)I_{\{i < s\}}$ ：

$$P_{i0} = P(D_n \geq i + (S - i)I_{\{i < s\}}) = \sum_{k=i+(S-i)I_{\{i < s\}}}^{\infty} \alpha_k.$$

Exercise 6.2 (Ex 4.2)

对 Markov 链证明，只要 $n_1 < n_2 < \dots < n_k < n$ ，就有

$$P\{X_n = j \mid X_{n_1} = i_1, \dots, X_{n_k} = i_k\} = P\{X_n = j \mid X_{n_k} = i_k\}.$$

证明. 先证 $\forall k < n$, $P(X_n = j \mid X_1 = j_1, \dots, X_k = j_k) = P(X_n = j \mid X_k = j_k)$.

当 $k = n - 1$ 时, 由 Markov 链的定义显然成立。

假设对给定 k 该式成立时时, 考虑向下递推:

$$\begin{aligned}
 & P(X_n = j \mid X_1 = j_1, \dots, X_{k-1} = j_{k-1}) \\
 &= \sum_{j_k} P(X_n = j \mid X_1 = j_1, \dots, X_k = j_k) P(X_k = j_k \mid X_1 = j_1, \dots, X_{k-1} = j_{k-1}) \\
 &= \sum_{j_k} P(X_n = j \mid X_k = j_k) P(X_k = j_k \mid X_{k-1} = j_{k-1}) \\
 &= \sum_{j_k} P(X_n = j, X_k = j_k \mid X_{k-1} = j_{k-1}) \\
 &= P(X_n = j \mid X_{k-1} = j_{k-1}).
 \end{aligned}$$

综上, $\forall k < n$, 有 $P(X_n = j \mid X_1 = j_1, \dots, X_k = j_k) = P(X_n = j \mid X_k = j_k)$.

再证 $P(X_n = j \mid X_{n_1} = i_1, \dots, X_{n_k} = i_k) = P(X_n = j \mid X_{n_k} = i_k)$, $\forall n_1 < \dots < n_k < n$.

利用上面已证的结论, 我们有:

$$\begin{aligned}
 & P(X_n = j \mid X_{n_1} = i_1, \dots, X_{n_k} = i_k) \\
 &= \sum_{\substack{(j_1, \dots, j_{n_k-1}) \\ j_{n_p} = i_p, \forall 1 \leq p \leq k}} P(X_n = j \mid X_1 = j_1, \dots, X_{n_k} = j_{n_k}). \\
 & P(X_1 = j_1, \dots, X_{n_1-1} = j_{n_1-1}, X_{n_1+1} = j_{n_1+1}, \dots, X_{n_k-1} = j_{n_k-1} \mid X_{n_1} = i_1, \dots, X_{n_k} = i_k) \\
 &= P(X_n = j \mid X_{n_k} = i_k) \sum_{\substack{(j_1, \dots, j_{n_k-1}) \\ j_{n_p} = i_p, \forall 1 \leq p \leq k}} P(X_1 = j_1, \dots, X_{n_k-1} = j_{n_k-1} \mid X_{n_1} = i_1, \dots, X_{n_k} = i_k) \\
 &= P(X_n = j \mid X_{n_k} = i_k).
 \end{aligned}$$

原命题得证。 □

第7章

第七周作业

Exercise 7.1 (Ex 4.10)

在每个时期的开始, N 个个体中的每一个处在三个可能的情况之一: 有传染性, 受感染但无传染性, 或未感染。若一个未感染的个体在一段时期变成受感染, 则它在该时期中处在受感染 (但没有传染性) 情况。在每个时期个体的 $\binom{N}{2}$ 对独立地以概率 p 相接触。若一对个体相接触, 且其中之一的成员有传染性, 而另一个未感染, 则未感染的人变成受感染 (于是在下一个时期的开始处在有传染性情况)。以 X_n 和 Y_n 分别记在第 n 个时期开始有传染性的个体数和未感染的个体数。

- (a) 若在一个时期的开始有 i 个有传染性的个体, 问一个指定的未感染的个体在此时期变成受感染的概率是多少?
- (b) $\{X_n, n \geq 0\}$ 是 Markov 链吗? 如果是, 给出它的转移概率。
- (c) $\{Y_n, n \geq 0\}$ 是 Markov 链吗? 如果是, 给出它的转移概率。
- (d) $\{(X_n, Y_n), n \geq 0\}$ 是 Markov 链吗? 如果是, 给出它的转移概率。

解. (a) 由题, 对一个指定的未感染个体来说, 它与每一个有传染性的个体都独立地以概率 p 接触, 因此它在这一时期内不与任何一个有传染性的个体接触的概率是 $(1-p)^i$. 于是该个体在这一时期变成受感染的概率为 $1 - (1-p)^i$.

(b) 若 $(X_n, Y_n) = (i, j)$, 设第 n 个时期内增加的感染的人数为 Z_n , 则每一个未感染个体在这一时期内变成受感染的概率都是 $1 - (1-p)^i$, 并且对不同未感染个体, 这些事件相互独立。故 $Z_n \sim B(j, 1 - (1-p)^i)$. 因此 $X_{n+1} = X_n + Z_n$ 并不只依赖于 X_n , 还依赖于 Y_n , 所以一般来说, $\{X_n, n \geq 0\}$ 不是 Markov 链。

(c) 若 $(X_n, Y_n) = (i, j)$, 由 (b) 有 $Z_n \sim B(j, 1 - (1-p)^i)$, 并且 $Y_{n+1} = Y_n - Z_n$. 因此 Y_{n+1} 同样不只依赖于 Y_n , 还依赖于 X_n , 所以一般来说, $\{Y_n\}$ 不是 Markov 链。

(d) 若 $(X_n, Y_n) = (i, j)$, 则由 (b)(c) 可知下一时刻的状态完全由这一时期中增加的感染的人数 Z_n 决定, 而这一人数的分布只依赖于 $(X_n, Y_n) = (i, j)$, 与过去的状态无关。且转移概率为

$$P_{(i,j),(k,l)} = \begin{cases} \binom{j}{l} (1 - (1-p)^i)^{j-l} ((1-p)^i)^l, & k+l = i+j = N, 0 \leq i \leq k \leq N \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

故 $\{(X_n, Y_n)\}$ 是 Markov 链, 且其状态空间可写为 $\{(i, j) : i \geq 0, j \geq 0, i+j = N\}$.

Exercise 7.2 (Ex 4.13)

证明正常返性和零常返性都是类性质。

证明. 设 i 与 j 在同一个互达等价类中。则存在 $m \in \mathbb{N}$ 使得 $P_{ij}^m > 0$ 。若 i 是正常返的，下面我们证明 j 也是正常返的。记 N_k 为第 k 次抵达 i 的时刻，考虑极限

$$\begin{aligned} & \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\text{前 } N_k + m \text{ 步中通过 } i \text{ 恰经 } m \text{ 步到达 } j \text{ 的次数}}{N_k + m} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\text{前 } N_k + m \text{ 步中通过 } i \text{ 恰经 } m \text{ 步到达 } j \text{ 的次数}}{k} \cdot \frac{k}{N_k + m}. \end{aligned}$$

对于第一项，由 Markov 性可知，每次抵达 i 以后，再恰好经过 m 步到达 j 的概率都是 P_{ij}^m ，因此这实际上相当于 k 次 Bernoulli 试验中的成功次数除以 k ，由大数定律知它收敛到 P_{ij}^m 。对于第二项，因为 i 是正常返的，所以相邻两次进入 i 所需的期望转移次数 μ_{ii} 有限，从而 $N_k/k \rightarrow \mu_{ii}$ ，于是 $k/(N_k + m) \rightarrow 1/\mu_{ii}$ 。故有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\text{前 } N_k + m \text{ 步中到达 } j \text{ 的次数}}{N_k + m} \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\text{前 } N_k + m \text{ 步中通过 } i \text{ 恰经 } m \text{ 步到达 } j \text{ 的次数}}{N_k + m} = \frac{P_{ij}^m}{\mu_{ii}}.$$

上式右端 > 0 ，于是结合更新理论与教材定理 4.3.1 可知 j 是正常返的。

而若 i 是零常返的，反设 j 不是零常返的，则由 i 与 j 互达， j 只能是正常返的，则由上述结论知 i 也正常返，这与 i 零常返矛盾。故 j 零常返。综上，正常返性和零常返性都是类性质。 $\square$

Exercise 7.3 (Ex 4.14)

证明有限个状态的 Markov 链没有零常返状态，而且并非所有状态都是暂态的。

证明. 先证有限个状态的 Markov 链没有零常返状态。反设存在零常返态 i ，则由上题知，零常返性是类性质，因此 i 所在的整个互达等价类 C 中的每个状态都是零常返的。由于 C 是一个封闭的类，所以对任意 $n \in \mathbb{N}$ ，都有 $\sum_{j \in C} P_{ij}^n = 1$ 。另一方面，由于 C 中每个状态都是零常返的，对每个 $j \in C$ 都有 $P_{ij}^n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ ，这是因为这个极限表示从 i 出发的 Markov 链的位于状态 j 的长程比例，而零常返态的长程比例当然是 0。由于求和是有限和，所以 $\sum_{j \in C} P_{ij}^n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ 。这与上式恒为 1 矛盾。因此有限个状态的 Markov 链没有零常返状态。

再证明并非所有状态都是暂态的。若所有状态都是暂态，则以概率为 1 地有，每个状态只会被抵达有限多次，于是有限多个暂态合起来也只會被抵达有限多次。但是一条 Markov 链会在无穷多个时刻取值，于是得到矛盾。综上结论成立。 $\square$

第8章

第八周作业

Exercise 8.1 (Ex 4.16)

一个人有 r 把雨伞，用于在她家和办公室之间来往。若一天开始时（结束时）她在家（办公室），而正在下雨，倘若有雨伞可拿，则她将拿一把雨伞去办公室（家）。若不在下雨，则从不拿雨伞。假定独立于过去的情形，一天开始时（结束时）下雨的概率为 p 。

(a) 定义一个有 $r+1$ 个状态的 Markov 链，它将帮助我们确定这个人被淋湿的时间比例。（注：若正在下雨而所有的雨伞都在她的另一个地点，则她将被淋湿。）

(b) 计算其极限概率。

(c) 这个人被淋湿的时间比例是多少？

解. (a) 令 X_n 表示第 n 次出发时，她所在地点的雨伞数。于是状态空间为

$$S = \{0, 1, \dots, r\}.$$

若出发时所在地点有 i 把雨伞，则另一地点有 $r-i$ 把雨伞。

若此时不下雨，概率为 $1-p$ ，她不带伞去另一地点，因此下一次出发时所在地点的雨伞数为 $r-i$ 。

若此时下雨且 $i \geq 1$ ，概率为 p ，她带一把伞去另一地点，因此下一次出发时所在地点的雨伞数为 $r-i+1$ 。

若此时下雨且 $i = 0$ ，她没有伞可拿，会被淋湿；但到达另一地点后，另一地点有全部 r 把伞，因此下一次出发时所在地点的雨伞数为 r 。

所以转移概率为

$$P_{i,r-i} = 1-p, 0 \leq i \leq r,$$

$$P_{i,r-i+1} = p, 1 \leq i \leq r.$$

特别地，当 $i = 0$ 时，

$$P_{0,r} = 1.$$

因此，题目要求的 Markov 链就是以

$X_n =$ 第 n 次出发时所在地点的雨伞数

为状态的链，其状态空间为 $\{0, 1, \dots, r\}$ ，转移概率如上所示。

(b) 设平稳分布为

$$\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_r).$$

由转移结构可得, 状态 0 只能由状态 r 在不下雨时转移而来, 因此

$$\pi_0 = (1-p)\pi_r.$$

对于 $1 \leq i \leq r$, 由对称的转移结构可推出

$$\pi_i = \pi_r, i = 1, 2, \dots, r.$$

因此

$$\pi_1 = \pi_2 = \dots = \pi_r.$$

又因为

$$\pi_0 + \pi_1 + \dots + \pi_r = 1,$$

所以

$$(1-p)\pi_r + r\pi_r = 1.$$

于是

$$\pi_r = \frac{1}{r+1-p}.$$

从而

$$\pi_i = \frac{1}{r+1-p}, i = 1, 2, \dots, r,$$

$$\pi_0 = \frac{1-p}{r+1-p}.$$

因此, 该 Markov 链的极限概率为

$$\pi_0 = \frac{1-p}{r+1-p}, \pi_i = \frac{1}{r+1-p}, i = 1, 2, \dots, r.$$

(c) 她被淋湿当且仅当出发时正在下雨且所在地点没有雨伞, 即 $X_n = 0$ 且下雨。因此长期被淋湿的时间比例为

$$p\pi_0 = p \cdot \frac{1-p}{r+1-p}.$$

所以, 这个人被淋湿的长期时间比例为

$$\frac{p(1-p)}{r+1-p}.$$

Exercise 8.2 (Ex 4.18)

工作按速率为 λ 的 Poisson 过程来到一个加工中心。然而只有 N 个工作等待空间, 故而是一个来到的工作遇到有 N 个工作在等待就不再进来。每天至多有一个工作得到加工, 而加工此工作必须在每天的开始, 于是若在每天开始有任何工作等待加工, 则其中之一就在这天加工, 而若在每天开始没有工作等待, 则在这天就没有工作加工。以 X_n 记在第 n 天的开始在中心的工作个数。

(a) 求 Markov 链 $\{X_n, n \geq 0\}$ 的转移概率。

(b) 这个链遍历吗? 请解释。

(c) 写出平稳概率的方程。

解. 令 A 表示一天内到达的工作数, 则

$$A \sim \text{Poisson}(\lambda).$$

记

$$q_k = P(A = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, k = 0, 1, 2, \dots$$

状态空间为

$$S = \{0, 1, \dots, N\}.$$

(a) 若 $X_n = 0$, 则第 n 天开始没有工作等待, 所以当天没有工作被加工。一天内新到达 A 个工作, 但系统最多容纳 N 个工作, 因此

$$X_{n+1} = \min\{A, N\}.$$

所以

$$P_{0j} = q_j, j = 0, 1, \dots, N-1,$$

$$P_{0N} = \sum_{k=N}^{\infty} q_k.$$

若 $X_n = i \geq 1$, 则当天开始时有工作等待, 于是当天加工掉一个工作。之后一天内新到达 A 个工作, 因此

$$X_{n+1} = \min\{i-1+A, N\}.$$

所以当 $i = 1, 2, \dots, N$ 时,

$$P_{ij} = q_{j-i+1}, j = i-1, i, \dots, N-1,$$

$$P_{iN} = \sum_{k=N-i+1}^{\infty} q_k.$$

其余转移概率均为0.

因此, Markov 链 $\{X_n, n \geq 0\}$ 的转移概率总结为

$$P_{0j} = q_j, j = 0, 1, \dots, N-1, P_{0N} = \sum_{k=N}^{\infty} q_k,$$

$$P_{ij} = q_{j-i+1}, i = 1, \dots, N, j = i-1, i, \dots, N-1,$$

$$P_{iN} = \sum_{k=N-i+1}^{\infty} q_k, i = 1, \dots, N,$$

其中

$$q_k = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

(b) 由于该链的状态空间有限, 并且当 $\lambda > 0$ 时, 从任一状态都有正概率逐步到达其他状态, 因此该链不可约。

同时, 由于

$$P_{00} = q_0 = e^{-\lambda} > 0,$$

所以状态 0 的周期为 1。有限不可约链中所有状态周期相同, 因此该链非周期。

有限、不可约、非周期的 Markov 链是遍历链。因此该链是遍历的。

(c) 设平稳分布为

$$\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_N).$$

平稳方程为

$$\pi_j = \sum_{i=0}^N \pi_i P_{ij}, j = 0, 1, \dots, N,$$

并且满足归一化条件

$$\sum_{j=0}^N \pi_j = 1.$$

更具体地, 对于 $j = 0, 1, \dots, N-1$, 有

$$\pi_j = \pi_0 q_j + \sum_{i=1}^{j+1} \pi_i q_{j-i+1}.$$

对于 $j = N$, 有

$$\pi_N = \pi_0 \sum_{k=N}^{\infty} q_k + \sum_{i=1}^N \pi_i \sum_{k=N-i+1}^{\infty} q_k.$$

再加上

$$\sum_{j=0}^N \pi_j = 1.$$

因此, 平稳概率由下列方程组确定:

$$\begin{cases} \pi_j = \pi_0 q_j + \sum_{i=1}^{j+1} \pi_i q_{j-i+1}, j = 0, 1, \dots, N-1, \\ \pi_N = \pi_0 \sum_{k=N}^{\infty} q_k + \sum_{i=1}^N \pi_i \sum_{k=N-i+1}^{\infty} q_k, \\ \sum_{j=0}^N \pi_j = 1. \end{cases}$$

Exercise 8.3 (Ex 4.21)

考虑状态为 $0, 1, 2, \dots$ 的 Markov 链, 它是

$$P_{i,i+1} = p_i = 1 - P_{i,i-1},$$

其中 $p_0 = 1$. 求使链正常返的这些 p_i 满足的充要条件, 并在此种情形计算极限概率。

解. 记

$$q_i = 1 - p_i, i \geq 1.$$

若该链存在平稳分布 $\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots)$, 因为它 $P_{i,i+1} + P_{i,i-1} = 1$ 的遍历链, 则有时间可逆性方程:

$$\pi_i p_i = \pi_{i+1} q_{i+1}$$

因此

$$\pi_{i+1} = \pi_i \frac{p_i}{q_{i+1}}.$$

递推可得

$$\pi_n = \pi_0 \frac{p_0 p_1 \cdots p_{n-1}}{q_1 q_2 \cdots q_n}, n \geq 1.$$

因为又 $\sum_{n=0}^{\infty} \pi_n = 1$, 带入上式:

$$\pi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \pi_0 a_n = \pi_0 \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_0 p_1 \cdots p_{n-1}}{q_1 q_2 \cdots q_n} \right) < \infty.$$

因此该链正常返的充要条件为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_0 p_1 \cdots p_{n-1}}{q_1 q_2 \cdots q_n} < \infty.$$

在此情形下, 令

$$C = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_0 p_1 \cdots p_{n-1}}{q_1 q_2 \cdots q_n}.$$

则极限概率为

$$\pi_0 = \frac{1}{C},$$

$$\pi_n = \frac{1}{C} \frac{p_0 p_1 \cdots p_{n-1}}{q_1 q_2 \cdots q_n}, n \geq 1.$$

Exercise 8.4 (Ex 4.31)

一只蜘蛛在地点 1 和地点 2 之间捕猎一只苍蝇, 蜘蛛从地点 1 出发, 按转移矩阵为 $\begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.3 & 0.7 \end{bmatrix}$

的 Markov 链移动。并未觉察蜘蛛的苍蝇从地点 2 出发, 按转移矩阵为 $\begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}$ 的 Markov 链移动。只要它们在同一地点相遇, 蜘蛛就捕获苍蝇, 而捕猎就结束。证明, 除非知道捕猎结束的地点, 这个捕猎的进展都可以用一个具有三个状态的 Markov 链描述, 其中一个吸收状态表示捕猎结束, 而其他两个状态蜘蛛和苍蝇在不同的地点。求此链的转移矩阵。

(a) 求在时刻 n 蜘蛛和苍蝇两者都在它们的初始地点的概率。

(b) 问捕猎的平均持续时间是多少?

解. 用 S_n 表示第 n 步蜘蛛的位置, 用 F_n 表示第 n 步苍蝇的位置。若 $S_n = F_n$, 则蜘蛛捕获苍蝇, 过程结束。

在未捕获时, 只可能有两个状态:

$$A = (S_n = 1, F_n = 2),$$

$$B = (S_n = 2, F_n = 1).$$

再加入吸收状态

$$C = \text{已经捕获}.$$

于是可以用状态空间

$$\{C, A, B\}$$

上的 Markov 链描述捕猎过程。

从状态 $A = (1, 2)$ 出发, 下一步捕获的概率为

$$P(S_{n+1} = F_{n+1} | A) = 0.7 \cdot 0.6 + 0.3 \cdot 0.4 = 0.54.$$

下一步仍在状态 A 的概率为

$$0.7 \cdot 0.4 = 0.28.$$

下一步转到状态 B 的概率为

$$0.3 \cdot 0.6 = 0.18.$$

同理, 从状态 $B = (2, 1)$ 出发, 下一步捕获的概率为

$$0.3 \cdot 0.4 + 0.7 \cdot 0.6 = 0.54.$$

下一步转到状态 A 的概率为

$$0.3 \cdot 0.6 = 0.18.$$

下一步仍在状态 B 的概率为

$$0.7 \cdot 0.4 = 0.28.$$

因此按状态顺序 (C, A, B) , 转移矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.54 & 0.28 & 0.18 \\ 0.54 & 0.18 & 0.28 \end{pmatrix}.$$

(a) 设 $a_n = P(X_n = A), b_n = P(X_n = B)$. 由于初始时刻蜘蛛在地点 1, 而苍蝇在地点 2, 所以有 $a_0 = 1, b_0 = 0$.

由转移矩阵有:

$$a_n = 0.28a_{n-1} + 0.18b_{n-1},$$

$$b_n = 0.18a_{n-1} + 0.28b_{n-1}.$$

两式相加, 得

$$a_n + b_n = 0.46(a_{n-1} + b_{n-1}).$$

由 $a_0 + b_0 = 1$, 得

$$a_n + b_n = 0.46^n.$$

两式相减, 得

$$a_n - b_n = 0.10(a_{n-1} - b_{n-1}).$$

由 $a_0 - b_0 = 1$, 得

$$a_n - b_n = 0.10^n.$$

所以

$$a_n = \frac{(a_n + b_n) + (a_n - b_n)}{2} = \frac{0.46^n + 0.10^n}{2}.$$

(b) 因为 T 服从参数为 0.54 的几何分布, 所以

$$\mathbb{E}[T] = \frac{1}{0.54} = \frac{50}{27}.$$

因此, 捕猎的平均持续时间为 $50/27$.

Exercise 8.5 (Ex 4.35)

考虑一个分支过程，每个个体的子裔数具有均值为 λ ($\lambda > 1$) 的 Poisson 分布。以 π_0 记从单个个体开始的群体迟早灭绝的概率。又令 a ($a < 1$) 使

$$ae^{-a} = \lambda e^{-\lambda}.$$

(a) 证明 $a = \lambda\pi_0$.

(b) 证明：在取条件于迟早灭绝时，这个分支过程，与单个个体的子裔数是均值为 a 的 Poisson 随机变量的分支过程，遵循相同的概率规律。

证明. 这是一个 Galton–Watson 分支过程。单个个体的子裔数服从均值为 λ 的 Poisson 分布，因此其概率母函数为

$$f(s) = e^{\lambda(s-1)}.$$

(a) 灭绝概率 π_0 是方程

$$s = f(s)$$

在区间 $[0, 1]$ 中的最小根。因此

$$\pi_0 = e^{\lambda(\pi_0-1)}.$$

题中给定 $a < 1$ ，且

$$ae^{-a} = \lambda e^{-\lambda}.$$

两边同除以 λ ，得

$$\frac{a}{\lambda} = e^{a-\lambda}.$$

令

$$\pi_0 = \frac{a}{\lambda}.$$

则

$$e^{\lambda(\pi_0-1)} = e^{\lambda(a/\lambda-1)} = e^{a-\lambda}.$$

又因为

$$\frac{a}{\lambda} = e^{a-\lambda},$$

所以

$$\pi_0 = e^{\lambda(\pi_0-1)}.$$

即 $\pi_0 = a/\lambda$ 确为灭绝方程在 $[0, 1]$ 中的根。由于 $\lambda > 1$ 时灭绝概率是该方程在 $[0, 1)$ 中的最小根，所以

$$\pi_0 = \frac{a}{\lambda}.$$

因此

$$\boxed{a = \lambda\pi_0}.$$

(b) 设一个个体的子裔数为 Z 。在条件灭绝事件下，若该个体有 k 个子裔，则这 k 个子分支过程

都必须最终灭绝。因此

$$P(Z = k \mid \text{最终灭绝}) = \frac{P(Z = k)\pi_0^k}{\pi_0}.$$

由 $Z \sim \text{Poisson}(\lambda)$, 有

$$P(Z = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

所以

$$P(Z = k \mid \text{最终灭绝}) = \frac{e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \pi_0^k}{\pi_0}.$$

利用灭绝方程

$$\pi_0 = e^{\lambda(\pi_0 - 1)},$$

得到

$$\frac{e^{-\lambda}}{\pi_0} = e^{-\lambda\pi_0}.$$

因此

$$P(Z = k \mid \text{最终灭绝}) = e^{-\lambda\pi_0} \frac{(\lambda\pi_0)^k}{k!}.$$

又由第一问知

$$\lambda\pi_0 = a.$$

所以

$$P(Z = k \mid \text{最终灭绝}) = e^{-a} \frac{a^k}{k!}.$$

这说明在给定最终灭绝条件下, 每个个体的子裔数服从均值为 a 的 Poisson 分布。

并且由于各个子分支过程相互独立, 条件在最终灭绝事件下, 后代分支仍然独立且服从相同的条件分布。因此, 在给定最终灭绝时, 该分支过程与一个子裔数服从 $\text{Poisson}(a)$ 的 Galton-Watson 分支过程具有相同的概率规律。 $\square$

第9章

第九周作业

Exercise 9.1 (Ex 4.39)

对例 4.3 (D) 中的 Markov 链, 求它的转移概率, 并证明它是时间可逆的。

证明. 先来计算转移概率, 通过取条件于最开始的 i 个个体还剩下多少个来计算:

$$P_{ij} = \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} (1-p)^k p^{i-k} \mathbf{1}_{j \geq k} \frac{\lambda^{j-k}}{(j-k)!} e^{-\lambda} = \sum_{k=0}^{\min(i,j)} \binom{i}{k} (1-p)^k p^{i-k} \frac{\lambda^{j-k}}{(j-k)!} e^{-\lambda}.$$

再来证明时间可逆, 我们有

$$\begin{aligned} \pi_i P_{ij} &= e^{-\lambda/p} \left(\frac{\lambda}{p}\right)^i \frac{1}{i!} \sum_{k=0}^{\min(i,j)} \binom{i}{k} (1-p)^k p^{i-k} \frac{\lambda^{j-k}}{(j-k)!} e^{-\lambda} \\ &= e^{-\lambda/p} \sum_{k=0}^{\min(i,j)} \frac{1}{i!} \frac{\lambda^i}{p^i} \frac{i!}{(i-k)!k!} (1-p)^k p^{i-k} \frac{\lambda^{j-k}}{(j-k)!} e^{-\lambda} \\ &= e^{-\lambda/p} \left(\frac{\lambda}{p}\right)^j \frac{1}{j!} \sum_{k=0}^{\min(i,j)} \binom{j}{k} (1-p)^k p^{j-k} \frac{\lambda^{i-k}}{(i-k)!} e^{-\lambda} = \pi_j P_{ji}. \end{aligned}$$

故此链时间可逆, 这样就完成了证明。 □

Exercise 9.2 (Ex 4.41)

一个质点沿在圆周上的 n 个地点 (与 n 相邻的地点是 $n-1$ 和 1) 之间移动。每一步或以概率 p 沿顺时针方向移动一个位置, 或以概率 $1-p$ 沿逆时针方向移动一个位置。

- (a) 求倒向链的转移概率。
- (b) 这个链是否时间可逆?

解. 不妨设 $n \geq 3$, 否则平凡。(a) 首先 $P_{ij}^* = \pi_j P_{ji} / \pi_i$. 所以只需求极限概率, 列出极限方程组:

$$\begin{cases} \pi_1 = \pi_2(1-p) + \pi_n p \\ \pi_i = \pi_{i+1}(1-p) + \pi_{i-1} p, 2 \leq i \leq n-1 \\ \pi_n = \pi_1(1-p) + \pi_{n-1} p \\ \pi_1 + \cdots + \pi_n = 1 \end{cases}$$

解得 $\pi_i = 1/n$. 所以倒向转移概率 $P_{ij}^* = P_{ji}$. 即 $P_{i,i+1}^* = 1-p, P_{i,i-1}^* = p$, 其中下标按模 n 理解。

(b) 时间可逆当且仅当 $P_{ij}^* = P_{ij}$, 即 $p = 1-p$. 于是当且仅当 $p = 1/2$ 时这个链是时间可逆的。

Exercise 9.3 (Ex 4.46)

以 $\{X_n, n \geq 1\}$ 记一个具有可数个状态的不可约 Markov 链。现在考虑一个只接受 Markov 链在 0 和 N 之间的值的新随机过程 $\{Y_n, n \geq 0\}$ 。即定义 Y_n 为 Markov 链在 0 和 N 之间的第 n 个值。例如, 若 $N = 3$ 且 $X_1 = 1, X_2 = 3, X_3 = 5, X_4 = 6, X_5 = 2$, 则 $Y_1 = 1, Y_2 = 3, Y_3 = 2$ 。

(a) $\{Y_n, n \geq 0\}$ 是否为 Markov 链? 简单解释之。

(b) 以 π_j 记 $\{X_n, n \geq 1\}$ 处在状态 j 的时间比例。如果对一切 j 有 $\pi_j > 0$, $\{Y_n, n \geq 0\}$ 处在 $0, 1, \dots, N$ 中每个状态的时间比例是多少?

(c) 如果 $\{X_n\}$ 是零常返的, 且以 $\pi_j(N)$ ($j = 0, \dots, N$) 记 $\{Y_n, n \geq 0\}$ 的长程比例。证明对 $j \neq i$ 有

$$\pi_j(N) = \pi_i(N) \mathbb{E}[\text{过程 } X \text{ 在回到 } i \text{ 之前处在 } j \text{ 的时间}].$$

(d) 用 (c) 论证, 在对称随机徘徊中, 在回到原点之前访问状态 i 的期望次数等于 1。

(e) 如果 $\{X_n, n \geq 0\}$ 是时间可逆的, 证明 $\{Y_n, n \geq 0\}$ 也是时间可逆的。

证明. (a) 是 Markov 链, 因为在给定 $Y_{n-1} = i$ 的条件下考虑 Y_n 的分布, 其实就是考虑在链 $\{X_n\}$ 里, 从 i 转移到 $[0, N]$ 中的状态的分布, 而我们有 X_n 是 Markov 链, 于是这只依赖于当前的状态 i , 而独立于所有过去的状态。故 $\{Y_n, n \geq 0\}$ 是 Markov 链。

(b) 也就是说在 1 个时间单位内处于 j 状态的时间是 π_j , 删去 $\{X_n\}$ 特有的状态就可以得到 $\{Y_n\}$ 所有状态总时间占比是 $\sum_{i=0}^N \pi_i$, 从而 $\{Y_n\}$ 处于状态 j 的时间比例是 $\pi_j / (\sum_{i=0}^N \pi_i)$ 。

(c) 由更新报酬过程理论可得

$$\pi_j(N) = \frac{\mathbb{E}[\text{两次访问 } i \text{ 之间访问 } j \text{ 的次数}]}{\mathbb{E}[\text{链 } Y_n \text{ 两次访问 } i \text{ 之间的时间}]}, \text{ 且我们有 } \pi_i(N) = \frac{1}{\mathbb{E}[\text{链 } Y_n \text{ 两次访问 } i \text{ 之间的时间}]}.$$

于是就得到 $\pi_j(N) = \pi_i(N) \mathbb{E}[\text{过程 } X \text{ 在回到 } i \text{ 之前处在 } j \text{ 的时间}]$ 。

(d) 对每个给定的 i , 在 (c) 中, 将链 $\{X_n\}$ 取为对称随机徘徊, 取 i 为 0 且将 j 替换为 i , 取 $N > i$, 则要证明期望为 1, 只需要证明链 $\{Y_n\}$ 每个状态的极限概率都相等。而由方程组:

$$\begin{cases} \pi_0 = \frac{1}{2}(\pi_0 + \pi_1), \pi_N = \frac{1}{2}(\pi_{N-1} + \pi_N) \\ \pi_k = \frac{1}{2}(\pi_{k-1} + \pi_{k+1}), 1 \leq k \leq N-1 \end{cases}$$

显然解是所有极限概率都相等, 代入 (c) 的结论就完成了证明。

(e) 首先 $\{X_n\}$ 时间可逆意味着 $\pi_i P_{ij}^X = \pi_j P_{ji}^X$ 。要证明 $\{Y_n\}$ 时间可逆, 也就是要证明 $\pi_i(N) P_{ij}^Y = \pi_j(N) P_{ji}^Y$ 。由于等式左右两边分别表示在链 $\{Y_n\}$ 中从状态 $i(j)$ 进入 $j(i)$ 的速率, 我们同时考虑在链 $\{X_n\}$ 中从状态 $i(j)$ 进入 $j(i)$ 的速率, 可以写出如下的等式, 其中 $P(k, j, N)$ 表示从 k 出发, 不经过任何落在 $[0, N]$ 中的状态, 最后抵达 j 的概率:

$$\begin{aligned} \pi_i(N) P_{ij}^Y &= \pi_i(N) P_{ij}^X + \pi_i(N) \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus [0, N]} P_{ik} P(k, j, N), \\ \pi_j(N) P_{ji}^Y &= \pi_j(N) P_{ji}^X + \pi_j(N) \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus [0, N]} P_{jk} P(k, i, N). \end{aligned}$$

两式右边的第一项显然相等, 因为 $\pi_k(N)$ 实际上就是我们在 (b) 中求出的时间比例, 其与在链 $\{X_n\}$ 中的长程比例 π_k 仅差一个常数倍。至于两式的第二项, 一个是对所有正向路径的概率求和, 另一个是对所有逆向路径的概率求和, 而链 $\{X_n\}$ 是时间可逆的, 故由定理 4.7.2 可知相等。□

Exercise 9.4 (Ex 4.50)

一个出租车交替行驶在三个地点之间。当它到达地点 1 时，它下一次等可能地驶向 2 或 3。当它到达地点 2 时，它下一次以概率 $1/3$ 驶向 1，而以概率 $2/3$ 驶向 3。从 3 它总是驶向 1。在地点 i 和 j 之间的平均时间是 $t_{12} = 20, t_{13} = 30, t_{23} = 30$ ($t_{ij} = t_{ji}$)。

(a) 出租车最近停在地点 i ($i = 1, 2, 3$) 的(极限)概率是多少?

(b) 出租车前往地点 2 的(极限)概率是多少?

(c) 出租车从 2 前往 3 的行程所占的时间比例是多少? 注: 在到达一个地点时出租车立刻离开。

解. (a) 记地点 i 为状态 i ，则转移概率为:

$$P_{11} = 0, P_{12} = P_{13} = \frac{1}{2}, P_{21} = \frac{1}{3}, P_{22} = 0, P_{23} = \frac{2}{3}, P_{31} = 1, P_{32} = P_{33} = 0.$$

于是转移概率矩阵为:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

而 $(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)P$ ，则 $\pi_1 = \pi_2/3 + \pi_3, \pi_2 = \pi_1/2, \pi_3 = \pi_1/2 + 2\pi_2/3$ ，且 $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$ 。则 $\pi_1 = 3/7, \pi_2 = 3/14, \pi_3 = 5/14$ 。而 $\mu_1 = P_{12}t_{12} + P_{13}t_{13} = 25, \mu_2 = P_{21}t_{21} + P_{23}t_{23} = 80/3, \mu_3 = P_{31}t_{31} = 30$ 。则由定理 4.8.3 可知 $P_i = \pi_i \mu_i / (\sum_j \pi_j \mu_j)$ 。并且

$$\pi_1 \mu_1 = \frac{3}{7} \cdot 25 = \frac{75}{7}, \pi_2 \mu_2 = \frac{3}{14} \cdot \frac{80}{3} = \frac{40}{7}, \pi_3 \mu_3 = \frac{5}{14} \cdot 30 = \frac{75}{7}, \sum_j \pi_j \mu_j = \frac{190}{7}.$$

于是计算得到

$$P_1 = \frac{15}{38}, P_2 = \frac{4}{19}, P_3 = \frac{15}{38}.$$

即为出租车最近停在地点 1, 2, 3 的极限概率。

(b) 由习题 4.48 (c)，所求极限概率为

$$\frac{P_{12}\eta_{12}}{\mu_{11}} + \frac{P_{22}\eta_{22}}{\mu_{22}} + \frac{P_{32}\eta_{32}}{\mu_{33}} = \frac{P_{12}t_{12}}{\mu_{11}}.$$

而 $P_1 = \mu_1/\mu_{11}, \mu_{11} = \mu_1/P_1 = 190/3$ 。则

$$\frac{1}{\mu_{11}} P_{12} t_{12} = \frac{3}{19}.$$

故出租车前往地点 2 的极限概率为 $3/19$ 。

(c) 仍由习题 4.48 (c)，所求极限概率为

$$\frac{P_{23}\eta_{23}}{\mu_{22}} = \frac{P_{23}t_{23}}{\mu_{22}}.$$

而 $P_2 = \mu_2/\mu_{22}, \mu_{22} = \mu_2/P_2 = 380/3$ 。则

$$\frac{P_{23}t_{23}}{\mu_{22}} = \frac{3}{19}.$$

故出租车从 2 前往 3 的行程所占时间比例为 $3/19$ 。

Exercise (补充: Ex 4.48)

对遍历的半 Markov 过程:

(a) 计算过程从 i 到 j 的转移的速率。

(b) 证明

$$\sum_i P_{ij}/\mu_{ii} = 1/\mu_{jj}.$$

(c) 证明过程处在状态 i 且前往状态 j 的时间比例是 $P_{ij}\eta_{ij}/\mu_{ii}$, 其中 $\eta_{ij} = \int_0^\infty \bar{F}_{ij}(t)dt$.

(d) 证明: 状态是 i 且在时间 x 内的下一个状态是 j 的时间比例是

$$\frac{P_{ij}\eta_{ij}}{\mu_{ii}} F_{ij}^e(x),$$

其中 F_{ij}^e 是 F_{ij} 的平衡分布。

证明. (a) 定义一个(延迟)更新报酬过程(当过程从状态 i 开始时为更新报酬过程) $\{N(t), t \geq 0\}$, 每当过程转移至状态 i 视为一次更新。每个循环中的报酬

$$R_n = \begin{cases} 1, & \text{循环中出现从 } i \text{ 到 } j \text{ 的转移,} \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

则 $\mathbb{E}[R_n] = P\{\text{循环中出现从 } i \text{ 到 } j \text{ 的转移}\}$, 而这只能发生于更新时刻后的下一次转移, 故 $\mathbb{E}[R_n] = P_{ij}$. 循环平均时间 $\mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[T_{ii}] = \mu_{ii}$. 以 $R_{ij}(t)$ 记直至时刻 t 出现 i 到 j 的转移的次数, 则

$$\sum_{n=1}^{N(t)} R_n \leq R_{ij}(t) \leq \sum_{n=1}^{N(t)} R_n + 1.$$

由定理 3.6.1 有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{n=1}^{N(t)} R_n = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \left(\sum_{n=1}^{N(t)} R_n + 1 \right) = \frac{\mathbb{E}[R_n]}{\mathbb{E}[X_n]} = \frac{P_{ij}}{\mu_{ii}}.$$

则

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{R_{ij}(t)}{t} = \frac{P_{ij}}{\mu_{ii}}.$$

即为过程从 i 到 j 的转移的速率。

(b) 以 $R_j(t)$ 记直至时刻 t 访问 j 的次数, 则 $R_j(t) = \sum_{i=0}^\infty R_{ij}(t)$. 由 (a) 有

$$\sum_i \frac{P_{ij}}{\mu_{ii}} = \sum_i \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{R_{ij}(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{R_j(t)}{t}.$$

若以每次访问 j 为一次更新, 则由命题 3.5.1

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{R_j(t)}{t} = \frac{1}{\mathbb{E}[T_{jj}]} = \frac{1}{\mu_{jj}} \Rightarrow \sum_i \frac{P_{ij}}{\mu_{ii}} = \frac{1}{\mu_{jj}}.$$

(c) 仍取 (a) 中定义的过程, 但每个循环中的报酬改为

$$R_n = \begin{cases} T_{ij}^n, & \text{循环中出现从 } i \text{ 到 } j \text{ 的转移,} \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

其中 T_{ij}^n 为在第 n 个循环中出现从 i 到 j 的转移的条件下, 该次转移所需时间, 则有

$$\mathbb{E}[R_n] = P_{ij} \cdot \mathbb{E}[T_{ij}] = P_{ij} \int_0^\infty \bar{F}_{ij}(t)dt = P_{ij}\eta_{ij}, \quad \mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[T_{ii}] = \mu_{ii}.$$

以 $R_{ij}(t)$ 记直至时刻 t 的报酬, 则

$$\sum_{n=1}^{N(t)} R_n \leq R_{ij}(t) \leq \sum_{n=1}^{N(t)+1} R_n.$$

而由定理 3.6.1 的证明过程可知

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{n=1}^{N(t)} R_n = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{n=1}^{N(t)+1} R_n = \frac{\mathbb{E}[R_n]}{\mathbb{E}[T_{ii}]} = \frac{P_{ij}\eta_{ij}}{\mu_{ii}}.$$

于是就有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{R_{ij}(t)}{t} = \frac{P_{ij}\eta_{ij}}{\mu_{ii}}.$$

即过程处在状态 i 且前往状态 j 的时间比例为 $P_{ij}\eta_{ij}/\mu_{ii}$.

(d) 与 (c) 同理, 将每个循环中的报酬改为

$$R_n = \begin{cases} \min(x, T_{ij}^n), & \text{循环中出现从 } i \text{ 到 } j \text{ 的转移,} \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

则 $\mathbb{E}[R_n] = P_{ij}\mathbb{E}[\min(x, T_{ij}^n)]$. 而

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\min(x, T_{ij}^n)] &= \int_0^x y dF_{ij}(y) + \int_x^\infty x dF_{ij}(y) \\ &= x\bar{F}_{ij}(x) + \int_0^x y dF_{ij}(y) = x - xF_{ij}(x) + \int_0^x y dF_{ij}(y) \\ &= x - \int_0^x F_{ij}(y) dy = \int_0^x (1 - F_{ij}(y)) dy = \int_0^x \bar{F}_{ij}(y) dy = \eta_{ij} F_{ij}^c(x). \end{aligned}$$

则 $\mathbb{E}[R_n] = P_{ij}\eta_{ij}F_{ij}^c(x)$, $\mathbb{E}[X_n] = \mu_{ii}$. 则与 (c) 同理可得所求时间比例为 $P_{ij}\eta_{ij}F_{ij}^c(x)/\mu_{ii}$. $\square$

Exercise 9.5 (Ex 5.1)

一个生物群体由雄性和雌性成员组成。在一个小的群落中, 任一指定的雄性成员与任一指定的雌性成员在任意长度为 h 的时间区间内以概率 $\lambda h + o(h)$ 交配。每次交配立刻等可能地地产生一个雄性或雌性子裔。以 $N_1(t)$ 和 $N_2(t)$ 分别记群体中在时刻 t 雄性和雌性成员的个数。导出连续时间的 Markov 链 $\{N_1(t), N_2(t)\}$ 的参数。

解. 由题知群体只有出生没有死亡, 所以实际上只需要计算类似于出生率的参数, 以记号 (m, n) 表示 $(N_1(t) = m, N_2(t) = n)$, 则由题意有 $q_{(m,n),(m+1,n)} = q_{(m,n),(m,n+1)}$. 且这个转移速率为 $\lambda mn/2$. 其余非对角元均为 0, 而对角元通过行和为 0 确定, 即 $q_{(m,n),(m,n)} = -\lambda mn$.

Exercise 9.6 (Ex 5.2)

假设一个单细胞生物体可以处在两种状态—— A 或 B 之一。在状态 A 的一个个体以指数速率 α 转变为状态 B , 在状态 B 的一个个体以指数速率 β 分裂为两个 A 型个体。对这个生物群定义一个合适的连续时间 Markov 链, 并确定此模型的参数。

解. 记 $N_1(t)$ 与 $N_2(t)$ 分别为在 t 时刻处于状态 A 和状态 B 的个体数, 以记号 (m, n) 表示 $(N_1(t) = m, N_2(t) = n)$, 并令 $N(t) = (N_1(t), N_2(t))$. 则 $N(t)$ 为一个合适的连续时间 Markov 链, 转移速率为 $q_{(m,n),(m-1,n+1)} = m\alpha$, $q_{(m,n),(m+2,n-1)} = n\beta$. 其余非对角元均为 0, 而对角元通过行和为 0 确定, 即 $q_{(m,n),(m,n)} = -m\alpha - n\beta$.

第10章

第十周作业

Exercise 10.1 (Ex 5.4)

对出生参数为 $\lambda_n (n \geq 0)$ 的纯生过程, 计算这个群体的规模从 0 到 N 所需时间的均值、方差和矩母函数。

解. 设纯生过程为 $X(t)$, 出生参数为 $\lambda_n, n \geq 0$. 群体从规模 $i-1$ 到 i 所需时间记为 $S_i, i \geq 1$. 则从 0 到 N 所需时间为

$$T_N = S_1 + \cdots + S_N.$$

由纯生过程的定义可知, $S_i (i \geq 1)$ 都是相互独立的, 且

$$S_i \sim \text{Exp}(\lambda_{i-1}).$$

因此

$$\mathbb{E}S_i = \frac{1}{\lambda_{i-1}}, \text{Var}(S_i) = \frac{1}{\lambda_{i-1}^2}.$$

并且 S_i 的矩母函数为

$$M_{S_i}(\theta) = \mathbb{E}(e^{\theta S_i}) = \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_{i-1} - \theta}, \theta < \lambda_{i-1}.$$

所以可直接得到

$$\begin{aligned} \mathbb{E}T_N &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{\lambda_{i-1}}, \\ \text{Var}(T_N) &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{\lambda_{i-1}^2}. \end{aligned}$$

又因为 $S_1, \dots, S_N$ 相互独立, 所以

$$M_{T_N}(\theta) = \mathbb{E}(e^{\theta T_N}) = \prod_{i=1}^N \mathbb{E}(e^{\theta S_i}) = \prod_{i=1}^N \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_{i-1} - \theta}, \theta < \min_{0 \leq n \leq N-1} \lambda_n.$$

Exercise 10.2 (Ex 5.5)

考虑一个 $X(0) = i$ 的 Yule 过程。在给定 $X(t) = i + k$ 时, 对在 $(0, t)$ 中出生的 k 个个体的出生时间的条件分布, 你能说些什么?

解. 设 Yule 过程出生率为

$$\lambda_n = n\lambda,$$

并且 $X(0) = i$. 给定

$$X(t) = i + k,$$

即假设在 $(0, t)$ 中出生的 k 个个体的出生时刻分别为

$$0 < S_1 < S_2 < \cdots < S_k < t.$$

则

$$P(S_1 \in ds_1, \cdots, S_k \in ds_k, X(t) = i + k)$$

在 $0 < s_1 < \cdots < s_k < t$ 上正比于

$$i\lambda e^{-i\lambda s_1} (i+1)\lambda e^{-(i+1)\lambda(s_2-s_1)} \cdots (i+k-1)\lambda e^{-(i+k-1)\lambda(s_k-s_{k-1})} e^{-(i+k)\lambda(t-s_k)}.$$

化简指数部分得

$$-i\lambda s_1 - (i+1)\lambda(s_2-s_1) - \cdots - (i+k-1)\lambda(s_k-s_{k-1}) - (i+k)\lambda(t-s_k) = \lambda(s_1 + \cdots + s_k) - (i+k)\lambda t.$$

因此, 在给定 $X(t) = i + k$ 后, $(S_1, \cdots, S_k)$ 的条件密度在区域 $0 < s_1 < \cdots < s_k < t$ 上正比于

$$\exp\{\lambda(s_1 + \cdots + s_k)\}.$$

由此可知, 给定 $X(t) = i + k$ 后, 在 $(0, t)$ 中出生的 k 个个体的出生时刻的条件分布, 为 k 个独立同分布随机变量的次序统计量。这些随机变量具有相同的密度

$$f(x) = \frac{\lambda e^{-\lambda(t-x)}}{1 - e^{-\lambda t}}, 0 < x < t,$$

其余为0. 等价地, 也可以写为

$$f(x) = \frac{\lambda e^{\lambda x}}{e^{\lambda t} - 1}, 0 < x < t.$$

并且可以说在给定 $X(t) = i + k$ 后, 这 k 个出生时刻的条件分布与初始个体数 i 无关。

Exercise 10.3 (Ex 5.7)

考虑从一个个体开始的 Yule 过程, 并且假设在时刻 s 出生的个体以概率 $P(s)$ 是健康的。计算在 $(0, t)$ 中出生的健康个体数的分布。

解. 考虑从一个个体开始的 Yule 过程, 即

$$X(0) = 1, \lambda_n = n\lambda.$$

设 $H(t)$ 表示在 $(0, t)$ 中出生的健康个体数。又记

$$K = X(t) - 1$$

为在 $(0, t)$ 中出生的个体总数。

由 Yule 过程的分布可知

$$P(K = k) = P(X(t) = k + 1) = e^{-\lambda t} (1 - e^{-\lambda t})^k, k = 0, 1, 2, \cdots$$

另一方面, 由上一题可知, 在给定 $K = k$ 后, 这 k 个出生时刻的无序版本为 k 个独立同分布随机变量, 其公共密度为

$$f(s) = \frac{\lambda e^{-\lambda(t-s)}}{1 - e^{-\lambda t}}, 0 < s < t.$$

等价地,

$$f(s) = \frac{\lambda e^{\lambda s}}{e^{\lambda t} - 1}, 0 < s < t.$$

因此, 给定 $K = k$ 后, 一个出生个体为健康的概率为

$$p_t = \int_0^t P(s)f(s)ds = \int_0^t P(s)\frac{\lambda e^{\lambda s}}{e^{\lambda t} - 1}ds.$$

于是

$$H(t) \mid K = k \sim B(k, p_t).$$

所以对 $m = 0, 1, 2, \dots$, 有

$$P(H(t) = m) = \sum_{k=m}^{\infty} P(H(t) = m \mid K = k)P(K = k).$$

即

$$P(H(t) = m) = \sum_{k=m}^{\infty} \binom{k}{m} p_t^m (1 - p_t)^{k-m} e^{-\lambda t} (1 - e^{-\lambda t})^k.$$

令

$$A(t) = \int_0^t \lambda e^{\lambda s} P(s) ds.$$

由于

$$p_t = \frac{A(t)}{e^{\lambda t} - 1},$$

化简上式可得

$$P(H(t) = m) = \frac{1}{1 + A(t)} \left(\frac{A(t)}{1 + A(t)} \right)^m, m = 0, 1, 2, \dots$$

因此, 在 $(0, t)$ 中出生的健康个体数

$$H(t) \sim \text{Geo} \left(\frac{1}{1 + A(t)} \right) - 1,$$

其中

$$A(t) = \int_0^t \lambda e^{\lambda s} P(s) ds.$$

第 11 章

第十一周作业

Exercise 11.1 (Ex 5.20)

假定一个生物群体中的个体以指数速率 λ 出生，且以指数速率 μ 死亡。此外由于移民，存在一个增加的指数速率 θ 。然而，在群体的规模为 N 或更大时，移民就不再允许。

(a) 将此建立为一个生灭模型。

(b) 若 $N = 3, \theta = \lambda = 1, \mu = 2$ ，确定移民受限制的时间的比例。

解. (a) 只需要确定出生率和死亡率即可，显然有出生率为 $\lambda_n = n\lambda + \theta, 0 \leq n < N$ ，及 $\lambda_n = n\lambda, n \geq N$ ，而死亡率为 $\mu_n = n\mu, n \geq 1$ 。

(b) 即确定极限情况下群体个体数 $\geq N$ 的时间比例，这需要计算生灭链的极限概率。直接列出极限方程 $\lambda_0 P_0 = \mu_1 P_1, (\lambda_n + \mu_n) P_n = \mu_{n+1} P_{n+1} + \lambda_{n-1} P_{n-1}, n \geq 1$ 。由教材 5.5 节结论知

$$P_0 = \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \cdots \mu_n} \right]^{-1}, P_n = \frac{\lambda_0 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \cdots \mu_n} P_0.$$

直接计算知对 $0 \leq n \leq 2$ 有 $\lambda_n / \mu_{n+1} = 1/2$ ，对 $n \geq 3$ 有 $\lambda_n / \mu_{n+1} = n/(2(n+1))$ ，所以有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \cdots \mu_n} = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2^4} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2^5} + \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{2^6} + \cdots$$

而通过 $\ln(1-x)$ 的泰勒展开式可以得到

$$-3 \ln(1 - \frac{1}{2}) = 3 \cdot \frac{1}{2^1} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{3}{3} \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2^4} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2^5} + \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{2^6} + \cdots$$

把上面的两个式子相减可以得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \cdots \mu_n} = 3 \ln 2 - \frac{9}{8}.$$

也就是说 $P_0 = 1/(3 \ln 2 - 1/8), P_1 = P_0/2, P_2 = P_0/4$ 。所以移民受限制的时间的比例为

$$\sum_{n=3}^{\infty} P_n = 1 - P_0 - P_1 - P_2 = 1 - \frac{7}{4} P_0 = \frac{24 \ln 2 - 15}{24 \ln 2 - 1}.$$

Exercise 11.2 (Ex 5.21)

有一个美发员的美发店至多有两个顾客的空间，潜在顾客以每小时 3 人的 Poisson 速率到达，而服务时间是均值为 $1/4$ 小时的独立指数随机变量。

(a) 店中顾客的平均数是多少？

(b) 进入店的潜在顾客的比例是多少?

(c) 若美发员的工作速度提高一倍, 她多做了多少生意?

解. (a) 记 $X(t)$ 为时刻 t 系统中顾客数, 则显然有 $\{X(t), t \geq 0\}$ 为生灭过程. 出生率为 $\lambda_n = 3, n = 0, 1$, 及 $\lambda_n = 0, n = 2, 3, \dots$, 死亡率为 $\mu_n = 4, n = 1, 2$. 则

$$P_0 = \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n} \right]^{-1} = \left(1 + \frac{3}{4} + \frac{9}{16} \right)^{-1} = \frac{16}{37}.$$

且 $P_1 = (\lambda_0/\mu_1)P_0 = 12/37, P_2 = (\lambda_1/\mu_2)P_1 = 9/37$. 而 P_i 为状态 i 的长程比例, 故店中顾客平均数为 $0 \cdot P_0 + 1 \cdot P_1 + 2 \cdot P_2 = 12/37 + 18/37 = 30/37$.

(b) 当且仅当美发店有空位时顾客才能进店, 故进入店的潜在顾客的比例即为店中有空位的时间比例, 即 $P_0 + P_1 = 28/37$.

(c) 此时 $\mu_n = 8, n = 1, 2, P'_0 = [1 + 3/8 + 9/64]^{-1} = 64/97, P'_1 = (\lambda_0/\mu_1)P'_0 = 24/97, P'_2 = 9/97$. 则顾客进店速率的增量为 $\lambda(P'_0 + P'_1 - P_0 - P_1) = 1620/3589 \approx 0.4514$, 即为单位时间内 (每小时) 多做的生意。

Exercise 11.3 (Ex 5.22)

求 $M/M/s$ 系统的极限分布, 并且确定它们存在需要的条件。

解. 记 $X(t)$ 为 t 时刻系统中人数, 则 $\{X(t), t \geq 0\}$ 为一个生灭过程. 其出生率为 $\lambda_n = \lambda, n \geq 0$, 死亡率为 $\mu_n = n\mu, 1 \leq n \leq s$, 及 $\mu_n = s\mu, n > s$. 由教材 5.5 节结论知, 极限分布存在所需要的条件为如下的级数收敛:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \cdots \mu_n} = \sum_{n=1}^s \frac{\lambda^n}{n! \mu^n} + \sum_{n=s+1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{s! \mu^s (s\mu)^{n-s}}.$$

前一项有限, 只需考虑后一项. 当 $\lambda/(s\mu) \geq 1$ 时有

$$\sum_{n=s+1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{s! \mu^s (s\mu)^{n-s}} = \frac{s^s}{s!} \sum_{n=s+1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu s} \right)^n \geq \frac{s^s}{s!} \sum_{n=s+1}^{\infty} 1 = +\infty.$$

而当 $\lambda/(s\mu) < 1$ 时, 由上式可知后一项收敛, 故极限分布存在的条件是 $\lambda/(s\mu) < 1$. 且此时

$$\begin{aligned} P_0 &= \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n} \right]^{-1} = \left[1 + \sum_{n=1}^s \frac{\lambda^n}{n! \mu^n} + \frac{s^s \left(\frac{\lambda}{\mu s} \right)^{s+1}}{s! \left(1 - \frac{\lambda}{\mu s} \right)} \right]^{-1} \\ &= \left(\sum_{n=0}^s \frac{\lambda^n}{n! \mu^n} + \frac{\lambda^{s+1}}{s! \mu^s (\mu s - \lambda)} \right)^{-1}, P_n = \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n} P_{n-1}, n \geq 1. \end{aligned}$$

其中 P_n 为过程处在状态 n 的长程比例, 也即为 $M/M/s$ 系统的极限分布。

Exercise 11.4 (Ex 5.28)

N 个顾客移动在 r 条服务线之间. 服务线 i 的服务时间是速率为 μ_i 的指数随机变量. 而在顾客离开服务线 i 时, 他以概率 $1/(r-1)$ 加入服务线 j ($j \neq i$) 的队列 (如果队列有人, 不然就进入服务). 当在服务线 i ($i = 1, \dots, r$) 有 n_i 个顾客时, 令系统的状态为 $(n_1, \dots, n_r)$. 证明对应的连续时间 Markov 链是时间可逆的, 并求极限概率。

证明. 设系统状态为 $\underline{n} = (n_1, \dots, n_r)$, 由题有 $n_1 + \dots + n_r = N$. 若 $n_i > 0$, 则服务线 i 完成服务的速率为 μ_i , 且完成服务后顾客以概率 $1/(r-1)$ 转入服务线 j ($j \neq i$), 故 $q(\underline{n}, \underline{n} - e_i + e_j) = \mu_i/(r-1)$, $n_i > 0, j \neq i$. 其余非对角转移速率为 0, 对角元通过行和为 0 确定. 而为了证明时间可逆, 我们希望等式 $P(\underline{n})q(\underline{n}, \underline{m}) = P(\underline{m})q(\underline{m}, \underline{n})$ 成立, 其中 $\underline{m} = \underline{n} - e_i + e_j$. 代入转移速率:

$$P(\underline{n}) \frac{\mu_i}{r-1} = P(\underline{m}) \frac{\mu_j}{r-1} \Rightarrow \frac{P(\underline{m})}{P(\underline{n})} = \frac{\mu_i}{\mu_j}.$$

于是令 $P(\underline{k}) = C \prod_{i=1}^r \mu_i^{-k_i}$, 其中 $\underline{k} = (k_1, \dots, k_r)$, $k_1 + \dots + k_r = N, k_i \geq 0$, 归一化得到

$$C^{-1} = \sum_{k_1 + \dots + k_r = N, k_i \geq 0} \prod_{i=1}^r \mu_i^{-k_i}.$$

容易验证 $P(\underline{n})q(\underline{n}, \underline{m}) = P(\underline{m})q(\underline{m}, \underline{n})$. 以及 $\sum_{\underline{k}} P(\underline{k}) = 1$. 于是该连续时间 Markov 链是时间可逆的, 又由该链状态空间有限且不可约知极限概率存在并等于上述 $P(\underline{k})$. $\square$

Exercise 11.5 (Ex 5.29)

考虑一个具有参数 ν_i, P_{ij} , 极限概率 P_j ($j \geq 0$) 的时间可逆的连续时间 Markov 链. 选择某个状态 (比如状态 0) 且考虑使 0 成为吸收态的新的 Markov 链. 即重取 ν_0 等于 0. 假设现在对按速率为 λ 的 Poisson 过程选取的时间点, 都以概率 P_{0j} 取初值 j 开始一个如上类型的 Markov 链 (以 0 作为吸收态). 假定所有存在的链都是独立的. 以 $N_j(t)$ 记在时刻 t 处在状态 j ($j > 0$) 的链的个数.

(a) 论证: 若没有初始链, 则 $N_j(t), j > 0$ 都是独立的 Poisson 随机变量.

(b) 在稳态情形论证向量过程 $\{(N_1(t), N_2(t), \dots)\}$ 是时间可逆的, 具有平稳概率

$$P(\underline{n}) = \prod_{j=1}^{\infty} e^{-a_j} \frac{a_j^{n_j}}{n_j!}, \text{ 对 } \underline{n} = (n_1, n_2, \dots),$$

其中 $a_j = \lambda P_j / (P_0 \nu_0)$.

证明. (a) 无初始链时, 新链以速率为 λ 的 Poisson 过程产生. 给定一条在时刻 s 产生的链, 它在时刻 t 处于状态 j 的概率只依赖于 $t-s$, 记为 $p_j(t-s)$. 于是截至时刻 t 产生的链可以按时刻 t 所处状态 $1, 2, \dots$ 和吸收态 0 进行分类. 由 Poisson 过程的分类性质知 $N_j(t), j > 0$ 相互独立, 且都是 Poisson 随机变量, 均值分别为 $\lambda \int_0^t p_j(t-s) ds = \lambda \int_0^t p_j(u) du$.

(b) 在状态 $\underline{n} = (n_1, n_2, \dots)$ 下, 可能的转移有三类: 第一类是新链进入状态 $j > 0$, 即 $\underline{n} \rightarrow \underline{n} + e_j$, 速率为 λP_{0j} . 第二类是已有链从 $i > 0$ 转到 $j > 0$, 即 $\underline{n} \rightarrow \underline{n} - e_i + e_j$, 速率为 $n_i \nu_i P_{ij}$. 第三类是已有链从 $j > 0$ 转到吸收态 0, 即 $\underline{n} \rightarrow \underline{n} - e_j$, 速率为 $n_j \nu_j P_{j0}$. 令 $P(\underline{n}) = \prod_{j=1}^{\infty} e^{-a_j} a_j^{n_j} / n_j!$, 其中 $a_j = \lambda P_j / (P_0 \nu_0)$. 下面验证时间可逆性方程.

先看内部转移, 对 $i, j > 0, i \neq j$, 原链时间可逆给出 $P_i \nu_i P_{ij} = P_j \nu_j P_{ji}$, 故 $a_i \nu_i P_{ij} = a_j \nu_j P_{ji}$. 若 $\underline{m} = \underline{n} - e_i + e_j$, 则 $P(\underline{m})(n_j + 1) \nu_j P_{ji} = P(\underline{n}) n_i (a_j / a_i) \nu_j P_{ji} = P(\underline{n}) n_i \nu_i P_{ij}$. 即 $P(\underline{n})q(\underline{n}, \underline{m}) = P(\underline{m})q(\underline{m}, \underline{n})$. 再看进入与吸收, 原链时间可逆给出 $P_0 \nu_0 P_{0j} = P_j \nu_j P_{j0}$, 故 $a_j \nu_j P_{j0} = \lambda P_{0j}$. 于是 $P(\underline{n}) \lambda P_{0j} = P(\underline{n}) a_j \nu_j P_{j0} = P(\underline{n} + e_j) (n_j + 1) \nu_j P_{j0}$. 即 $P(\underline{n})q(\underline{n}, \underline{n} + e_j) = P(\underline{n} + e_j)q(\underline{n} + e_j, \underline{n})$. 同时容易验证 $\sum_{\underline{n}} P(\underline{n}) = 1$. 因此 $P(\underline{n})$ 满足时间可逆性方程, 从而向量过程 $\{(N_1(t), N_2(t), \dots)\}$ 是时间可逆的, 并且具有平稳概率 $P(\underline{n})$. $\square$

第12章

第十二周作业

Exercise 12.1 (Ex 6.1)

若 $\{Z_n, n \geq 1\}$ 是鞅, 证明对 $1 \leq k < n$ 有

$$\mathbb{E}[Z_n | Z_1, \dots, Z_k] = Z_k.$$

解. 记 $\mathcal{F}_n = \sigma(Z_1, \dots, Z_n)$. 由于 $\{Z_n, n \geq 1\}$ 是鞅, 故对任意 $m \geq 2$ 有

$$\mathbb{E}[Z_m | \mathcal{F}_{m-1}] = Z_{m-1}.$$

于是由条件期望的塔式性质, 当 $1 \leq k < n$ 时,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Z_n | Z_1, \dots, Z_k] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[Z_n | Z_1, \dots, Z_{n-1}] | Z_1, \dots, Z_k] \\ &= \mathbb{E}[Z_{n-1} | Z_1, \dots, Z_k] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[Z_{n-1} | Z_1, \dots, Z_{n-2}] | Z_1, \dots, Z_k] \\ &= \mathbb{E}[Z_{n-2} | Z_1, \dots, Z_k] \\ &= \dots \\ &= \mathbb{E}[Z_{k+1} | Z_1, \dots, Z_k] \\ &= Z_k.\end{aligned}$$

因此

$$\mathbb{E}[Z_n | Z_1, \dots, Z_k] = Z_k, 1 \leq k < n.$$

Exercise 12.2 (Ex 6.2)

对鞅 $\{Z_n, n \geq 1\}$, 令 $X_i = Z_i - Z_{i-1} (i \geq 1)$, 其中 $Z_0 = 0$. 证明

$$\text{Var}(Z_n) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i).$$

解. 令 $\mathcal{F}_n = \sigma(Z_1, \dots, Z_n)$. 由 $X_i = Z_i - Z_{i-1}$ 以及 $Z_0 = 0$ 知,

$$Z_n = \sum_{i=1}^n X_i,$$

且 $\sigma(X_1, \dots, X_n) = \sigma(Z_1, \dots, Z_n)$.

对 $j \geq 2$, 由鞅性有

$$\mathbb{E}[X_j | \mathcal{F}_{j-1}] = \mathbb{E}[Z_j - Z_{j-1} | \mathcal{F}_{j-1}] = \mathbb{E}[Z_j | \mathcal{F}_{j-1}] - Z_{j-1} = 0.$$

从而

$$\mathbb{E}[X_j] = \mathbb{E}\{E[X_j | \mathcal{F}_{j-1}]\} = 0, j \geq 2.$$

再取 $1 \leq i < j \leq n$, 由于 X_i 关于 $\mathcal{F}_{j-1}$ 可测, 故

$$\mathbb{E}[X_i X_j] = \mathbb{E}\{X_i \mathbb{E}[X_j | \mathcal{F}_{j-1}]\} = 0.$$

又 $j \geq 2$ 时 $\mathbb{E}[X_j] = 0$, 所以

$$\text{Cov}(X_i, X_j) = \mathbb{E}[X_i X_j] - \mathbb{E}[X_i] \mathbb{E}[X_j] = 0.$$

因此 $X_1, \dots, X_n$ 两两不相关。于是

$$\begin{aligned} \text{Var}(Z_n) &= \text{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{Cov}(X_i, X_j) \\ &= \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i). \end{aligned}$$

Exercise 12.3 (Ex 6.4)

考虑一个 Markov 链, 每次转移, 它或者以概率 p 向右一步, 或者以概率 $1-p$ 向左一步。论证 $(q/p)^{S_n} (n \geq 1)$ 是鞅。

解. 设 $q = 1 - p$, 并假定 $0 < p < 1$. 记 S_n 为第 n 步后所在的位置, 且令

$$X_n = S_n - S_{n-1} = \begin{cases} 1, & \text{以概率 } p, \\ -1, & \text{以概率 } q. \end{cases}$$

取 $\mathcal{F}_n = \sigma(S_0, S_1, \dots, S_n)$, 并令

$$M_n = \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n}.$$

则

$$S_n = S_{n-1} + X_n.$$

由于 X_n 与 $\mathcal{F}_{n-1}$ 独立, 故

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[M_n | \mathcal{F}_{n-1}] &= \mathbb{E}\left[\left(\frac{q}{p}\right)^{S_n} \middle| \mathcal{F}_{n-1}\right] = \mathbb{E}\left[\left(\frac{q}{p}\right)^{S_{n-1} + X_n} \middle| \mathcal{F}_{n-1}\right] \\ &= \left(\frac{q}{p}\right)^{S_{n-1}} \mathbb{E}\left[\left(\frac{q}{p}\right)^{X_n} \middle| \mathcal{F}_{n-1}\right] = \left(\frac{q}{p}\right)^{S_{n-1}} \left[p \left(\frac{q}{p}\right)^1 + q \left(\frac{q}{p}\right)^{-1}\right] \\ &= \left(\frac{q}{p}\right)^{S_{n-1}} \left[p \frac{q}{p} + q \frac{p}{q}\right] = \left(\frac{q}{p}\right)^{S_{n-1}} (q + p) \\ &= \left(\frac{q}{p}\right)^{S_{n-1}} = M_{n-1}. \end{aligned}$$

因此

$$\left\{\left(\frac{q}{p}\right)^{S_n}, n \geq 1\right\}$$

是一个鞅。特别地, 当 $p = q$ 时, 有 $M_n \equiv 1$, 显然也是鞅。

Exercise 12.4 (Ex 6.6)

以 $X(n)$ 记一个分支过程第 n 代的规模, 而以 π_0 记由一个个体开始的这种过程迟早消失的概率。证明 $\{\pi_0^{X_n}, n \geq 0\}$ 是鞅。

解. 设每个个体的子代数分布为

$$P(\xi = j) = p_j, j = 0, 1, 2, \dots$$

其概率母函数为

$$f(s) = \mathbb{E}[s^\xi] = \sum_{j=0}^{\infty} p_j s^j.$$

由分支过程灭绝概率的性质知, 从一个个体开始迟早消失的概率 π_0 满足

$$\pi_0 = f(\pi_0) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j \pi_0^j.$$

记 $\mathcal{F}_n = \sigma(X(0), X(1), \dots, X(n))$. 给定第 n 代规模 $X(n)$ 后, 第 $n+1$ 代规模可写为

$$X(n+1) = \sum_{i=1}^{X(n)} \xi_i,$$

其中 $\xi_1, \dots, \xi_{X(n)}$ 为相互独立且与过去无关的子代数随机变量, 且均与 ξ 同分布。于是

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\pi_0^{X(n+1)} | \mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}\left[\pi_0^{\sum_{i=1}^{X(n)} \xi_i} \middle| \mathcal{F}_n\right] = \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{X(n)} \pi_0^{\xi_i} \middle| \mathcal{F}_n\right] = \prod_{i=1}^{X(n)} \mathbb{E}[\pi_0^{\xi_i}] \\ &= \left(\mathbb{E}[\pi_0^\xi]\right)^{X(n)} = \left(\sum_{j=0}^{\infty} p_j \pi_0^j\right)^{X(n)} \\ &= f(\pi_0)^{X(n)} = \pi_0^{X(n)}. \end{aligned}$$

因此

$$\{\pi_0^{X(n)}, n \geq 0\}$$

是一个鞅。

Exercise 12.5 (Ex 6.7)

令 $X_1, \dots$ 是均值为 0 和方差为 σ^2 的独立同分布的随机变量序列。再令 $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. 证明当 $Z_n = S_n^2 - n\sigma^2$ 时 $\{Z_n, n \geq 1\}$ 是一个鞅。

解. 令

$$\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n), S_n = \sum_{i=1}^n X_i.$$

由于 $X_1, X_2, \dots$ 独立同分布, 且

$$\mathbb{E}[X_n] = 0, \text{Var}(X_n) = \sigma^2,$$

故

$$\mathbb{E}[X_n^2] = \sigma^2.$$

令

$$Z_n = S_n^2 - n\sigma^2.$$

因为

$$S_n = S_{n-1} + X_n,$$

所以

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Z_n | \mathcal{F}_{n-1}] &= \mathbb{E}[S_n^2 - n\sigma^2 | \mathcal{F}_{n-1}] \\ &= \mathbb{E}[(S_{n-1} + X_n)^2 - n\sigma^2 | \mathcal{F}_{n-1}] \\ &= \mathbb{E}[S_{n-1}^2 + 2S_{n-1}X_n + X_n^2 - n\sigma^2 | \mathcal{F}_{n-1}] \\ &= S_{n-1}^2 + 2S_{n-1}\mathbb{E}[X_n | \mathcal{F}_{n-1}] + \mathbb{E}[X_n^2 | \mathcal{F}_{n-1}] - n\sigma^2.\end{aligned}$$

又 X_n 与 $\mathcal{F}_{n-1}$ 独立, 故

$$\mathbb{E}[X_n | \mathcal{F}_{n-1}] = \mathbb{E}[X_n] = 0,$$

并且

$$\mathbb{E}[X_n^2 | \mathcal{F}_{n-1}] = \mathbb{E}[X_n^2] = \sigma^2.$$

于是

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Z_n | \mathcal{F}_{n-1}] &= S_{n-1}^2 + \sigma^2 - n\sigma^2 \\ &= S_{n-1}^2 - (n-1)\sigma^2 \\ &= Z_{n-1}.\end{aligned}$$

因此

$$\{Z_n, n \geq 1\}$$

是一个鞅。

Exercise 12.6 (Ex 6.10)

连续掷一个以概率 p 出现正面的硬币。利用鞅论推理计算直至下述序列出现时的期望投掷数

(a) HHTTHHT

(b) HTHTHTH

解. (a) 以 N_1 记直至 HHTTHHT 出现的时间。

如设想有一系列赌徒, 每人开始以 1 个单位赌资在一个公平的赌博中参与赌博, 按照 HHTTHHT 的顺序依次下注 (因为赌局公平, 所以 H 和 T 的赔率分别为 p^{-1} 和 $(1-p)^{-1}$), 每次都赌上手上所有赌资, 直至赌资归 0。

设 $\{X_n, n \geq 1\}$ 为第 n 次后赌场现有的总赢利, 则有 $\{X_n, n \geq 1\}$ 为均值始终为 0 的鞅。因此

$$X_{N_1} = N_1 - p^{-4}(1-p)^{-3} - p^{-2}(1-p)^{-1}.$$

由于 $\mathbb{E}X_{N_1} = 0$, 所以

$$\mathbb{E}N_1 = p^{-4}(1-p)^{-3} + p^{-2}(1-p)^{-1}.$$

(b) 以 N_2 记直至 HTHTHTH 出现的时间。

同理于 (a) 时设想, 则有

$$X_{N_2} = N_2 - p^{-4}(1-p)^{-3} - p^{-3}(1-p)^{-2} - p^{-2}(1-p)^{-1} - p^{-1}.$$

由于 $\mathbb{E}X_{N_2} = 0$, 所以

$$\mathbb{E}N_2 = p^{-4}(1-p)^{-3} + p^{-3}(1-p)^{-2} + p^{-2}(1-p)^{-1} + p^{-1}.$$

Exercise 12.7 (Ex 6.11)

考虑在每次参赌时以等可能地赢 1 个单位或输 1 个单位的一个赌徒。假定该赌徒在当他或者赢 A ，或者输 B 时离开博弈， $A > 0, B > 0$ 。用一个合适的鞅证明期望赌资数是 AB 。

解. 设每次赌博的输赢为

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{以概率 } 1/2, \\ -1, & \text{以概率 } 1/2, \end{cases}$$

且 $X_1, X_2, \dots$ 相互独立。令

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i, S_0 = 0,$$

表示第 n 次赌博后的累计赢利。设停止时刻为

$$T = \min\{n : S_n = A \text{ 或 } S_n = -B\}.$$

这里默认 A, B 为正整数，则需证明

$$\mathbb{E}[T] = AB.$$

由于 $\{S_n, n \geq 0\}$ 是鞅，并且

$$Z_n = S_n^2 - n$$

也是鞅。事实上，

$$\mathbb{E}[Z_{n+1} | X_1, \dots, X_n] = \mathbb{E}[S_{n+1}^2 - (n+1) | X_1, \dots, X_n],$$

而

$$S_{n+1} = S_n + X_{n+1}.$$

故

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S_{n+1}^2 | X_1, \dots, X_n] &= \mathbb{E}[(S_n + X_{n+1})^2 | X_1, \dots, X_n] \\ &= S_n^2 + 2S_n \mathbb{E}[X_{n+1} | X_1, \dots, X_n] + \mathbb{E}[X_{n+1}^2 | X_1, \dots, X_n] \\ &= S_n^2 + 1. \end{aligned}$$

因此

$$\mathbb{E}[Z_{n+1} | X_1, \dots, X_n] = S_n^2 + 1 - (n+1) = S_n^2 - n = Z_n,$$

所以 $\{S_n^2 - n, n \geq 0\}$ 是鞅。

对有界停止时刻 $T \wedge n = \max\{T, n\}$ 应用停止定理，有

$$\mathbb{E}[S_{T \wedge n}^2 - (T \wedge n)] = \mathbb{E}[S_0^2] = 0.$$

于是

$$\mathbb{E}[T \wedge n] = \mathbb{E}[S_{T \wedge n}^2].$$

注意到

$$-B \leq S_{T \wedge n} \leq A,$$

故

$$S_{T \wedge n}^2 \leq \max\{A^2, B^2\}.$$

所以

$$\mathbb{E}[T \wedge n] \leq \max\{A^2, B^2\}.$$

令 $n \rightarrow \infty$, 由单调收敛定理可知 $\mathbb{E}[T] < \infty$, 且 $T < \infty$ 几乎必然成立。

下面计算到达 A 和 $-B$ 的概率。设

$$p = P(S_T = A).$$

由于 $\{S_n\}$ 是鞅, 对 $T \wedge n$ 用停止定理得

$$\mathbb{E}[S_{T \wedge n}] = \mathbb{E}[S_0] = 0.$$

令 $n \rightarrow \infty$, 由有界收敛定理得

$$\mathbb{E}[S_T] = 0.$$

因此

$$Ap + (-B)(1 - p) = 0.$$

解得

$$p = \frac{B}{A+B}, \quad 1-p = \frac{A}{A+B}.$$

再由 $\mathbb{E}[T] = \mathbb{E}[S_T^2]$ 可得

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[T] &= A^2 P(S_T = A) + B^2 P(S_T = -B) \\ &= A^2 \frac{B}{A+B} + B^2 \frac{A}{A+B} \\ &= \frac{A^2 B + AB^2}{A+B} \\ &= AB. \end{aligned}$$

因此该赌徒离开博弈前的期望赌博次数为

$$\mathbb{E}[T] = AB.$$

Exercise 12.8 (Ex 6.13)

令 $Z_n = \prod_{i=1}^n X_i$, 其中 $X_i (i \geq 1)$ 是独立的随机变量, 具有

$$P\{X_i = 2\} = P\{X_i = 0\} = \frac{1}{2}$$

令 $N = \min\{n : Z_n = 0\}$. 问鞅停止定理是否可用? 如果是, 你能得到什么结论? 如果否, 说明为什么?

解. 令

$$Z_n = \prod_{i=1}^n X_i,$$

其中 X_i 相互独立, 且

$$P(X_i = 2) = P(X_i = 0) = \frac{1}{2}.$$

又令

$$N = \min\{n : Z_n = 0\}.$$

因为

$$Z_n = 0 \iff \text{至少有一个 } X_i = 0,$$

所以

$$N = \min\{n : X_n = 0\}.$$

因此 N 服从参数为 $\frac{1}{2}$ 的几何分布, 即

$$P(N = n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n, n = 1, 2, \dots.$$

从而

$$P(N < \infty) = 1.$$

先说明 $\{Z_n\}$ 是鞅。取

$$\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n).$$

由于

$$Z_{n+1} = Z_n X_{n+1},$$

且 X_{n+1} 与 $\mathcal{F}_n$ 独立, 所以

$$\mathbb{E}[Z_{n+1} | \mathcal{F}_n] = Z_n \mathbb{E}[X_{n+1}] = Z_n \left(2 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2}\right) = Z_n.$$

故 $\{Z_n\}$ 是鞅。

下面检查课本定理 6.2.2 中的三个条件。

(i) 检查 Z_n 是否一致有界。

在事件

$$\{X_1 = 2, \dots, X_n = 2\}$$

上, 有

$$Z_n = 2^n.$$

而该事件的概率为

$$P(X_1 = 2, \dots, X_n = 2) = \left(\frac{1}{2}\right)^n > 0.$$

所以对任意大的常数 M , 只要取 n 足够大, 就有可能出现

$$Z_n = 2^n > M.$$

因此 $\{Z_n\}$ 不是一致有界的, 条件 (i) 不满足。

(ii) 检查 N 是否有界。

虽然

$$P(N < \infty) = 1,$$

但这并不表示 N 有界。对任意 m , 有

$$P(N > m) = P(X_1 = 2, \dots, X_m = 2) = \left(\frac{1}{2}\right)^m > 0.$$

也就是说, 无论 m 取多大, N 仍然有正概率大于 m 。因此不存在常数 M 使得

$$N \leqslant M \text{ a.s.}$$

所以 N 不是有界的, 条件 (ii) 不满足。

(iii) 检查是否有

$$\mathbb{E}[N] < \infty$$

且存在常数 $M < \infty$ 使得

$$\mathbb{E}[|Z_{n+1} - Z_n| \mid Z_1, \dots, Z_n] < M.$$

首先, 由于 N 服从参数为 $\frac{1}{2}$ 的几何分布, 所以

$$\mathbb{E}[N] = \frac{1}{1/2} = 2 < \infty.$$

但是第二个要求不满足。

因为

$$Z_{n+1} - Z_n = Z_n(X_{n+1} - 1).$$

又由于

$$P(X_{n+1} = 2) = P(X_{n+1} = 0) = \frac{1}{2},$$

所以

$$|X_{n+1} - 1| = 1.$$

于是

$$|Z_{n+1} - Z_n| = |Z_n||X_{n+1} - 1| = Z_n.$$

从而

$$\mathbb{E}[|Z_{n+1} - Z_n| \mid Z_1, \dots, Z_n] = Z_n.$$

但 Z_n 不是一致有界的。例如在事件

$$\{X_1 = \dots = X_n = 2\}$$

上,

$$Z_n = 2^n.$$

因此不存在常数 $M < \infty$ 使得对所有 n 都有

$$\mathbb{E}[|Z_{n+1} - Z_n| \mid Z_1, \dots, Z_n] < M.$$

所以条件 (iii) 也不满足。

综上, 课本定理 6.2.2 中的三个条件:

(i) Z_n 一致有界, (ii) N 有界, (iii) $\mathbb{E}[N] < \infty$ 且增量条件有界

在本题中均不满足。因此, 不能对停止时刻 N 直接使用鞅停止定理。

如果错误地使用鞅停止定理, 就会得到

$$\mathbb{E}[Z_N] = \mathbb{E}[Z_1].$$

但是

$$Z_N = 0,$$

所以

$$\mathbb{E}[Z_N] = 0.$$

另一方面,

$$\mathbb{E}[Z_1] = \mathbb{E}[X_1] = 2 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

于是会推出 $0 = 1$, 这显然是错误的。

第13章

第十三周作业

Exercise 13.1 (Ex 6.24)

考虑独立地投掷硬币的序列, 而令 $P\{\text{正面}\}$ 是每次投掷出正面的概率。令 A 为假设 $P\{\text{正面}\} = a$, 而 B 为假设 $P\{\text{正面}\} = b$, $0 < a, b < 1$. 以 X_i 记第 i 次投掷的结果, 并令

$$Z_n = \frac{P\{X_1, \dots, X_n \mid A\}}{P\{X_1, \dots, X_n \mid B\}}.$$

证明若 B 正确, 则

- (a) $\{Z_n\}$ 是一个鞅, 而且
- (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n$ 以概率为 1 地存在。
- (c) 若 $b \neq a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n$ 是什么?

证明. (a) 不妨令 $X_i = \mathbf{1}_{\{\text{第 } i \text{ 次投掷出正面}\}}$, 由投掷硬币序列独立, 我们有

$$\mathbb{E}[Z_{n+1} \mid Z_1, \dots, Z_n] = Z_n \mathbb{E} \left[\frac{P(X_{n+1} \mid A)}{P(X_{n+1} \mid B)} \right].$$

且由于 B 正确, 得

$$\mathbb{E}[Z_{n+1} \mid Z_1, \dots, Z_n] = Z_n \mathbb{E} \left[\frac{a^{X_{n+1}}(1-a)^{1-X_{n+1}}}{b^{X_{n+1}}(1-b)^{1-X_{n+1}}} \right] = Z_n \left(\frac{a}{b} \cdot b + \frac{1-a}{1-b} \cdot (1-b) \right) = Z_n.$$

并且有

$$\mathbb{E}[|Z_n|] = \mathbb{E}[Z_n] = \mathbb{E}[Z_1] = \mathbb{E} \left[\frac{a^{X_1}(1-a)^{1-X_1}}{b^{X_1}(1-b)^{1-X_1}} \right] = 1 < \infty, \forall n \in \mathbb{N}^+.$$

故 $\{Z_n, n \geq 1\}$ 是一个鞅。

(b) 由 (a) 知 $\mathbb{E}[|Z_n|] = 1$ 对 $\forall n \in \mathbb{N}^+$ 成立, 由鞅收敛定理, $\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n$ 以概率为 1 地存在且有限。

(c) 取 $h(X)$ 满足 $h(1) = a/b$, $h(0) = (1-a)/(1-b)$, 则 $P(h(X_{n+1}) = a/b) = b$, $P(h(X_{n+1}) = (1-a)/(1-b)) = 1-b$. 于是 $Z_{n+1} = h(X_{n+1})Z_n$, $\ln Z_{n+1} = \ln Z_n + \ln h(X_{n+1})$, 并且有

$$Z_1 = \frac{a^{X_1}(1-a)^{1-X_1}}{b^{X_1}(1-b)^{1-X_1}} = h(X_1) \Rightarrow \ln Z_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \ln h(X_k).$$

而由强大数律, 我们有

$$\frac{\ln Z_{n+1}}{n+1} \rightarrow \mathbb{E}[\ln h(X_k)] = \mathbb{E}[\ln h(X_1)] = b \ln \left(\frac{a}{b} \right) + (1-b) \ln \left(\frac{1-a}{1-b} \right) \triangleq t.$$

而 $f(x) = \ln x$ 为严格凹函数, 且 $b \neq a$, 故

$$t < \ln \left(b \cdot \frac{a}{b} + (1-b) \cdot \frac{1-a}{1-b} \right) = \ln 1 = 0.$$

而 $\ln Z_n = nt + o(n)$, 则 $Z_n = e^{nt+o(n)}$. 由于 $t < 0$, 故 $n \rightarrow \infty$ 时 $Z_n \rightarrow 0$. 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n = 0$. $\square$

Exercise 13.2 (Ex 6.25)

令 $Z_n (n \geq 1)$ 是随机变量列, 使 $Z_1 \equiv 1$, 且在给定 $Z_1, \dots, Z_{n-1}$ 时, Z_n 是均值为 $Z_{n-1} (n > 1)$ 的 Poisson 随机变量. 对很大的 n , 我们能对 Z_n 说些什么?

解. 显然 $\{Z_n\}$ 是一个鞅. 又 $Z_n \geq 0$, 故 $\{Z_n, n \geq 1\}$ 是非负鞅. 由鞅收敛定理, $\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n$ 以概率为 1 地存在且有限. 故对很大的 n , 我们有 Z_n 几乎必然收敛到某个有限极限 Z_∞ . 并且由于每个 Z_n 均取非负整数值, 在满测集 $A = \{\omega \in \Omega : Z_n(\omega) \rightarrow Z_\infty(\omega) < \infty\}$ 上, 整数列 $\{Z_n(\omega)\}$ 收敛, 则最终必稳定. 也就是说, 对每个 $\omega \in A$, 存在 $N(\omega)$ 与 $m \in \mathbb{N}$, 使得当 $n \geq N(\omega)$ 时恒有 $Z_n(\omega) = m$. 而对固定的 N 与 $m \geq 1$, 记 $B_{N,m} = \{Z_k = m, \forall k \geq N\}$. 记 $q_m = P(Z_{N+1} = m | Z_N = m) = e^{-m} m^m / m!$, 则 $0 < q_m < 1$. 对任意的 $r \geq 1$, 有 $P(Z_N = m, Z_{N+1} = m, \dots, Z_{N+r} = m) = P(Z_N = m) q_m^r \leq q_m^r$. 而 $B_{N,m} \subset \{Z_N = m, Z_{N+1} = m, \dots, Z_{N+r} = m\}$ 对任意 $r \geq 1$ 成立, 故 $P(B_{N,m}) \leq q_m^r, \forall r \geq 1$. 令 $r \rightarrow \infty$, 由 $0 < q_m < 1$ 可知 $P(B_{N,m}) = 0$. 又由 N, m 在可数集合中取值, 故 $\{Z_n\}$ 几乎必然不可能最终稳定在任何正整数 m 上. 于是唯一可能的有限极限为 0, 从而 Z_n 几乎必然收敛于 0.

Exercise 13.3 (Ex 8.1)

令 $Y(t) = tX(1/t)$.

- $Y(t)$ 的分布是什么?
- 计算 $\text{Cov}(Y(s), Y(t))$.
- 论证 $\{Y(t), t \geq 0\}$ 也是 Brown 运动。
- 令

$$T = \inf\{t > 0 : X(t) = 0\}.$$

利用 (c) 证明

$$P(T = 0) = 1.$$

证明. (a) 首先, 由于 $\{X(t), t \geq 0\}$ 为 Brown 运动过程, 则它也是 Gauss 过程, 故对一切 $t_1, \dots, t_n$, $(X(1/t_1), \dots, X(1/t_n))$ 具有多元正态分布, 故 $(Y(t_1), \dots, Y(t_n)) = (t_1 X(1/t_1), \dots, t_n X(1/t_n))$ 也具有多元正态分布, 故 $\{Y(t), t \geq 0\}$ 为 Gauss 过程. 又 $\mathbb{E}[Y(t)] = t\mathbb{E}[X(1/t)] = 0$, 且 $0 < s \leq t$ 时, 有 $1/t \leq 1/s$, 此时 $\text{Cov}(Y(s), Y(t)) = st \text{Cov}(X(1/s), X(1/t)) = st \cdot 1/t = s$. 故 $\{Y(t), t \geq 0\}$ 是一个 Brown 运动过程, 故 $Y(t) \sim N(0, t)$.

(b)(c) 由 (a) 可知 $\text{Cov}(Y(s), Y(t)) = \min(s, t)$, 并且 $\{Y(t), t \geq 0\}$ 为 Brown 运动过程。

(d) 任取 $\varepsilon > 0$, 则有 $T > \varepsilon$ 等价于对任意 $t \in (0, \varepsilon]$ 有 $X(t) \neq 0$, 则等价于对任意 $u \in [1/\varepsilon, +\infty)$ 有 $uX(1/u) = Y(u) \neq 0$. 而 $\{Y(t), t \geq 0\}$ 为 Brown 运动, 结合教材 8.2 节结论可知 $P(T_a < \infty) = 1, \forall a \in \mathbb{R}$. 其中 T_a 为 Brown 运动 $\{Y(t)\}$ 首次击中 a 的时刻. 取 $a = 0$ 可知从任意时刻以后 $\{Y(t)\}$ 几乎必然在有限时间内击中 0. 于是 $P(T > \varepsilon) = P(Y(u) \neq 0, \forall u \in [1/\varepsilon, +\infty)) = 0$. 而 $T \geq 0$, 由 ε 的任意性可知 $P(T = 0) = 1$. $\square$

Exercise 13.4 (Ex 8.2)

对 $a > 0$, 令 $W(t) = X(a^2 t)/a$. 验证 $W(t)$ 也是 Brown 运动。

证明. 首先显然 $\{W(t), t \geq 0\}$ 是 Gauss 过程, 且 $\mathbb{E}[W(t)] = \mathbb{E}[X(a^2t)]/a = 0$. 对 $s \leq t$ 有

$$\text{Cov}(W(s), W(t)) = \frac{1}{a^2} \text{Cov}(X(a^2s), X(a^2t)) = \frac{1}{a^2} \cdot a^2s = s.$$

因此 $\{W(t), t \geq 0\}$ 也是 Brown 运动过程。□

Exercise 13.5 (Ex 8.3)

给定 $X(t_1) = A, X(t_2) = B$, 其中 $t_1 < s < t_2$, 计算 $X(s)$ 的条件分布。

解. 首先我们有

$$P(X(t+s) - X(s) = x) = f_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-x^2/(2t)}.$$

由 Brown 运动有独立增量和平稳增量, 可得 $X(s)$ 的条件密度为

$$\begin{aligned} p_{X(s)|(X(t_1), X(t_2))}(x | (A, B)) &= \frac{p_{(X(s), X(t_2))|X(t_1)}((x, B) | A)}{p_{X(t_2)|X(t_1)}(B | A)} = \frac{f_{s-t_1}(x-A)f_{t_2-s}(B-x)}{f_{t_2-t_1}(B-A)} \\ &= C \exp \left(-\frac{t_2-t_1}{2(t_2-s)(s-t_1)} \left(x - \frac{A(t_2-s) + B(s-t_1)}{t_2-t_1} \right)^2 \right). \end{aligned}$$

这说明其条件分布是正态分布

$$N \left(\frac{A(t_2-s) + B(s-t_1)}{t_2-t_1}, \frac{(t_2-s)(s-t_1)}{t_2-t_1} \right).$$

Exercise 13.6 (Ex 8.4)

以 $\{Z(t), t \geq 0\}$ 记 Brown 桥过程。证明若

$$X(t) = (t+1)Z(t/(t+1)),$$

则 $\{X(t), t \geq 0\}$ 是 Brown 运动过程。

证明. 由 $\{Z(t), t \geq 0\}$ 是 Brown 桥过程, 则其也为 Gauss 过程。从而对一切 $t_1, \dots, t_n$, $(Z(t_1/(t_1+1)), \dots, Z(t_n/(t_n+1)))$ 具有多元正态分布, 则 $(X(t_1), \dots, X(t_n)) = ((t_1+1)Z(t_1/(t_1+1)), \dots, (t_n+1)Z(t_n/(t_n+1)))$ 也具有多元正态分布。故 $\{X(t), t \geq 0\}$ 为 Gauss 过程。且我们有 $\mathbb{E}[X(t)] = (t+1)\mathbb{E}[Z(t/(t+1))] = (t+1) \cdot 0 = 0$. 当 $0 \leq s \leq t$ 时, 有 $s/(s+1) \leq t/(t+1)$, 则

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X(s), X(t)) &= (s+1)(t+1) \text{Cov}(Z(s/(s+1)), Z(t/(t+1))) \\ &= (s+1)(t+1) \cdot \frac{s}{s+1} \left(1 - \frac{t}{t+1} \right) = s. \end{aligned}$$

从而 $\{X(t), t \geq 0\}$ 是一个 Brown 运动过程。□

Exercise 13.7 (Ex 8.5)

对于随机过程 $\{X(t), t \geq 0\}$, 若对一切的 $n, a, t_1, \dots, t_n$, 随机向量 $X(t_1), \dots, X(t_n)$ 和 $X(t_1+a), \dots, X(t_n+a)$ 有相同的联合分布, 则称为平稳过程。

(a) 证明 Gauss 过程平稳的充要条件是 $\text{Cov}(X(s), X(t))$ 只依赖 $t-s$ ($s \leq t$), 且 $\mathbb{E}[X(t)] = c$.

(b) 令 $\{X(t), t \geq 0\}$ 是 Brown 运动, 且定义

$$V(t) = e^{-\alpha t/2} X(\alpha e^{\alpha t}).$$

证明 $\{V(t), t \geq 0\}$ 是平稳的 Gauss 过程。它称为 Ornstein-Uhlenbeck 过程。

证明. (a) 必要性: 若 Gauss 过程是平稳的, 则 $s \leq t$ 时, 随机向量 $(X(s), X(t))$ 和 $(X(0), X(t-s))$ 有相同的联合分布, 故 $\text{Cov}(X(s), X(t)) = \text{Cov}(X(0), X(t-s))$ 只依赖于 $t-s$. 且对任意 $t \geq 0$, 有 $X(t)$ 与 $X(0)$ 分布相同, 故 $\mathbb{E}[X(t)] = \mathbb{E}[X(0)] = c$.

充分性: 若 $\mathbb{E}[X(t)] = c$, 且 $\text{Cov}(X(s), X(t)) = f(t-s), s \leq t$. 对一切的 $n, a, t_1, \dots, t_n$, 由于 $\{X(t), t \geq 0\}$ 为 Gauss 过程, 则 $(X(t_1), \dots, X(t_n))$ 与 $(X(t_1+a), \dots, X(t_n+a))$ 均服从多元正态分布。且 $\mathbb{E}[(X(t_1), \dots, X(t_n))] = (c, \dots, c) = \mathbb{E}[(X(t_1+a), \dots, X(t_n+a))]$, $\text{Cov}(X(t_i), X(t_j)) = f(|t_j - t_i|) = \text{Cov}(X(t_i+a), X(t_j+a))$, $\text{Var}(X(t_i)) = f(0) = \text{Var}(X(t_i+a))$. 故 $(X(t_1), \dots, X(t_n))$ 与 $(X(t_1+a), \dots, X(t_n+a))$ 具有相同的均值与协方差阵, 由多元正态分布性质, 可知二者有相同的联合分布。从而 $\{X(t), t \geq 0\}$ 为平稳过程。

(b) 首先 $\mathbb{E}[V(t)] = e^{-\alpha t/2} \mathbb{E}[X(\alpha e^{\alpha t})] = 0$. 若 $\alpha = 0$ 则过程平凡, 而对任意 $\alpha \neq 0$ 都有 $\alpha e^{\alpha t}$ 关于 t 单调递增, 故 $0 \leq s \leq t$ 时有 $\alpha e^{\alpha s} \leq \alpha e^{\alpha t}$, 则 $\text{Cov}(V(s), V(t)) = e^{-\alpha(t+s)/2} \text{Cov}(X(\alpha e^{\alpha s}), X(\alpha e^{\alpha t})) = e^{-\alpha(t+s)/2} \cdot \alpha e^{\alpha s} = \alpha e^{-\alpha(t-s)/2}$. 于是 $\text{Cov}(V(s), V(t))$ 只依赖于 $t-s (s \leq t)$. 并且由于 $\{X(t), t \geq 0\}$ 为 Brown 运动过程, 则为 Gauss 过程, 故对一切的 $t_1, \dots, t_n$, 随机向量 $(X(\alpha e^{\alpha t_1}), \dots, X(\alpha e^{\alpha t_n}))$ 具有多元正态分布, 则 $(V(t_1), \dots, V(t_n)) = (e^{-\alpha t_1/2} X(\alpha e^{\alpha t_1}), \dots, e^{-\alpha t_n/2} X(\alpha e^{\alpha t_n}))$ 也具有多元正态分布, 故 $\{V(t), t \geq 0\}$ 为 Gauss 过程。且由 (a) 知 $\{V(t), t \geq 0\}$ 为平稳过程。□

第14章

第十四周作业

Exercise 14.1 (Ex 8.7)

求下列情形的分布：

(a) $|X(t)|$. (b) $\left| \min_{0 \leq s \leq t} X(s) \right|$. (c) $\max_{0 \leq s \leq t} X(s) - X(t)$.

解. 我们记

$$M(t) = \max_{0 \leq s \leq t} X(s), m(t) = \min_{0 \leq s \leq t} X(s).$$

(a) 由于 $X(t) \sim N(0, t)$, 故当 $x < 0$ 时,

$$P\{|X(t)| \leq x\} = 0.$$

当 $x \geq 0$ 时,

$$P\{|X(t)| \leq x\} = P\{-x \leq X(t) \leq x\} = 2P\{0 \leq X(t) \leq x\}.$$

因此

$$P\{|X(t)| \leq x\} = \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} \int_0^x e^{-y^2/2t} dy = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x/\sqrt{t}} e^{-u^2/2} du, x \geq 0.$$

故 $|X(t)|$ 服从参数为 t 的半正态分布, 其密度为

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} e^{-x^2/2t}, x > 0.$$

(b) 由 Brown 运动的对称性, $\{-X(s), 0 \leq s \leq t\}$ 仍为 Brown 运动, 故

$$|m(t)| = -m(t) = \max_{0 \leq s \leq t} [-X(s)]$$

与 $M(t)$ 同分布。由 8.2 节中关于最大随机变量的结果, 对 $x \geq 0$,

$$P\{M(t) > x\} = P\{T_x \leq t\} = 2P\{X(t) \geq x\}.$$

于是

$$P\{M(t) \leq x\} = 1 - 2P\{X(t) \geq x\} = 2P\{X(t) \leq x\} - 1.$$

因此当 $x \geq 0$ 时,

$$P\{|m(t)| \leq x\} = P\{M(t) \leq x\} = \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} \int_0^x e^{-y^2/2t} dy.$$

当 $x < 0$ 时, $P\{|m(t)| \leq x\} = 0$. 故 $|m(t)|$ 与 $|X(t)|$ 同分布, 密度为

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} e^{-x^2/2t}, x > 0.$$

(c) 令

$$Y(s) = X(t) - X(t-s), 0 \leq s \leq t.$$

由 Brown 运动的平稳独立增量性, $\{Y(s), 0 \leq s \leq t\}$ 仍为 Brown 运动。于是

$$M(t) - X(t) = \max_{0 \leq s \leq t} \{X(s) - X(t)\} = \max_{0 \leq u \leq t} \{X(t-u) - X(t)\} = \max_{0 \leq u \leq t} \{-Y(u)\}.$$

因此

$$M(t) - X(t) = -\min_{0 \leq u \leq t} Y(u)$$

与 $|m(t)|$ 同分布。由 (b) 知, 当 $x \geq 0$ 时,

$$P\{M(t) - X(t) \leq x\} = \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} \int_0^x e^{-y^2/2t} dy,$$

当 $x < 0$ 时,

$$P\{M(t) - X(t) \leq x\} = 0.$$

故 $M(t) - X(t)$ 也与 $|X(t)|$ 同分布, 其密度为

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} e^{-x^2/2t}, x > 0.$$

Exercise 14.2 (Ex 8.9)

令 $M(t) = \max_{0 \leq s \leq t} X(s)$, 证明

$$P\{M(t) > a \mid M(t) = X(t)\} = e^{-a^2/2t}, a > 0$$

解. 记

$$M = M(t) = \max_{0 \leq s \leq t} X(s).$$

注意事件 $\{M(t) = X(t)\}$ 本身概率为 0, 故下面在连续型条件分布的意义下理解该条件概率。

先推导 $(M, X(t))$ 的联合密度。对 $m > 0, x < m$, 有

$$P\{M \leq m, X(t) \leq x\} = P\{X(t) \leq x\} - P\{M > m, X(t) \leq x\}.$$

由 8.2 节中击中时刻后的对称性论证可知, 若过程在时刻 t 以前曾击中 m , 则其后相对于 m 的运动具有对称性, 因此

$$P\{M > m, X(t) \leq x\} = P\{X(t) \geq 2m - x\}.$$

于是

$$P\{M \leq m, X(t) \leq x\} = P\{X(t) \leq x\} - P\{X(t) \geq 2m - x\}.$$

由于 $X(t) \sim N(0, t)$, 令

$$\varphi_t(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-z^2/2t},$$

则对上式关于 m 和 x 求偏导, 得

$$f_{M, X(t)}(m, x) = \frac{2(2m - x)}{t} \varphi_t(2m - x), m > 0, x < m.$$

令

$$Y = M - X(t).$$

作变量变换

$$x = m - y,$$

则 $y \geq 0, m \geq 0$, 且 $2m - x = m + y$ 。因此

$$f_{M,Y}(m, y) = \frac{2(m+y)}{t} \varphi_t(m+y), m > 0, y > 0.$$

先求 Y 的边缘密度:

$$f_Y(y) = \int_0^\infty \frac{2(m+y)}{t} \varphi_t(m+y) dm.$$

令 $z = m + y$, 则

$$f_Y(y) = \int_y^\infty \frac{2z}{t} \varphi_t(z) dz = 2\varphi_t(y), y \geq 0.$$

故在 $Y = 0$ 的条件下,

$$f_{M|Y=0}(m) = \frac{f_{M,Y}(m, 0)}{f_Y(0)} = \frac{\frac{2m}{t} \varphi_t(m)}{2\varphi_t(0)} = \frac{m}{t} e^{-m^2/2t}, m > 0.$$

由于 $Y = 0$ 即 $M(t) = X(t)$, 所以对 $a > 0$,

$$P\{M(t) > a \mid M(t) = X(t)\} = \int_a^\infty \frac{m}{t} e^{-m^2/2t} dm = e^{-a^2/2t}.$$

Part II

习题课讲义

第1章

期中习题课

1.1 知识点梳理

期中考试的范围是教材前三章，主要内容应该是第二章与第三章，根据往年考题的情况，大概第三章的内容会是考试的主要部分。考试题大概率比较偏重计算，并且难度不会太高，因此这门课一直以来都是不调分的。但是大家也不用过于担心，我们这门课对于细节的要求并不严，考试题只要思路与结论是对的大概率就能拿到全部分数了。

1.1.1 第一章知识点

第一章虽然不是重点，但有一些内容还是值得一看的，如果有时间的话可以看一下1.5节与1.6节。以下是我挑选与梳理的我个人认为值得注意一下的知识点：

Proposition 1.1

一些常见分布的概率质量/密度函数，矩母函数，均值和方差 (可参考教材表1.4.1和1.4.2).

Proposition 1.2 (★ 指数分布的无记忆性)

若 $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ ，则对任意 $s, t \geq 0$ 有 $P(X > s + t \mid X > t) = P(X > s)$.

Proposition 1.3

- (1) 若 X, Y 可积，则 $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid Y]]$.
- (2) 若 X 二次可积，则 $\text{Var}(X) = \mathbb{E}[\text{Var}(X \mid Y)] + \text{Var}(\mathbb{E}[X \mid Y])$.
- (3) $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(\mathbb{E}[X \mid Z], \mathbb{E}[Y \mid Z]) + \mathbb{E}[\text{Cov}(X, Y \mid Z)]$.

Proposition 1.4

以 N 记一个非负整数值随机变量。则有

$$\mathbb{E}[N] = \sum_{k=1}^{\infty} P\{N \geq k\} = \sum_{k=0}^{\infty} P\{N > k\}.$$

更一般地，若 X 是一个具有分布函数 F 的非负随机变量，则

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^{\infty} \bar{F}(x) dx, \quad \mathbb{E}[X^n] = \int_0^{\infty} nx^{n-1} \bar{F}(x) dx.$$

上面这个命题是第一章习题 1.1, 这个题目给出了一种计算期望的方法, 如果在考试题中不是主要步骤的话可以直接使用这个结论, 但实际上证明也是容易的。

1.1.2 第二章知识点

第二章比较重要的部分是 2.1 到 2.4 节, 而 2.5 和 2.6 节了解一些基本定义与性质即可。

Definition 1.1 (独立增量与平稳增量)

计数过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 称为有独立增量, 如果发生在不相交时间区间上的事件数都是独立的; 称为有平稳增量, 如果任意时间区间中发生的事件数的分布只依赖于时间区间的长度。等价地即, $N(t_2 + s) - N(t_1 + s)$ 与在区间 $(t_1, t_2]$ 的事件数 $N(t_2) - N(t_1)$ 有相同的分布。

Definition 1.2 (★ Poisson 过程的定义)

若计数过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 满足

- (i) $N(0) = 0$
- (ii) 过程有独立增量
- (iii) 在长度为 t 的任意区间中的事件数服从以 λt 为均值的 Poisson 分布, 即对任意 $s, t \geq 0$ 有

$$P\{N(t+s) - N(s) = n\} = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}, n = 0, 1, 2, \dots$$

则称其为具有速率 $\lambda > 0$ 的 Poisson 过程。

Definition 1.3 (Poisson 过程的等价定义)

计数过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是速率为 λ 的 Poisson 过程, 当且仅当它满足

- (i) $N(0) = 0$
- (ii) 具有平稳增量与独立增量
- (iii) $P\{N(h) = 1\} = \lambda h + o(h)$
- (iv) $P\{N(h) \geq 2\} = o(h)$

考试中可能会出现判断是否是 Poisson 的题目, 要把定义记准确, 其中第一个定义用得较多。Poisson 过程还有一个性质是叠加性, 即独立 Poisson 过程的和也是 Poisson 过程, 速率为求和。

Proposition 1.5

若 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是速率为 λ 的 Poisson 过程, 则对任意 $t \geq 0$ 有 $E[N(t)] = \lambda t, \text{Var}(N(t)) = \lambda t$ 。

Proposition 1.6

对任意 $s, t \geq 0$ 有 $\text{Cov}(N(s), N(t)) = \lambda \min\{s, t\}$ 。

证明. 不妨设 $s \leq t$, 则我们有 $N(t) = N(s) + (N(t) - N(s))$, 而 $N(s)$ 与 $N(t) - N(s)$ 独立, 所以 $\text{Cov}(N(s), N(t)) = \text{Var}(N(s)) = \lambda s$. □

Theorem 1.1 (★)

给定 $N(t) = n$, n 个事件的到达时间 $S_1, S_2, \dots, S_n$ 与 n 个独立的 $(0, t)$ 上均匀分布的随机变量的次序统计量有相同的分布。

证明. 我们要计算给定 $N(t) = n$ 时, $S_1, S_2, \dots, S_n$ 的条件密度函数。为此令 $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < t$, 而且令 h_i 充分小, 使 $t_i + h_i < t_{i+1}, i = 1, \dots, n$. 现在

$$\begin{aligned} & P\{t_i \leq S_i \leq t_i + h_i, i = 1, 2, \dots, n \mid N(t) = n\} \\ &= \frac{P\{\text{在 } [t_i, t_i + h_i] \text{ 中恰有一个事件}, i = 1, \dots, n, \text{ 而在 } [0, t] \text{ 的其他地方没有事件}\}}{P\{N(t) = n\}} \\ &= \frac{\lambda h_1 e^{-\lambda h_1} \dots \lambda h_n e^{-\lambda h_n} e^{-\lambda(t-h_1-h_2-\dots-h_n)}}{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n / n!} = \frac{n!}{t^n} h_1 h_2 \dots h_n. \end{aligned}$$

因此

$$\frac{P\{t_i \leq S_i \leq t_i + h_i, i = 1, \dots, n \mid N(t) = n\}}{h_1 h_2 \dots h_n} = \frac{n!}{t^n}.$$

令 $h_i \rightarrow 0$, 我们得到在给定 $N(t) = n$ 时, $S_1, S_2, \dots, S_n$ 的条件密度函数是

$$f(t_1, \dots, t_n) = \frac{n!}{t^n}, 0 < t_1 < \dots < t_n < t.$$

这样就完成了证明。 $\square$

注记 1.1. 直观上, 我们通常说, 在 $(0, t)$ 中已发生了 n 个事件的条件下, 事件发生的时间 $S_1, \dots, S_n$ 在看做不排序的随机变量时, 都是相互独立的, 且服从 $(0, t)$ 上的均匀分布。

上面这个定理非常有用, 利用这个定理可以把复杂的 S_k 的分布转化成均匀分布的次序统计量来大幅度简化许多运算。并且定理的证明过程也是值得一看的。同时证明中对 $N(t)$ 取条件的方法也是十分常用的做题技巧。

Proposition 1.7 (到达间隔的分布)

若 $X_n = S_n - S_{n-1}, S_0 = 0$, 则 $X_1, X_2, \dots$ 独立同分布, 且 $X_n \sim \text{Exp}(\lambda)$. 因此 $S_n = X_1 + \dots + X_n$ 服从 Gamma 分布, 其密度为

$$f_{S_n}(t) = \frac{\lambda^n t^{n-1} e^{-\lambda t}}{(n-1)!}, t > 0.$$

Proposition 1.8 (★)

如果 $N_i(t)$ 表示直到时刻 t 为止发生的 i 型事件数, $i = 1, 2$, 那么 $N_1(t)$ 和 $N_2(t)$ 分别是具有均值 λtp 和 $\lambda t(1-p)$ 的独立 Poisson 随机变量, 其中

$$p = \frac{1}{t} \int_0^t P(s) ds.$$

证明. 我们利用取条件于 $N(t)$ 计算 $N_1(t)$ 和 $N_2(t)$ 的联合分布:

$$\begin{aligned} & P\{N_1(t) = n, N_2(t) = m\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P\{N_1(t) = n, N_2(t) = m \mid N(t) = k\} P\{N(t) = k\} \\ &= P\{N_1(t) = n, N_2(t) = m \mid N(t) = n+m\} P\{N(t) = n+m\}. \end{aligned}$$

现在我们考虑发生在区间 $[0, t]$ 的任意一个事件。若它发生在时刻 s , 则它是 I 型事件的概率是 $P(s)$. 因为由定理 2.3.1 此事件发生的时刻在 $(0, t)$ 上均匀分布, 故而它是 I 型事件的概率是

$$p = \frac{1}{t} \int_0^t P(s) ds$$

且与其他事件分在什么类是独立的。因此 $P\{N_1(t) = n, N_2(t) = m \mid N(t) = n+m\}$ 正好是每次

试验成功的概率是 p 时, 在 $n+m$ 次独立试验中有 n 次成功 m 次失败的概率。即

$$P\{N_1(t) = n, N_2(t) = m \mid N(t) = n+m\} = \binom{n+m}{n} p^n (1-p)^m.$$

随之有

$$\begin{aligned} P\{N_1(t) = n, N_2(t) = m\} &= \binom{n+m}{n} p^n (1-p)^m e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n+m}}{(n+m)!} \\ &= e^{-\lambda t p} \frac{(\lambda t p)^n}{n!} e^{-\lambda t (1-p)} \frac{(\lambda t (1-p))^m}{m!}. \end{aligned}$$

这表明 $N_1(t)$ 和 $N_2(t)$ 分别是均值为 $\lambda t p$ 和 $\lambda t (1-p)$ 的 Poisson 随机变量, 并且相互独立。□

这个命题很容易推广到多个事件类型的情况, 考试时可能会给出一些具体的例子要求计算各种类型事件的相关数据。比如先把顾客、车辆、冲击等分类成若干类, 再分别统计各类在某时刻是否仍在系统中、是否在某区间完成服务、是否满足某种标签条件。

Definition 1.4 (非时齐 Poisson 过程)

若计数过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 满足

- (i) $N(0) = 0$
- (ii) $\{N(t), t \geq 0\}$ 有独立增量
- (iii) $P\{N(t+h) - N(t) \geq 2\} = o(h)$
- (iv) $P\{N(t+h) - N(t) = 1\} = \lambda(t)h + o(h)$

则称为具有强度函数 (一般要求连续) $\lambda(t), t \geq 0$ 的非平稳或非时齐 Poisson 过程。若令

$$m(t) = \int_0^t \lambda(s) ds$$

则可证

$$P\{N(t+s) - N(t) = n\} = \exp(-(m(t+s) - m(t))) \frac{[m(t+s) - m(t)]^n}{n!}, n \geq 0.$$

即 $N(t+s) - N(t)$ 服从均值为 $m(t+s) - m(t)$ 的 Poisson 分布。

Example 1.1 (无穷多条服务线的 Poisson 排队系统 $(M/G/\infty)$ 的输出过程)

$(M/G/\infty)$ 排队系统 (即具有 Poisson 到达及共同服务分布 G 的无穷多条服务线的排队系统) 的输出过程, 是具有强度函数 $\lambda(t) = \lambda G(t)$ 的非时齐 Poisson 过程。为证明它, 我们首先论证:

- (1) 在 $(s, s+t)$ 中离开系统的顾客数服从均值为 $\lambda \int_s^{s+t} G(y) dy$ 的 Poisson 分布;
- (2) 在不交时间区间中离开系统的顾客数是独立的。

为了证明 (1), 我们将任何在时间区间 $(s, s+t)$ 中离开的顾客称为类型 I 到达的。那么在时刻 y 到达的一个顾客称为类型 I 的概率是

$$P(y) = \begin{cases} G(s+t-y) - G(s-y), & \text{若 } y < s, \\ G(s+t-y), & \text{若 } s < y < s+t, \\ 0, & \text{若 } y > s+t. \end{cases}$$

因此, 由命题 2.3.2, 离开的这种顾客数服从均值为

$\lambda \int_0^\infty P(y) dy = \lambda \int_0^s (G(s+t-y) - G(s-y)) dy + \lambda \int_s^{s+t} G(s+t-y) dy = \lambda \int_s^{s+t} G(y) dy$ 的 Poisson 分布。为了证明 (2), 设 I_1 和 I_2 记不相交的时间区间, 将在 I_1 中离开的顾客称为类

型 I 到达的, 在 I_2 中离开的顾客称为类型 II 到达的, 而在其他情形的顾客称为类型 III 的。又由命题 2.3.2, 或更准确地, 由命题 2.3.2 在三类顾客情形的推广, 推出在 I_1 和 I_2 中离开的人数 (即类型 I 和类型 II 到达的顾客) 都是独立的 Poisson 随机变量。

利用 (1) 和 (2), 验证输出过程是一个非时齐 Poisson 过程的所有公理要求是一件简单的事情 (这与从 Poisson 过程的定义 2.1.1 推出定义 2.2.1 的证明非常相似)。

因为当 $t \rightarrow \infty$ 时 $\lambda(t) \rightarrow \lambda$, 我们注意到, 在 t 后 (因为 $t \rightarrow \infty$) 的极限输出过程是速率为 λ 的 Poisson 过程。

非时齐 Poisson 过程如果考试中涉及到的话不会太难, 一般是要写出 $\lambda(t)$ 并由此计算 $m(t)$ 。

Definition 1.5 (复合 Poisson 过程)

设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是一个 Poisson 过程, $X_1, X_2, \dots$ 独立同分布, 且与 $N(t)$ 独立。定义

$$X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i.$$

则称 $\{X(t), t \geq 0\}$ 为复合 Poisson 过程。 $\mathbb{E}[X(t)] = \mathbb{E}[N(t)]\mathbb{E}[X_i]$, $\text{Var}(X(t)) = \mathbb{E}[N(t)]\mathbb{E}[X_i^2]$ 。

1.1.3 第三章知识点

第三章比较重要的部分是 3.1 到 3.6 节, 而 3.7 和 3.8 节基本可以不用看。

Definition 1.6 (更新过程)

设 $X_1, X_2, \dots$ 是一列有相同分布 F 的非负的独立同分布随机变量, 并假设 $F(0) = P(X_n = 0) < 1$ 。将 X_n 解释为在第 $n-1$ 个事件与第 n 个事件之间的间隔时间。并令

$$S_0 = 0, S_n = \sum_{i=1}^n X_i, N(t) = \sup\{n : S_n \leq t\} = \max\{n : S_n \leq t\}.$$

则 S_n 是第 n 个事件发生的时间, 而 $N(t)$ 为到 t 为止的事件数。则 $\{N(t), t \geq 0\}$ 称为更新过程。

Proposition 1.9

对任意 $n \geq 0$ 有 $P\{N(t) = n\} = F_n(t) - F_{n+1}(t)$, 其中 F_n 表示 F 和自身的 n 次卷积, 且其与 $S_n = X_1 + \dots + X_n$ 同分布。约定 $F_0(t) = \mathbf{1}_{\{t \geq 0\}}$ 。

Definition 1.7 (更新函数)

定义 $m(t) = \mathbb{E}[N(t)]$ 。称 $m(t)$ 为更新函数。

Proposition 1.10

更新函数满足 $m(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t)$ 。

Theorem 1.2 (★ 更新方程)

更新函数 $m(t)$ 满足 $m(t) = F(t) + \int_0^t m(t-x) dF(x)$ 。

证明. 这是第四周的一道作业题。 □

一般来说这个 F_n 相关的东西考试中不会涉及，我们用得更多的还是更新方程。但还是了解一下比较好，这样的话考试中如果实在不会写也可以用这个来硬算卷积。

Definition 1.8 (★ 停时)

设 $X_1, X_2, \dots$ 是一列独立的随机变量序列， N 是整数值随机变量，若对一切 $n = 1, 2, \dots$ ，事件 $\{N = n\}$ 都与 $X_{n+1}, X_{n+2}, \dots$ 独立，则称 N 为对序列 $X_1, X_2, \dots$ 的停时。

Theorem 1.3 (★ Wald 方程)

若 $X_1, X_2, \dots$ 是具有有限期望的独立同分布随机变量，而 N 对 $X_1, X_2, \dots$ 是停时，且满足 $\mathbb{E}[N] < \infty$ ，则 $\mathbb{E}[\sum_{n=1}^N X_n] = \mathbb{E}[N]E[X]$ 。

Example 1.2

更新过程中 $N(t) + 1$ 是对序列 X_i 的一个停时，注意

$$N(t) + 1 = n \iff N(t) = n - 1 \iff X_1 + \dots + X_{n-1} \leq t, X_1 + \dots + X_n > t.$$

Corollary 1.1

若 $\mu < \infty$ ，则 $\mathbb{E}[S_{N(t)+1}] = \mu[m(t) + 1]$ 。

Proposition 1.11

在 $t \rightarrow \infty$ 时，以概率为 1 地有 $\frac{N(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu}$ 。

Theorem 1.4 (基本更新定理)

在 $t \rightarrow \infty$ 时，有 $\frac{m(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu}$ (这里 $\frac{1}{\infty} = 0$)。

Theorem 1.5 (Blackwell 定理)

- (i) 若 F 不是格点的，则对一切 $a \geq 0$ ，在 $t \rightarrow \infty$ 时有 $m(t+a) - m(t) \rightarrow a/\mu$ 。
- (ii) 若 F 是具有周期 d 的格点分布，则在 $n \rightarrow \infty$ 时有 $\mathbb{E}[\text{在 } nd \text{ 的更新次数}] \rightarrow d/\mu$ 。

Theorem 1.6 (★ 关键更新定理)

若 F 不是格点分布，且若 $h(t)$ 是直接 Riemann 可积的，则

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t h(t-x) dm(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu} \int_0^t h(t) dt.$$

其中

$$m(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(x), \mu = \int_0^{\infty} \bar{F}(t) dt.$$

上面的这些定理了解熟悉结论即可，极限定理相关的内容考试大概率是不会过多涉及的，最多也只是基本结论的简单应用，不必过于担心。

Lemma 1.1 (★)

$$P\{S_{N(t)} \leq s\} = \bar{F}(t) + \int_0^s \bar{F}(t-y) dm(y), t \geq s \geq 0.$$

证明. 直接计算, 我们有

$$\begin{aligned} P\{S_{N(t)} \leq s\} &= \sum_{n=0}^{\infty} P\{S_n \leq s, S_{n+1} > t\} = \bar{F}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} P\{S_n \leq s, S_{n+1} > t\} \\ &= \bar{F}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} P\{S_n \leq s, S_{n+1} > t \mid S_n = y\} dF_n(y) = \bar{F}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^s \bar{F}(t-y) dF_n(y) \\ &= \bar{F}(t) + \int_0^s \bar{F}(t-y) d\left(\sum_{n=1}^{\infty} F_n(y)\right) = \bar{F}(t) + \int_0^s \bar{F}(t-y) dm(y). \end{aligned}$$

其中积分与求和的交换是正确的, 因为所有的项都是非负的。□

Corollary 1.2 (★)

(1) 由引理 3.4.3 推出

$$P\{S_{N(t)} = 0\} = \bar{F}(t),$$

$$dF_{S_{N(t)}}(y) = \bar{F}(t-y) dm(y), 0 < y < \infty.$$

(2) 为了得到上述结论的一个直观感觉, 假设 F 是连续的, 且具有密度 f , 那么

$$m(y) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(y),$$

因而对 $y > 0$ 有

$$\begin{aligned} dm(y) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n(y) dy = \sum_{n=1}^{\infty} P\{\text{第 } n \text{ 次更新发生在 } (y, y+dy)\} \\ &= P\{\text{更新发生在 } (y, y+dy)\}. \end{aligned}$$

所以 $S_{N(t)}$ 的概率密度是

$$\begin{aligned} f_{S_{N(t)}}(y) dy &= P\{\text{更新发生在 } (y, y+dy), \text{ 下一个到达间隔时间 } > t-y\} \\ &= \bar{F}(t-y) dm(y). \end{aligned}$$

引理的证明中对 $S_{N(t)}$ 取条件的做法是非常重要的方法, 尤其要注意对 $S_{N(t)} = 0$ 单独计算, 作业题中就有类似的题目。这个引理的证明过程值得认真看一看。

Theorem 1.7 (★)

考虑一个可处在开或关两个状态之一的系统。初始时它处在开状态而且保持一段时间 Z_1 ; 然后它转变为关状态而且保持一段时间 Y_1 ; 然后它转变为开状态而且保持一段时间 Z_2 ; 然后它又转变为关状态而且保持一段时间 Y_2 ; 如此继续下去。

我们假设随机向量 $(Z_n, Y_n), n \geq 1$ 独立同分布。因此随机变量序列 $\{Z_n\}$ 和随机变量序列 $\{Y_n\}$ 两者分别都是独立同分布的; 但是我们允许 Z_n 和 Y_n 是相依的。换句话说, 每次过程在转变为开状态时重新开始, 但是当它转变为关状态时我们允许关的时间长度依赖于前面开状态的时间长度。

令 H 是 Z_n 的分布, G 是 Y_n 的分布, 而 F 是 $Z_n + Y_n, n \geq 1$ 的分布. 进而令

$$P(t) = P\{\text{在时刻 } t \text{ 系统在开状态}\}.$$

若 $\mathbb{E}[Z_n + Y_n] < \infty$, 且 F 不是格点的, 那么

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = \frac{\mathbb{E}[Z_n]}{\mathbb{E}[Z_n] + \mathbb{E}[Y_n]}.$$

定理的结论很好理解也很好记忆, 考试经常会考, 需要合理地定义“开”与“关”。

Theorem 1.8

若一个循环的分布 F 在某个区间具有密度, 且如果 $E[S_1] < \infty$, 则

$$P_j = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{X(t) = j\} = \frac{\mathbb{E}[\text{一个循环中在状态 } j \text{ 的总时间}]}{\mathbb{E}[\text{一个循环的时间}]}.$$

这是上面定理的自然推广, 状态数从两种推广到至多可数种。

Definition 1.9 (★)

考虑一个更新过程, 而以 $Y(t)$ 记自 t 时刻起到下一次更新的时间, 而以 $A(t)$ 记时刻 t 前的最后一次更新到 t 的时间. 即 $Y(t) = S_{N(t)+1} - t, A(t) = t - S_{N(t)}$. 则 $Y(t)$ 称为在 t 的超出量或剩余寿命, 而 $A(t)$ 称为在 t 的年龄。

Proposition 1.12 (★)

假设我们想要推导 $P\{A(t) \leq x\}$. 为此, 使一个“开—关”周期对应于一次更新, 且若在时刻 t 的年龄小于或等于 x , 则系统在时刻 t 处在“开”。即系统在更新区间的前 x 个单位时间处在“开”, 而在余下的时间处于“关”。那么, 若更新分布不是格点分布, 那么由定理 3.4.4 有

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} P\{A(t) \leq x\} &= \mathbb{E}[\min(X, x)] / \mathbb{E}[X] \\ &= \int_0^x P\{\min(X, x) > y\} dy / \mathbb{E}[X] = \int_0^x \bar{F}(y) dy / \mu. \end{aligned}$$

(注意 $X = Z + Y$) 类似地, 为了得到 $P\{Y(t) \leq x\}$ 的极限值, 我们说此系统在一个更新循环的最后 x 个单位时间内处于“关”, 而在其他时间内处于“开”。于是, 在一个循环中, 关的时间是 $\min(x, X)$, 故而

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} P\{Y(t) \leq x\} &= \lim_{t \rightarrow \infty} P\{\text{在时刻 } t \text{ 系统处于关状态}\} \\ &= \mathbb{E}[\min(x, X)] / \mathbb{E}[X] = \int_0^x \bar{F}(y) dy / \mu. \end{aligned}$$

总结起来即得到: 若到达间隔分布不是格点的, 且 $\mu < \infty$, 则

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P\{Y(t) \leq x\} = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{A(t) \leq x\} = \int_0^x \frac{\bar{F}(y)}{\mu} dy.$$

Theorem 1.9 (极限平均剩余寿命)

若到达间隔分布是非格点的, 且 $\mu = \mathbb{E}[X_1] < \infty, \mathbb{E}[X_1^2] < \infty$, 则

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[Y(t)] = \frac{\mathbb{E}[X_1^2]}{2\mu}.$$

Definition 1.10

令 $\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$ 是一列独立的非负随机变量, X_1 具有分布 G , 而 X_n 具有分布 $F, n > 1$. 令 $S_0 = 0, S_n = \sum_{i=1}^n X_i, n \geq 1$, 且定义 $N_D(t) = \sup\{n : S_n \leq t\}$. 则随机过程 $\{N_D(t), t \geq 0\}$ 称为广义更新过程或者延迟更新过程。

Proposition 1.13

(i) 在 $t \rightarrow \infty$ 时, 以概率为 1 地有

$$\frac{N_D(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu}.$$

(ii) 在 $t \rightarrow \infty$ 时

$$\frac{m_D(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu}.$$

(iii) 若 F 不是格点的, 则在 $t \rightarrow \infty$ 时,

$$m_D(t+a) - m_D(t) \rightarrow \frac{a}{\mu}.$$

(iv) 若 F 和 G 都是格点的, 具有周期 d , 则在 $n \rightarrow \infty$ 时

$$\mathbb{E}[\text{在 } nd \text{ 的更新数}] \rightarrow \frac{d}{\mu}.$$

(v) 若 F 不是格点的, $\mu < \infty$, 且 h 是直接 Riemann 可积的, 则在 $t \rightarrow \infty$ 时,

$$\int_0^\infty h(t-x) dm_D(x) \rightarrow \frac{1}{\mu} \int_0^\infty h(t) dt.$$

Example 1.3 (★★ 教材例 3.5 (A))

观察一系列独立同分布的离散随机变量 $X_1, X_2, \dots$, 且记录一个给定的结果序列 (或模式) 之出现次数。即设这个模式是 $x_1, x_2, \dots, x_k$, 且若 $X_n = x_k, X_{n-1} = x_{k-1}, \dots, X_{n-k+1} = x_1$, 则说该模式在时刻 n 出现。若我们以 $N(n)$ 记直至时刻 n 为止该模式出现的次数, 则 $\{N(n), n \geq 1\}$ 是延迟更新过程。直至首次更新时间的分布就是此模式首次出现时的分布, 而随后的到达间隔时间分布是模式的两次出现之间的时间分布。

假设我们想要确定模式出现的速率。由延迟更新过程的强大数定律 (定理 3.5.1 的 (i) 部分), 它等于在模式之间的平均时间的倒数。但是由 Blackwell 定理 (定理 3.5.1 的 (iv) 部分) 这正是更新过程在时刻 n 的极限概率。即

$$(\mathbb{E}[\text{模式之间的时间}])^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} P\{\text{在时刻 } n \text{ 有模式}\} = \prod_{i=1}^k P\{X = x_i\}.$$

因此模式出现的速率是 $\prod_{i=1}^k P\{X = x_i\}$, 而模式间的平均时间是 $(\prod_{i=1}^k P\{X = x_i\})^{-1}$.

例如, 若每个随机变量以概率 p 取 1, 而以概率 q 取 0. 则模式 0, 1, 0, 1 的平均时间是 $p^{-2}q^{-2}$. 假设我们现在对首次出现模式 0, 1, 0, 1 的期望时间感兴趣。由于从 0, 1, 0, 1 到 0, 1, 0, 1 的期望时间是 $p^{-2}q^{-2}$, 由此推出从 0, 1 开始得到 0, 1, 0, 1 的附加结果的期望是 $p^{-2}q^{-2}$ 。但是由于为了出现 0, 1, 0, 1, 我们首先必须得到 0, 1, 由此推出

$$\mathbb{E}[\text{到 } 0, 1, 0, 1 \text{ 的时间}] = \mathbb{E}[\text{到 } 0, 1 \text{ 的时间}] + p^{-2}q^{-2}.$$

由对模式 0, 1 应用同样的逻辑推理, 我们得到这种模式两次出现之间的期望时间是 $1/(pq)$; 而

因为这等于它的首次出现的期望时间，我们可得

$$\mathbb{E}[\text{到 } 0, 1, 0, 1 \text{ 的时间}] = p^{-2}q^{-2} + p^{-1}q^{-1}.$$

以上推理可以用于计算任何蓄套模式出现所需要的期望数。例如，若连续地投掷一枚以概率 p 出现正面 H（以概率 q 出现反面 T）的硬币，那么

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\text{直到 HTHHTHH 的时间}] &= \mathbb{E}[\text{直到 HTHH 的时间}] + p^{-5}q^{-2} \\ &= \mathbb{E}[\text{直到 H 的时间}] + p^{-3}q^{-1} + p^{-5}q^{-2} \\ &= p^{-1} + p^{-3}q^{-1} + p^{-5}q^{-2}.\end{aligned}$$

又由同样推理，

$$\mathbb{E}[\text{直到 } k \text{ 次连续正面的时间}] = (1/p)^k + \mathbb{E}[\text{直到 } k-1 \text{ 次连续正面的时间}] = \sum_{i=1}^k (1/p)^i.$$

现在假设我们打算计算一个给定的模式（如模式 A ）在另一个模式（如模式 B ）前发生的概率。例如，独立地投掷一枚以概率 p 出现正面 H 的硬币，且假设我们感兴趣的是 $A = \text{HTHT}$ 在 $B = \text{THTT}$ 前出现的概率。为得此概率，我们发现先考虑在指定的一个出现后直至另一个出现的期望附加时间是很有用的。以 $N_{B|A}$ 记自 A 开始到 B 出现需要的附加投掷数，而类似地定义 $N_{A|B}$ 。又以 N_A 记直至 A 出现的投掷数。那么

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[N_{B|A}] &\mathbb{E}[\text{从 HTHT 开始到 THTT 的附加次数}] \\ &\mathbb{E}[\text{从 THT 开始到 THTT 的附加次数}].\end{aligned}$$

然而因为

$$\mathbb{E}[N_{\text{THTT}}] = \mathbb{E}[N_{\text{THT}}] + \mathbb{E}[N_{\text{THTT}|\text{THT}}],$$

所以

$$\mathbb{E}[N_{B|A}] = \mathbb{E}[N_{\text{THTT}}] - \mathbb{E}[N_{\text{THT}}].$$

但是

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[N_{\text{THTT}}] &= \mathbb{E}[N_{\text{T}}] + q^{-3}p^{-1} = q^{-1} + q^{-3}p^{-1}, \\ \mathbb{E}[N_{\text{THT}}] &= \mathbb{E}[N_{\text{T}}] + q^{-2}p^{-1} = q^{-1} + q^{-2}p^{-1},\end{aligned}$$

故而

$$\mathbb{E}[N_{B|A}] = q^{-3}p^{-1} - q^{-2}p^{-1}.$$

再则

$$\mathbb{E}[N_{A|B}] = \mathbb{E}[N_A] = p^{-2}q^{-2} + p^{-1}q^{-1}.$$

为了计算 $P_A = P\{A \text{ 在 } B \text{ 前}\}$ ，令 $M = \min(N_A, N_B)$ 。那么

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[N_A] &= \mathbb{E}[M] + \mathbb{E}[N_A - M] \\ &= \mathbb{E}[M] + \mathbb{E}[N_A - M \mid B \text{ 在 } A \text{ 前}](1 - P_A) \\ &= \mathbb{E}[M] + \mathbb{E}[N_{A|B}](1 - P_A).\end{aligned}$$

类似地，

$$\mathbb{E}[N_B] = \mathbb{E}[M] + \mathbb{E}[N_{B|A}]P_A.$$

求解这些方程, 导致

$$P_A = \frac{\mathbb{E}[N_B] + \mathbb{E}[N_{A|B}] - \mathbb{E}[N_A]}{\mathbb{E}[N_{B|A}] + \mathbb{E}[N_{A|B}]}, \quad \mathbb{E}[M] = \mathbb{E}[N_B] - \mathbb{E}[N_{B|A}]P_A.$$

例如, 假设 $p = 1/2$, 那么因为

$$\mathbb{E}[N_{A|B}] = \mathbb{E}[N_A] = 2^4 + 2^2 = 20,$$

$$\mathbb{E}[N_B] = 2 + 2^4 = 18, \quad \mathbb{E}[N_{B|A}] = 2^4 - 2^3 = 8,$$

我们得到

$$P_A = \frac{18 + 20 - 20}{8 + 20} = \frac{9}{14}, \quad \mathbb{E}[M] = 18 - \frac{8 \times 9}{14} = \frac{90}{7}.$$

所以, 直至 A 出现的期望投掷次数是 20, 直至 B 出现的期望投掷次数是 18, 直至两者之一出现的期望投掷次数是 $90/7$, A 先出现的概率是 $9/14$ (这有点违反直觉, 因为 $\mathbb{E}[N_A] > \mathbb{E}[N_B]$).

花样问题可以说是每年都考, 非常非常重要, 但实际上并不难。把上面这个例题, 即书上例 3.5(A) 认真读几遍, 掌握其中的方法, 再用作业题和往年题练一练手就问题不大了。

Definition 1.11 (更新报酬过程)

大量概率模型都是下述模型的特殊情形。考虑一个具有分布 F 和到达间隔时间 $X_n, n \geq 1$ 的更新过程 $\{N(t), t \geq 0\}$, 而假设在每次更新发生时我们收到一份报酬。我们以 R_n 记在第 n 次更新的时刻收到的报酬。假设 $R_n, n \geq 1$ 是独立同分布的。然而我们允许 R_n 可能 (通常会) 依赖第 n 次更新区间的长度 X_n , 故我们假定 $(X_n, R_n) (n \geq 1)$ 是独立同分布的。若我们令

$$R(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} R_n,$$

则 $R(t)$ 为直至时间 t 为止赚得的总报酬, 称为更新报酬过程。令 $\mathbb{E}[R] = \mathbb{E}[R_n], \mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X_n]$.

Theorem 1.10 (★)

若 $\mathbb{E}[R] < \infty$ 和 $\mathbb{E}[X] < \infty$, 则

(i) 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 以概率为 1 地有

$$\frac{R(t)}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}[R]}{\mathbb{E}[X]}.$$

(ii) 当 $t \rightarrow \infty$ 时有

$$\frac{\mathbb{E}[R(t)]}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}[R]}{\mathbb{E}[X]}.$$

Theorem 1.11

以 $\lambda = 1/\mathbb{E}[X_i]$ 记到达速率, 那么 $L = \lambda W$.

排队论记住这个结论应该就差不多了, 作业中也有一道涉及排队论的题目, 也比较简单。

以上就是我梳理的全部内容, 按这些内容复习, 再做一做作业和往年题大概就问题不大了。

1.2 部分作业题与往年考题

1.2.1 作业题

Exercise 1.1 (Ex 1.16)

令 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是概率密度函数。假设对一切 x , 存在某个 c 使 $f(x) \leq cg(x)$. 假设我们可以生成具有密度函数 g 的随机变量, 且考虑以下算法:

第1步: 生成具有密度函数 g 的随机变量 Y .

第2步: 生成均匀的 $(0, 1)$ 随机变量 U .

第3步: 若 $U \leq \frac{f(Y)}{cg(Y)}$, 则令 $X = Y$; 否则返回第1步。

假定相继生成的随机变量是独立的, 证明

(a) X 具有密度函数 $f(x)$.

(b) 此算法生成 X 必须迭代的次数是均值为 c 的几何随机变量。

证明. (a) 我们有

$$P(X \leq x) = P\left(Y \leq x \mid U \leq \frac{f(Y)}{cg(Y)}\right) = \frac{P\left(Y \leq x, U \leq \frac{f(Y)}{cg(Y)}\right)}{P\left(U \leq \frac{f(Y)}{cg(Y)}\right)}.$$

先计算分子

$$P\left(Y \leq x, U \leq \frac{f(Y)}{cg(Y)}\right) = \int_{-\infty}^x P\left(U \leq \frac{f(Y)}{cg(Y)} \mid Y = y\right) g(y) dy = \int_{-\infty}^x \frac{f(y)}{c} dy.$$

再计算分母

$$P\left(U \leq \frac{f(Y)}{cg(Y)}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} P\left(U \leq \frac{f(Y)}{cg(Y)} \mid Y = y\right) g(y) dy = \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) dy = \frac{1}{c}.$$

因此

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(y) dy, \quad P_X(x) = f(x).$$

即 X 具有密度函数 $f(x)$.

(b) 由 (a) 我们有

$$P\left(U \leq \frac{f(Y)}{cg(Y)}\right) = \frac{1}{c}.$$

即每次迭代生成 X 的概率为 $1/c$ 且每轮迭代相互独立。故此算法生成 X 必须迭代的次数是均值为 c 的几何随机变量。 $\square$

Exercise 1.2 (Ex 1.21)

令 $U_1, U_2, \dots$ 为独立的 $(0, 1)$ 均匀随机变量, 而以 N 记 n 使

$$\prod_{i=1}^n U_i \geq e^{-\lambda} > \prod_{i=1}^{n+1} U_i, \quad \text{其中 } \prod_{i=1}^0 U_i = 1$$

的 $(n \geq 0)$ 的最小值。证明 N 是具有均值 λ 的 Poisson 随机变量。

(提示: 对 n 用归纳法, 取条件于 U_1 , 证明 $P(N = n) = e^{-\lambda} \lambda^n / n!$.)

证明. 我们有 $P(N = 0) = P(1 \geq e^{-\lambda} > U_1) = P(U_1 < e^{-\lambda}) = e^{-\lambda}$, 即 $n = 0$ 时成立。

设 $n = k$ ($k \geq 0$) 时有

$$P(N = k) = \frac{1}{k!} e^{-\lambda} \lambda^k.$$

从而

$$\begin{aligned}
 P(N = k + 1) &= \int_0^1 P(N = k + 1 \mid U_1 = x) dx \\
 &= \int_{e^{-\lambda}}^1 P(xU_2 \geq e^{-\lambda}, xU_2U_3 \geq e^{-\lambda}, \dots, xU_2 \cdots U_{k+1} \geq e^{-\lambda}, xU_2 \cdots U_{k+2} < e^{-\lambda}) dx \\
 &= \int_{e^{-\lambda}}^1 P\left(U_2 \geq \frac{e^{-\lambda}}{x}, U_2U_3 \geq \frac{e^{-\lambda}}{x}, \dots, U_2 \cdots U_{k+1} \geq \frac{e^{-\lambda}}{x}, U_2 \cdots U_{k+2} < \frac{e^{-\lambda}}{x}\right) dx \\
 &= \int_{e^{-\lambda}}^1 P(U_2 \geq e^{-(\lambda + \ln x)}, U_2U_3 \geq e^{-(\lambda + \ln x)}, \dots, U_2 \cdots U_{k+1} \geq e^{-(\lambda + \ln x)}, U_2 \cdots U_{k+2} < e^{-(\lambda + \ln x)}) dx \\
 &= \int_{e^{-\lambda}}^1 \frac{1}{k!} e^{-(\lambda + \ln x)} (\lambda + \ln x)^k dx = \frac{e^{-\lambda}}{k!} \int_{e^{-\lambda}}^1 (\lambda + \ln x)^k d \ln x = \frac{e^{-\lambda}}{k!} \cdot \frac{\lambda^{k+1}}{k+1} = \frac{e^{-\lambda} \lambda^{k+1}}{(k+1)!}.
 \end{aligned}$$

故 $n = k + 1$ 时也成立, 于是 N 为均值 λ 的 Poisson 随机变量. $\square$

Exercise 1.3 (Ex 1.31)

如果 X 和 Y 是分别具有均值 $1/\lambda_1$ 和 $1/\lambda_2$ 的指数随机变量, 计算 $Z = \min(X, Y)$ 的分布. 给定 $Z = X$ 时 Z 的条件分布是什么?

解. $\forall z \in (0, +\infty)$, 我们有

$$P(Z \leq z) = 1 - P(X > z, Y > z) = 1 - (1 - F_X(z))(1 - F_Y(z)) = 1 - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)z}.$$

故 Z 服从参数为 $\lambda_1 + \lambda_2$ 的指数分布.

而给定 $Z = X$ 时, 对 $\forall z \in (0, +\infty)$ 有

$$P(Z \leq z \mid Z = X) = P(X \leq z \mid Y \geq X) = \frac{P(X \leq z, Y \geq X)}{P(Y \geq X)}.$$

先计算分子, 该式即 $P(X \leq \min(z, Y))$, 即

$$\begin{aligned}
 &\int_{-\infty}^z P(X \leq y) f_Y(y) dy + \int_z^{+\infty} P(X \leq z) f_Y(y) dy \\
 &= \int_0^z (1 - e^{-\lambda_1 y}) \lambda_2 e^{-\lambda_2 y} dy + \int_z^{+\infty} (1 - e^{-\lambda_1 z}) \lambda_2 e^{-\lambda_2 y} dy \\
 &= 1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} (1 - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)z}) - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)z} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} (1 - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)z}).
 \end{aligned}$$

再来计算分母 $P(Y \geq X)$, 即

$$\int_0^{+\infty} P(X \leq y) f_Y(y) dy = \int_0^{+\infty} (1 - e^{-\lambda_1 y}) \lambda_2 e^{-\lambda_2 y} dy = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

则 $P(Z \leq z \mid Z = X) = 1 - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)z}$, 故此时 Z 的条件分布仍是参数为 $\lambda_1 + \lambda_2$ 的指数分布.

注记 1.2. 由本题可得出一个结论: 两个速率为 v_1, v_2 的泊松过程的叠加过程的速率是 $v_1 + v_2$.

Exercise 1.4 (Ex 2.3)

对于 Poisson 过程, 证明对 $s < t$ 有

$$P(N(s) = k \mid N(t) = n) = \binom{n}{k} \left(\frac{s}{t}\right)^k \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{n-k}, k = 0, 1, \dots, n.$$

证明. 对 $k, n \in \mathbb{N}$ 且 $n \geq k$ 有

$$P(N(s) = k \mid N(t) = n) = \frac{P(N(s) = k, N(t) = n)}{P(N(t) = n)} = \frac{P(N(s) = k, N(t) - N(s) = n - k)}{P(N(t) = n)}.$$

由于 Poisson 过程具有独立增量

$$P(N(s) = k, N(t) - N(s) = n - k) = P(N(s) = k)P(N(t - s) = n - k).$$

而

$$P(N(s) = k) = \frac{e^{-\lambda s}(\lambda s)^k}{k!}, P(N(t - s) = n - k) = \frac{e^{-\lambda(t-s)}(\lambda(t-s))^{n-k}}{(n-k)!}.$$

于是

$$P(N(s) = k, N(t) = n) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda s)^k(\lambda(t-s))^{n-k}}{k!(n-k)!}.$$

又由于

$$P(N(t) = n) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}.$$

因此

$$P(N(s) = k | N(t) = n) = \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{s^k(t-s)^{n-k}}{t^n} = \binom{n}{k} \left(\frac{s}{t}\right)^k \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{n-k}.$$

这样就完成了证明。 $\square$

Exercise 1.5 (Ex 2.4)

令 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是速率为 λ 的 Poisson 过程。计算 $\mathbb{E}[N(t)N(t+s)]$ 。

解. 首先我们有

$$N(t+s) = N(t) + (N(t+s) - N(t)).$$

因此

$$\mathbb{E}[N(t)N(t+s)] = \mathbb{E}[N(t)^2] + \mathbb{E}[N(t)(N(t+s) - N(t))].$$

由于 Poisson 过程具有独立增量, 故 $N(t)$ 与 $N(t+s) - N(t)$ 独立, 于是

$$\mathbb{E}[N(t)(N(t+s) - N(t))] = \mathbb{E}[N(t)]\mathbb{E}[N(t+s) - N(t)] = \lambda t \cdot \lambda s = \lambda^2 ts.$$

而

$$\mathbb{E}[N(t)^2] = \text{Var}(N(t)) + (\mathbb{E}[N(t)])^2 = \lambda t + (\lambda t)^2.$$

从而

$$\mathbb{E}[N(t)N(t+s)] = \lambda t + \lambda^2 t^2 + \lambda^2 ts = \lambda t + \lambda^2 t(t+s).$$

Exercise 1.6 (Ex 2.5)

假设 $\{N_1(t), t \geq 0\}$ 和 $\{N_2(t), t \geq 0\}$ 是速率分别为 λ_1 和 λ_2 的独立的 Poisson 过程。证明 $\{N_1(t) + N_2(t), t \geq 0\}$ 是速率为 $\lambda_1 + \lambda_2$ 的 Poisson 过程。进而, 证明这个联合过程的首个事件来自 $\{N_1(t), t \geq 0\}$ 的概率是 $\lambda_1/(\lambda_1 + \lambda_2)$, 它独立于此事件发生的时刻。

证明. 依 Poisson 过程的定义, 易由 $\{N_1(t), t \geq 0\}$ 和 $\{N_2(t), t \geq 0\}$ 是速率分别为 λ_1 和 λ_2 的独立的 Poisson 过程, 得到:

1. $N_1(0) + N_2(0) = 0$;
2. $[N_1(t+s) + N_2(t+s)] - [N_1(t) + N_2(t)] = [N_1(t+s) - N_1(t)] + [N_2(t+s) - N_2(t)]$ 与 $N_1(t)$ 和 $N_2(t)$ 都独立, 从而也与 $N_1(t) + N_2(t)$ 独立;

$$\begin{aligned}
3. & P((N_1(t+s) + N_2(t+s)) - (N_1(s) + N_2(s)) = n) \\
&= \sum_{k=0}^n P(N_1(t+s) - N_1(s) = k, N_2(t+s) - N_2(s) = n-k) \\
&= \sum_{k=0}^n e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t} \frac{\lambda_1^k \lambda_2^{n-k}}{k!(n-k)!} t^n \\
&= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t} \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^n}{n!} t^n.
\end{aligned}$$

由定义, 我们证得 $\{N_1(t) + N_2(t), t \geq 0\}$ 是速率为 $\lambda_1 + \lambda_2$ 的 Poisson 过程。

联合过程的首个事件来自于 $\{N_1(t), t \geq 0\}$, 即 $N_1(t) = 1, N_2(t) = 0 \mid N_1(t) + N_2(t) = 1$.

$$\begin{aligned}
P(N_1(t) = 1, N_2(t) = 0 \mid N_1(t) + N_2(t) = 1) &= \frac{P(N_1(t) = 1, N_2(t) = 0)}{P(N_1(t) + N_2(t) = 1)} \\
&= \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}, \text{ 与 } t \text{ 无关。}
\end{aligned}$$

因此, 它独立于事件发生的时刻。 □

Exercise 1.7 (Ex 2.10)

公交车按速率为 λ 的 Poisson 过程到达某个车站。你从这个车站上车, 从你进入公交车的时刻开始计算你到家需要时间 R . 如果你步行, 从这个车站到家需要时间 W . 假设你的策略是: 到达车站时等待一段时间 s , 而如果在此时间内公交车还未到达, 那么你步行回家。

(a) 计算从你到达车站时直至到家的期望时间。

(b) 证明若 $W < 1/\lambda + R$, 则 (a) 部分的期望时间在取 $s = 0$ 时最小; 若 $W > 1/\lambda + R$, 则它在取 $s = \infty$ 时最小 (就是你应该继续等车); 而当 $W = 1/\lambda + R$ 时所有 s 值都给出相同的期望时间。

(c) 对于为什么当使期望时间最小时我们只需考虑 $s = 0$ 和 $s = \infty$ 的情形给出一个直观的解释。

解. (a) 设公交车在人到达车站后 T 时间到达, 记人到达车站时直至到家的时间为 X , 则

$$X = \begin{cases} T + R, & T \leq s \\ s + W & T > s \end{cases}$$

所以

$$\mathbb{E}[X] = P(X \leq s)(\mathbb{E}[X \mid X \leq s] + R) + P(X > s)(s + W).$$

因为公交车按照速率为 λ 的速率到达, 所以由无记忆性, T 与公交车到达间隔同分布, 即 $T \sim \text{Exp}(\lambda)$, 所以

$$\begin{aligned}
P(X \leq s) &= 1 - e^{-\lambda s}, \\
\mathbb{E}[X \mid X \leq s] &= \int_0^s s \frac{\lambda e^{-\lambda x} dx}{1 - e^{-\lambda s}} = \frac{-se^{-\lambda s} + (1 - e^{-\lambda s})/\lambda}{1 - e^{-\lambda s}}.
\end{aligned}$$

所以

$$\mathbb{E}[X] = (W - 1/\lambda - R)e^{-\lambda s} + 1/\lambda + R.$$

(b) 令 $f(s) = \mathbb{E}[X] \ (s \geq 0)$

$$\frac{df(s)}{ds} = -\lambda(W - 1/\lambda - R)e^{-\lambda s}.$$

若 $W < 1/\lambda + R$, 则 $f(s)$ 为单调递增函数, $s = 0$ 时 q 期望时间取最小值; 若 $W > 1/\lambda + R$ 则为单调递减函数, $s = \infty$ 时最小; 而当 $W = 1/\lambda + R$ 时期望时间为定值, 与 s 值无关。

(c) 若步行回家时间小于等车时间期望和坐车回家时间之和, 就应该立刻开始步行 ($s = 0$), 等待只是在浪费时间; 反之, 若步行回家时间大于等车时间期望和坐车回家时间之和, 就应该一直等车, 设置等车上限只是减少了选择最优策略的概率。

Exercise 1.8 (Ex 2.11)

汽车按速率为 λ 的 Poisson 过程经过某个街道位置。某人在此位置等待直至此后的 T 个时间单位她都看不到车时过街, 求此人在过街前等待的期望时间。(注意, 例如, 若在前 T 个时间单位没有车通过则等待时间是 0)

解. 设 $X_n, n \geq 1$ 为某人开始等待后一系列连续汽车通过时间间隔, 其中 X_n 为某人看见的第 $n-1$ 辆车和第 n 辆车之间的时间。记 $Y = \min\{n \mid X_n > T\}$, 此人等待的时间为 W , 则有

$$W = \sum_{k=1}^{Y-1} X_k + T.$$

又因为 $\{X_n\}$ 之间相互独立, 且都有 $P(X_n > T) = e^{-\lambda T}$, 所以 $Y \sim \text{Geo}(e^{-\lambda T})$.

所以有

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[W] &= \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{Y-1} X_k\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{Y-1} X_k \mid Y\right]\right] \\ &= \mathbb{E}[(Y-1)\mathbb{E}[X_k \mid k < Y]] \\ &= \mathbb{E}[(Y-1)]\mathbb{E}[X_k \mid X_k \leq T] \\ &= \frac{e^{\lambda T} - 1}{\lambda} - T. \end{aligned}$$

Exercise 1.9 (Ex 2.12)

按速率为 λ 的 Poisson 过程发生的事件由一个计数器记录。然而, 每当一个事件被记录时, 计数器变得在此后的 b 个时间单位不起作用, 且不再记录在此段时间中发生的任何新事件。以 $R(t)$ 记在时刻 t 前被记录的事件数。

(a) 求前 k 个事件被记录的概率。

(b) 对 $t \geq (n-1)b$, 求 $P\{R(t) \geq n\}$

解. (a) “前 k 个事件被记录” 意味着系统原始的 Poisson 过程的前 k 个事件全都被计数器记录下来。设该 Poisson 过程的到达时间间隔为 $T_1, T_2, \dots, T_k$, 它们独立同分布且服从 $\text{Exp}(\lambda)$. 第一个事件必然被记录。为了让第 2 个到第 k 个事件也全被记录, 每次事件发生后, 下一个事件的到达时间必须大于计数器的失效时间 b 。即要求对于 $i = 2, 3, \dots, k$, 都有 $T_i > b$. 由于 $T_i \sim \text{Exp}(\lambda)$, 有 $P(T_i > b) = e^{-\lambda b}$. 因此, 前 k 个事件被记录的概率为

$$P(T_2 > b, T_3 > b, \dots, T_k > b) = \prod_{i=2}^k P(T_i > b) = (e^{-\lambda b})^{k-1} = e^{-\lambda b(k-1)}.$$

(b) 记 S_n^* 为第 n 个被记录事件的发生时刻。事件 $R(t) \geq n$ 等价于 $S_n^* \leq t$ 。观察记录过程可知,除了第一个被记录的事件等待时间是普通的指数分布 $E_1 \sim \text{Exp}(\lambda)$, 对于此后的每一个被记录的事件, 其与上一个被记录事件的时间间隔均为 $b + E_i$, 其中 $E_i \sim \text{Exp}(\lambda)$ 为失效期结束后等待下一个事件到来的时间。因此, 第 n 个被记录事件的发生时刻可以表示为

$$S_n^* = E_1 + (b + E_2) + \cdots + (b + E_n) = \sum_{i=1}^n E_i + (n-1)b.$$

其中 $\sum_{i=1}^n E_i$ 即为原速率为 λ 的 Poisson 过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 中第 n 个事件的到达时刻 S_n . 于是有

$$\begin{aligned} P(R(t) \geq n) &= P(S_n^* \leq t) \\ &= P(S_n + (n-1)b \leq t) \\ &= P(S_n \leq t - (n-1)b). \end{aligned}$$

这恰好等价于原 Poisson 过程在 $t - (n-1)b$ 时间内的到达事件数大于等于 n . 故

$$P(R(t) \geq n) = P(N(t - (n-1)b) \geq n) = \sum_{k=n}^{\infty} e^{-\lambda(t-(n-1)b)} \frac{[\lambda(t-(n-1)b)]^k}{k!}.$$

Exercise 1.10 (Ex 2.21)

个体按速率为 λ 的 Poisson 过程进入系统。每个到达者独立地处在系统地各个状态。以 $a_i(s)$ 记一个人在到达 s 时间后处在状态 i 的概率。以 $N_i(t)$ 记在时刻 t 处在状态 i 的人数。证明 $N_i(t) (i \geq 1)$ 是独立的且 $N_i(t)$ 是具有均值 $\lambda E[\text{在前 } t \text{ 个单位时间在系统中的个体处在状态 } i \text{ 的时间总量}]$ 的 Poisson 随机变量。

证明. 给定在 $[0, t]$ 时间内有 $N(t) = n$ 个个体到达系统, 设它们的到达时刻为 $S_1, S_2, \dots, S_n$ 。由 Poisson 过程的性质可知, 这些到达时刻的联合分布等价于 n 个独立同分布于 $(0, t)$ 上的均匀分布随机变量的顺序统计量。

对于在 s 时刻到达的个体, 其在时刻 t 处在状态 i 的概率为 $P_i(s) = \alpha_i(t-s)$ 。由命题 2.3.2 得到,

$$\begin{aligned} N_i(t) &= \lambda t p \\ &= \lambda t \frac{1}{t} \int_0^t \alpha_i(t-s) ds \\ &\stackrel{u=t-s}{=} \lambda \int_0^t \alpha_i(u) du. \end{aligned}$$

我们来考察积分 $\int_0^t \alpha_i(u) du$ 的实际意义。设一个经过系统的个体, 其在进入系统后经过时间 u 时是否处于状态 i 的示性函数为 $I(u)$, 则 $\mathbb{E}[I(u)] = \alpha_i(u)$ 。

该个体在到达系统后的前 t 个单位时间内, 处在状态 i 的总时间期望为

$$\mathbb{E} \left[\int_0^t I(u) du \right] = \int_0^t \mathbb{E}[I(u)] du = \int_0^t \alpha_i(u) du.$$

因此, 均值恰为 $\lambda \mathbb{E}[\text{单个个体在其到达后的 } t \text{ 个单位时间内处在状态 } i \text{ 的时间总量}]$. 得证。□

Exercise 1.11 (Ex 2.39)

对复合 Poisson 过程计算 $\text{Cov}(X(s), X(t))$ 。

解. 设 $X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$ 是速率为 λ 的复合 Poisson 过程。不妨设 $s < t$, 将 $X(t)$ 拆分为两部分:

$$X(t) = X(s) + (X(t) - X(s)).$$

计算两者的协方差:

$$\begin{aligned}\operatorname{Cov}(X(s), X(t)) &= \operatorname{Cov}(X(s), X(s) + X(t) - X(s)) \\ &= \operatorname{Cov}(X(s), X(s)) + \operatorname{Cov}(X(s), X(t) - X(s)) \\ &= \operatorname{Var}(X(s)) + \operatorname{Cov}(X(s), X(t) - X(s)).\end{aligned}$$

由 Poisson 过程的独立增量性可知, 时间段 $(s, t]$ 内到达的事件数 $N(t) - N(s)$ 与时间段 $[0, s]$ 内到达的事件数 $N(s)$ 相互独立; 且对应的 X_i 相互独立。因此, 区间 $(s, t]$ 内的过程增量 $X(t) - X(s) = \sum_{i=N(s)+1}^{N(t)} X_i$ 与区间 $[0, s]$ 内的过程 $X(s) = \sum_{i=1}^{N(s)} X_i$ 相互独立。独立变量的协方差为 0, 即 $\operatorname{Cov}(X(s), X(t) - X(s)) = 0$ 。于是:

$$\operatorname{Cov}(X(s), X(t)) = \operatorname{Var}(X(s)).$$

对于复合 Poisson 过程, 其方差为 $\operatorname{Var}(X(s)) = \lambda s \mathbb{E}[X_1^2]$ 。综上, 考虑到 s 和 t 的对称性, 对于任意的 s 和 t , 有:

$$\operatorname{Cov}(X(s), X(t)) = \lambda \min\{s, t\} \mathbb{E}[X_1^2].$$

Exercise 1.12 (Ex 3.3)

用语言表述随机变量 $X_{N(t)+1}$ 代表什么? (提示: 它是哪个更新区间的长度?) 证明

$$P\{X_{N(t)+1} \geq x\} \geq \bar{F}(x).$$

当 $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ 时精确地计算上式的左边的项。

证明. $X_{N(t)+1}$ 代表第 $(N(t) + 1)$ 个更新区间的长度。由于 $N(t)$ 为直至时刻 t 的更新次数, 所以 t 落在第 $(N(t) + 1)$ 个更新区间中, 从而 $X_{N(t)+1}$ 表示包含时刻 t 的更新区间长度。

注记 1.3. 这里的更新区间均取为左闭右开, 而若取为左开右闭, 则 $X_{N(t)+1}$ 表示从时刻 t 后开始直至下一次更新发生时, 最后一个更新区间的长度。

考虑对 $S_{N(t)} = \max\{S_n : S_n \leq t\}$ 取条件, 对任意的 $y \geq 0$, 我们有

$$\begin{aligned}P(X_{N(t)+1} \geq x \mid S_{N(t)} = y) &= P(X_{N(t)+1} \geq x \mid X_{N(t)+1} > t - y) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P(N(t) = n) P(X_{n+1} \geq x \mid X_{n+1} > t - y) = \sum_{n=0}^{\infty} P(N(t) = n) P(X_1 \geq x \mid X_1 > t - y) \\ &= P(X \geq x \mid X > t - y) \geq P(X > x) = \bar{F}(x).\end{aligned}$$

显然有 $0 \leq S_{N(t)} \leq t$, 于是就有

$$P(X_{N(t)+1} \geq x) = \int_{[0, t]} P(X_{N(t)+1} \geq x \mid S_{N(t)} = y) dF_{S_{N(t)}}(y) \geq \bar{F}(x) \int_{[0, t]} dF_{S_{N(t)}}(y) = \bar{F}(x).$$

即 $P(X_{N(t)+1} \geq x) \geq \bar{F}(x)$, 即证。而若 $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, $\bar{F}(x) = e^{-\lambda x}$, 则此时 X 为连续型随机变量且 $\{N(t), t \geq 0\}$ 为具有速率 λ 的 Poisson 过程, 于是 $m(y) = \mathbb{E}[N(y)] = \lambda y$, 则由教材引理 3.4.3 及其推论有 $P(S_{N(t)} = 0) = \bar{F}(t) = e^{-\lambda t}$, $dF_{S_{N(t)}}(y) = \bar{F}(t - y) dm(y) = \lambda e^{-\lambda(t-y)} dy, y > 0$, 从而

$$\begin{aligned}P(X_{N(t)+1} \geq x) &= P(X_{N(t)+1} \geq x \mid S_{N(t)} = 0) P(S_{N(t)} = 0) + \int_{(0, t]} P(X_{N(t)+1} \geq x \mid S_{N(t)} = y) dF_{S_{N(t)}}(y) \\ &= P(X > x, X > t) + \int_{(0, t]} \lambda P(X > x, X > t - y) dy\end{aligned}$$

$$= \bar{F}(\max(x, t)) + \lambda \int_{(0, t]} \bar{F}(\max(x, t-y)) dy = e^{-\lambda \max(x, t)} + \lambda \int_0^t e^{-\lambda \max(x, t-y)} dy.$$

注记 1.4. 这里对 0 单独计算是因为 $P(S_{N(t)} = 0)$ 并不为 0 (事件 $\{X_1 > t\}$ 蕴含事件 $\{S_{N(t)} = 0\}$).

若 $t \leq x$, 则 $t-y \leq x$, 从而

$$P(X_{N(t)+1} \geq x) = e^{-\lambda x} + \lambda e^{-\lambda x} \int_0^t dy = e^{-\lambda x}(1 + \lambda t).$$

若 $0 \leq x < t$, 则有

$$P(X_{N(t)+1} \geq x) = e^{-\lambda t} + \lambda \int_0^{t-x} e^{-\lambda(t-y)} dy + \lambda e^{-\lambda x} \int_{t-x}^t dy = e^{-\lambda x}(1 + \lambda x).$$

综上可得

$$P(X_{N(t)+1} \geq x) = \begin{cases} e^{-\lambda x}(1 + \lambda t), & x \geq t, \\ e^{-\lambda x}(1 + \lambda x), & 0 \leq x < t. \end{cases}$$

这便是所要求的结果。 □

Exercise 1.13 (Ex 3.11)

考虑一个矿工陷在一个有三个门的矿井中, 1 号门引导他经两天路程后脱险, 2 号门引导他经四天路程后回到矿井, 3 号门引导他经八天路程后回到矿井。假定他在每次都等可能地选取三个门中的一个, 而以 T 记此矿工脱险所用的时间。

(a) 定义一个独立同分布随机变量序列 $X_1, X_2, \dots$ 和一个停时 N , 满足

$$T = \sum_{i=1}^N X_i.$$

注: 你也许可以考虑假设此矿工即使在到达安全地之后, 仍继续随机地取那些门。

(b) 用 Wald 方程求 $\mathbb{E}[T]$.

(c) 计算 $\mathbb{E}[\sum_{i=1}^n X_i \mid N = n]$, 注意它不等于 $\mathbb{E}[\sum_{i=1}^n X_i]$.

(d) 利用 (c) 再次推导 $\mathbb{E}[T]$.

解. (a) 取

$$X_i = \begin{cases} 2, & \text{第 } i \text{ 次时选 1 号门} \\ 4, & \text{第 } i \text{ 次时选 2 号门} \\ 8, & \text{第 } i \text{ 次时选 3 号门} \end{cases}$$

满足 $P(X_i = 2) = P(X_i = 4) = P(X_i = 8) = 1/3$, 且 $\{X_i\}$ 独立同分布。令 $N = \min\{n : X_n = 2\}$, 则 $T = \sum_{i=1}^N X_i$ 满足题目要求。

(b) 我们有

$$P(N = n) = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{3}.$$

于是 N 为参数为 $1/3$ 的几何分布, 所以 $\mathbb{E}[N] = 3 < \infty$. 又因为 $\mathbb{E}[X] = (2 + 4 + 8)/3 = 14/3$, 故由 Wald 方程可得 $\mathbb{E}[T] = \mathbb{E}[N]\mathbb{E}[X] = 14$. (单位: 天)

(c) 我们有

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n X_i \mid N = n\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n X_i \mid X_1 \neq 2, \dots, X_{n-1} \neq 2, X_n = 2\right]$$

$$= 2 + \left[\sum_{i=1}^{n-1} X_i \mid X_i \neq 2 \right] = 2 + 6(n-1) = 6n - 4.$$

但是另一方面, 我们有

$$\mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^n X_i \right] = n\mathbb{E}[X_i] = \frac{14}{3}n.$$

从而可知二者通常并不相等。

(d) 由全期望公式, $\mathbb{E}[T] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[T \mid N]] = \mathbb{E}[6N - 4] = 6\mathbb{E}[N] - 4 = 18 - 4 = 14$.

Exercise 1.14 (Ex 3.9)

考虑只有一个服务员的银行, 顾客按速率为 λ 的 Poisson 过程到达。然而当顾客到达时, 只在服务员空闲时他才能进银行。以 G 记服务时间的分布。

- (a) 顾客进银行的速率是什么?
- (b) 潜在的顾客中进银行的占多少比例?
- (c) 服务员的忙期占多少时间比例?

解. 由于只有在服务员空闲时顾客才能进入, 系统在“空闲期”和“忙期”之间交替进行, 构成一个交替更新过程。

设服务员的一个完整的“更新周期”为 T , 由一个空闲期 I 和一个忙期 B 组成。已知顾客按速率为 λ 的 Poisson 过程到达, 故空闲期 $I \sim \text{Exp}(\lambda)$, 有 $\mathbb{E}[I] = \frac{1}{\lambda}$. 忙期即为服务一位顾客的时间, 分布为 G , 设其均值为 $\mathbb{E}[S]$, 故 $\mathbb{E}[B] = \mathbb{E}[S] = \int_0^\infty x dG$.

一个周期的期望长度为 $\mathbb{E}[T] = \mathbb{E}[I] + \mathbb{E}[B] = \frac{1}{\lambda} + \int_0^\infty x dG$.

(a) 在每个周期内恰好只有一名顾客进入银行。由更新定理, 顾客进银行的长期速率为:

$$\lambda_{\text{in}} = \frac{1}{\mathbb{E}[T]} = \frac{1}{\frac{1}{\lambda} + \mathbb{E}[S]} = \frac{\lambda}{1 + \lambda \int_0^\infty x dG}.$$

(b) 潜在顾客中进银行的比例, 即进入速率与总到达速率 λ 之比:

$$P(\text{进入}) = \frac{\lambda_{\text{in}}}{\lambda} = \frac{1}{1 + \lambda \int_0^\infty x dG}.$$

(c) 服务员的忙期占时间比例为系统中忙碌时间在总时间中的占比:

$$P(\text{忙碌}) = \frac{\mathbb{E}[B]}{\mathbb{E}[T]} = \frac{\mathbb{E}[S]}{\frac{1}{\lambda} + \mathbb{E}[S]} = \frac{\lambda \int_0^\infty x dG}{1 + \lambda \int_0^\infty x dG}.$$

Exercise 1.15 (Ex 3.15)

以 $A(t)$ 和 $Y(t)$ 分别记在时刻 t 的年龄和剩余寿命。求:

- (a) $P\{Y(t) > x \mid A(t) = s\}$.
- (b) $P\{Y(t) > x \mid A(t + x/2) = s\}$.
- (c) 对 Poisson 过程计算 $P\{Y(t) > x \mid A(t + x) > s\}$.
- (d) $P\{Y(t) > x, A(t) > y\}$.
- (e) 若 $\mu < \infty$, 证明当 $t \rightarrow \infty$ 时, 以概率为 1 地有 $A(t)/t \rightarrow 0$.

解. 记更新间隔时间序列为 $\{X_n\}$, 其分布函数为 $F(x)$, 尾概率为 $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$.

(a) 条件 $A(t) = s$ 表示当前更新间隔已经持续了 s 的时间。剩余寿命 $Y(t) > x$ 等价于总间隔时

间 $X > s + x$. 所以有:

$$P\{Y(t) > x \mid A(t) = s\} = P\{X > s + x \mid X > s\} = \frac{\bar{F}(s+x)}{\bar{F}(s)}.$$

(b) 考虑上一次更新发生的时间 $t + x/2 - s$ 与时刻 t 的关系: 若 $s \leq x/2$, 则在 $(t, t + x/2]$ 之间必有更新发生, 故必然有 $Y(t) \leq x/2 < x$, 概率为 0. 若 $s > x/2$, 则 $(t, t + x/2]$ 内无更新. 已知在 $t + x/2$ 时年龄为 s , 要求 $Y(t) > x$ 相当于要求在 $t + x/2$ 后还要存活至少 $x/2$. 所以有:

$$P\{Y(t) > x \mid A(t + x/2) = s\} = \begin{cases} 0, & s \leq x/2 \\ \frac{\bar{F}(s+x/2)}{\bar{F}(s)}, & s > x/2 \end{cases}$$

(c) 对于 Poisson 过程, 若 $s \geq x$, 条件区间 $(t + x - s, t + x]$ 包含结论区间 $(t, t + x]$, 故区间内无事件发生必定成立, 概率为 1. 若 $s < x$, 利用独立增量性:

$$P\{Y(t) > x \mid A(t + x) > s\} = P\{\text{在}(t, t + x - s]\text{内无事件}\} = e^{-\lambda(x-s)}.$$

(d) $A(t) > y$ 且 $Y(t) > x$ 表示在整个区间 $(t - y, t + x]$ 内无更新发生. 平移观察区间可知, 这等价于在时刻 $t + x$ 的年龄大于 $x + y$:

$$P\{Y(t) > x, A(t) > y\} = P\{A(t + x) > x + y\}.$$

(e) 记 S_n 为第 n 次更新发生的时刻, 由年龄的定义有 $A(t) = t - S_{N(t)}$, 故

$$\frac{A(t)}{t} = 1 - \frac{S_{N(t)}}{t} = 1 - \left(\frac{S_{N(t)}}{N(t)} \cdot \frac{N(t)}{t} \right).$$

由强大数定律, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $\frac{S_{N(t)}}{N(t)} \rightarrow \mu$ (a.s.) 且 $\frac{N(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu}$ (a.s.). 所以有:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{A(t)}{t} = 1 - \mu \cdot \frac{1}{\mu} = 0 \text{ (a.s.)}.$$

原命题得证。

Exercise 1.16 (Ex 3.20)

考虑连续投掷一枚均匀的硬币。

(a) 计算直到模式 HHTHHTT 出现的平均投掷次数。

(b) 在模式 HHTT 或 HTHT 中哪个对投掷要求更长的期望时间?

解. (a) 由硬币均匀则有掷出正面 H 的概率 $p = 1/2$, 掷出反面 T 的概率 $q = 1/2$. 模式 HHTHHTT 以 H 始以 T 结尾, 故由例 3.5 (A) 有

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\text{直到HHTHHTT出现的投掷次数}] &= \mathbb{E}[\text{该模式两次出现间的投掷次数}] \\ &= p^{-4}q^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-7} = 2^7 = 128 \text{ (次)}. \end{aligned}$$

即平均投掷次数为 128 次。

(b) 由例 3.5 (A) 有 $\mathbb{E}[\text{直到HHTT的时间}] = \mathbb{E}[\text{该模式两次出现间的时间}] = p^{-2}q^{-2} = 2^4 = 16$. 并且又有 $\mathbb{E}[\text{直到HTHT的时间}] = \mathbb{E}[\text{直到HT的时间}] + p^{-2}q^{-2} = p^{-1}q^{-1} + p^{-2}q^{-2} = 20 > 16$. 故模式 HTHT 对投掷要求更长的期望时间。

Exercise 1.17 (Ex 3.21)

一个赌徒在每次赌博中, 独立于过去的结果, 分别以概率 p 和 $1 - p$ 赢或输一个单位。假设该赌徒的策略是: 当他首次连续赢 k 次时离开。求在他离开时

(a) 他赢的期望次数, (b) 他已赢得的赌资的期望数。

解. (a) 记 $X_i = \mathbf{1}_{\{\text{第 } i \text{ 次赢}\}}$, 由于每次赌博相互独立, 则 X_i 相互独立。记 $N = \min\{n : X_n + X_{n-1} + \cdots + X_{n-k+1} = k\}$. 则 $N = n$ 当且仅当 $X_{n-k+1} = \cdots = X_n = 1$, 与 $X_{n+1}, X_{n+2}, \cdots$ 均独立, 则 N 为 $X_1, X_2, \cdots$ 的一个停时, 且

$$T_1 = \sum_{i=1}^N X_i$$

即为离开时赢的次数。由例 3.5 (A) 有

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\text{直到连续赢 } k \text{ 次的赌博次数}] &= \mathbb{E}[N] \\ &= \frac{1}{p^k} + \mathbb{E}[\text{直到连续赢 } (k-1) \text{ 次的赌博次数}] = \cdots = \sum_{i=1}^k \left(\frac{1}{p}\right)^i < \infty. \end{aligned}$$

而 $\mathbb{E}[X_i] = p < \infty$, 则由 Wald 方程可得

$$\mathbb{E}[T_1] = \mathbb{E}[N] \cdot \mathbb{E}[X_i] = p \cdot \sum_{i=1}^k \left(\frac{1}{p}\right)^i = \sum_{i=1}^k \left(\frac{1}{p}\right)^{i-1} = \frac{p - p^{1-k}}{p - 1}.$$

(b) 记 $Y_i = 2X_i - 1$, 即第 i 次赢时 $Y_i = 1$, 第 i 次输时 $Y_i = -1$, 则 Y_i 也相互独立。记 $\tilde{N} = \min\{n : Y_n + Y_{n-1} + \cdots + Y_{n-k+1} = k\}$. 则 $\tilde{N} = n$ 当且仅当 $Y_{n-k+1} = \cdots = Y_n = 1$, 与 $Y_{n+1}, Y_{n+2}, \cdots$ 均独立, 则 $\tilde{N}$ 为 $Y_1, Y_2, \cdots$ 的一个停时, 且

$$T_2 = \sum_{i=1}^{\tilde{N}} Y_i$$

为离开时赢得的赌资。又 $\mathbb{E}[Y_i] = p + (-1)(1-p) = 2p - 1 < \infty$, 而

$$\mathbb{E}[\tilde{N}] = \mathbb{E}[N] = \sum_{i=1}^k \left(\frac{1}{p}\right)^i < \infty.$$

则由 Wald 方程有

$$\mathbb{E}[T_2] = \mathbb{E}[\tilde{N}] \mathbb{E}[Y_i] = (2p - 1) \sum_{i=1}^k \left(\frac{1}{p}\right)^i = \frac{(1 - p^{-k})(2p - 1)}{p - 1}.$$

Exercise 1.18 (Ex 3.22)

考虑连续投掷一个出现正面的概率为 p 的硬币。求直至下列序列出现时的期望投掷数:

(a) $A = \text{HHTTHH}$, (b) $B = \text{HTHTT}$.

现在假设 $p = 1/2$.

(c) 求 $P\{A \text{ 在 } B \text{ 前发生}\}$.

(d) 求直至 A 或 B 之一发生时的期望投掷数。

解. (a) 同样是由例 3.5 (A) 有 $\mathbb{E}[\text{HHTTHH}] = \mathbb{E}[\text{HHTTHH} | \text{HH}] + \mathbb{E}[\text{HH}]$. 以及

$$\mathbb{E}[\text{HHTTHH} | \text{HH}] = \mathbb{E}[\text{HHTTHH} | \text{HHTTHH}] = p^{-2}q^{-2}p^{-2} = p^{-4}q^{-2}.$$

$$\mathbb{E}[\text{HH}] = \mathbb{E}[\text{HH} | \text{H}] + \mathbb{E}[\text{H}] = \mathbb{E}[\text{HH} | \text{HH}] + \mathbb{E}[\text{H}] = p^{-2} + p^{-1}.$$

于是我们得到 $\mathbb{E}[\text{HHTTHH}] = p^{-4}q^{-2} + p^{-2} + p^{-1}$.

(b) 同理可得 $\mathbb{E}[\text{HTHTT}] = \mathbb{E}[\text{HTHTT} | \text{HTHTT}] = p^{-2}q^{-3}$.

(c)(d) 现在 $p = q = 1/2$, 从而代入 (a)(b) 的结果可得

$$\mathbb{E}[\text{HHTTHH}] = 64 + 4 + 2 = 70, \mathbb{E}[\text{HTHTT}] = 32.$$

我们设 $M = \min\{N_A, N_B\}$, 即两个花样中首次出现其一时的投掷次数, 再记 P_A 为 A 先于 B 出现的概率。这类题目通常的思路是先求 $\mathbb{E}[N_{A|B}]$ 与 $\mathbb{E}[N_{B|A}]$, 再利用 $\mathbb{E}[N_A] = \mathbb{E}[M] + \mathbb{E}[N_{A|B}](1 - P_A)$, $\mathbb{E}[N_B] = \mathbb{E}[M] + \mathbb{E}[N_{B|A}]P_A$, 求解方程组得到答案。

由于在出现模式 $B = \text{HTHTT}$ 之后, 对模式 $A = \text{HHTTHH}$ 没有可利用的尾子序列, 因此我们有 $\mathbb{E}[\text{HHTTHH} | \text{HTHTT}] = \mathbb{E}[\text{HHTTHH}] = 70$. 而在出现模式 $A = \text{HHTTHH}$ 之后, 对模式 $B = \text{HTHTT}$ 可以利用的最长尾子序列为 H , 故 $\mathbb{E}[\text{HTHTT} | \text{HHTTHH}] = \mathbb{E}[\text{HTHTT} | H] = \mathbb{E}[\text{HTHTT}] - \mathbb{E}[H] = 32 - 2 = 30$. 于是有 $70 = \mathbb{E}[M] + 70(1 - P_A)$, $32 = \mathbb{E}[M] + 30P_A$. 解这个二元一次方程组可得 $P_A = 8/25 = 0.32$, $\mathbb{E}[M] = 112/5 = 22.4$. 故 $P\{A \text{ 在 } B \text{ 前发生}\} = 8/25$, 且直至 A 或 B 之一发生时的期望投掷数为 $\mathbb{E}[M] = 112/5$.

Exercise 1.19 (Ex 3.24)

从一副标准的扑克牌中 (不考虑大小王) 每次有放回地抽出一张。求直至连续出现四张同花色的牌时所抽牌的期望数。

解. 不考虑大小王: 记 4 种花色为 A, B, C, D , 即为求模式 $XXXX$ (X 为 A 或 B 或 C 或 D) 首次出现时所抽牌数的期望。设所求期望为 $\mathbb{E}[XXXX]$, 假设连续抽取扑克牌, 在任意时刻, 若最后的四张牌花色相同, 则称发生了一次更新, 于是更新之间的时间间隔的期望为

$$\mathbb{E}[\text{更新之间的时间}] = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\mathbb{E}[XXXX].$$

这是因为若下一张牌仍同花色则更新之间的时间为 1, 否则为 $\mathbb{E}[XXXX]$. 而由 Blackwell 定理有 $\mathbb{E}[\text{更新之间的时间}] = (4/4^4)^{-1} = 64$. 代入解得 $\mathbb{E}[XXXX] = 85$.

另解: 设所求期望为 $\mathbb{E}[XXXX]$, 取条件于第一次抽牌结果, 我们有

$$\mathbb{E}[XXXX] = \frac{1}{4}\mathbb{E}[XXXX | \text{第一次为 } A] + \cdots + \frac{1}{4}\mathbb{E}[XXXX | \text{第一次为 } D].$$

由 4 花色对称性, $\mathbb{E}[XXXX] = \mathbb{E}[XXXX | \text{第一次为 } A] \triangleq \mathbb{E}[XXXX | A]$. 由各次抽牌结果独立, 再取条件于第二次结果, 就有

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[XXXX] &= \mathbb{E}[XXXX | A] \\ &= \frac{1}{4}\mathbb{E}[XXXX | \text{前 2 次为 } AA] + \frac{1}{4}\mathbb{E}[XXXX | \text{前 2 次为 } AB] + \cdots + \frac{1}{4}\mathbb{E}[XXXX | \text{前 2 次为 } AD] \\ &\triangleq \frac{1}{4}\mathbb{E}[XXXX | AA] + \frac{3}{4}(1 + \mathbb{E}[XXXX | B]) = \frac{1}{4}\mathbb{E}[XXXX | AA] + \frac{3}{4}(1 + \mathbb{E}[XXXX | A]). \end{aligned}$$

化简后再继续取条件于第三次抽牌结果, 我们有

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[XXXX] &= 3 + \mathbb{E}[XXXX | AA] = 3 + \frac{1}{4}\mathbb{E}[XXXX | AAA] + \frac{3}{4}(2 + \mathbb{E}[XXXX | A]). \\ \mathbb{E}[XXXX] &= 18 + \mathbb{E}[XXXX | AAA] = 18 + \frac{1}{4} \cdot 4 + \frac{3}{4}(3 + \mathbb{E}[XXXX | A]) \Rightarrow \mathbb{E}[XXXX] = 85. \end{aligned}$$

Exercise 1.20 (Ex 3.28)

在例 3.6 (C) 中, 假设到达的更新过程是均值为 μ 的 Poisson 过程。如果每当有 N 个旅客等待时就开走一辆火车, 以 N^* 记使长程平均费用最小的 N 值。另一类型策略是每 T 个时间单位开走一辆火车。计算此策略的长程平均费用, 并以 T^* 记使之最小的 T 值。证明每当有 N^* 个

旅客等待时就开走一辆火车的策略, 比每 T^* 个时间单位就开走一辆火车的策略, 产生较小的平均费用。

证明. 采用每 T 个时间单位开走一辆车的策略时, 则每个循环长度均为 T , 设 $N(T)$ 为时间长度为 T 的区间中到达的人数, 则由题有 $N(T) \sim \text{Poi}(\mu T)$. 给定 $N(T) = n$ 时, 记 S_k 为第 k 个人到达的时间, 则 $S_1, S_2, \dots, S_n$ 与 $(0, T)$ 上均匀分布的次序统计量同分布。于是可等效地看作将 $[0, T]$ 以 $S_1, \dots, S_n$ 为节点随机分成 $(n+1)$ 段, 每段上人数依次为 $0, 1, \dots, n$, 则平均每段人数为 $(0+1+\dots+n)/(n+1) = n/2$, 故由此可得

$$\mathbb{E}[\text{一个循环费用} \mid N(T) = n] = \frac{n}{2} \cdot cT + K = \frac{cT}{2} N(T) + K.$$

于是我们得到

$$\mathbb{E}[\text{一个循环费用}] = K + \frac{cT}{2} \mu T = K + \frac{c\mu T^2}{2}.$$

因此此策略支付的长程平均费用为

$$\frac{K}{T} + \frac{c\mu T}{2} \geq 2\sqrt{\left(\frac{K}{T}\right)\left(\frac{c\mu T}{2}\right)} = \sqrt{2Kc\mu}.$$

当且仅当 $K/T = c\mu T/2$ 时取等号, 也即

$$T^* = \sqrt{\frac{2K}{c\mu}}.$$

而采取 3.6 (C) 中的策略时, 由题知平均费用为

$$\frac{cN}{2} - \frac{c}{2} + \frac{K\mu}{N} \geq 2\sqrt{\left(\frac{cN}{2}\right)\left(\frac{K\mu}{N}\right)} - \frac{c}{2} = \sqrt{2Kc\mu} - \frac{c}{2}.$$

当且仅当 $cN/2 = K\mu/N$ 时取等号, 也即

$$N^* = \sqrt{\frac{2K\mu}{c}}.$$

于是得到每有 N^* 个旅客等待时开走一辆火车产生的平均费用较小, 这样就完成了证明。 $\square$

注记 1.5. 这里的 μ 是 Poisson 过程的速率, 而例 3.6 (C) 中的 μ 是旅客平均到达时间间隔, 因此我们代入时应代入 $1/\mu$ 而不是 μ .

Exercise 1.21 (Ex 3.29)

小汽车的寿命是一个分布为 F 的随机变量。当汽车损坏或年龄达到 A 时, 有一个以旧换新的策略。以 $R(A)$ 记一辆用了 A 年的车的卖出价格。损坏的车不再有价值。以 C_1 记一辆新车的价格, 且假设每当车毁坏时再以旧换新要付额外费用 C_2 .

(a) 每次购买一辆新车时说一个循环开始。计算单位时间长程平均费用。

(b) 每次在用的一辆车损坏时说一个循环开始。计算单位时间长程平均费用。

注: 在 (a) 和 (b) 两种情形, 你要计算在一个循环中的期望费用与一个循环的期望时间的比值。当然在这两种算法下得到的答案应该是相同的。

解. (a) 记汽车寿命为 X , 则由题有 $X \sim F$. 于是一个循环支付的费用为

$$\begin{cases} C_1 + C_2, & X \leq A \\ C_1 - R(A), & X > A \end{cases}$$

一个循环的长度为

$$\begin{cases} X, & X \leq A \\ A, & X > A \end{cases}$$

则有 $\mathbb{E}[\text{一个循环的费用}] = (C_1 + C_2)F(A) + (C_1 - R(A))\bar{F}(A) = C_1 + C_2F(A) - R(A)\bar{F}(A)$. 以及

$$\mathbb{E}[\text{一个循环的长度}] = \mathbb{E}[X | X \leq A] + A\bar{F}(A) = \int_0^A x dF(x) + A\bar{F}(A).$$

故长程平均费用为

$$\frac{C_1 + C_2F(A) - R(A)\bar{F}(A)}{\int_0^A x dF(x) + A\bar{F}(A)}.$$

(b) 我们有

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\text{一个循环的长度}] &= \int_0^{+\infty} \mathbb{E}[\text{一个循环的长度} | X = x] dF(x) \\ &= \int_0^A x dF(x) + \int_A^{+\infty} (A + \mathbb{E}[\text{一个循环的长度}]) dF(x) \\ &= \int_0^A x dF(x) + A\bar{F}(A) + \bar{F}(A)\mathbb{E}[\text{一个循环的长度}]. \end{aligned}$$

则

$$\mathbb{E}[\text{一个循环的长度}] = \frac{1}{F(A)} \left(\int_0^A x dF(x) + A\bar{F}(A) \right).$$

又

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\text{一个循环的费用}] &= \int_0^{+\infty} \mathbb{E}[\text{一个循环的费用} | X = x] dF(x) \\ &= \int_0^A (C_1 + C_2) dF(x) + \int_A^{+\infty} (C_1 - R(A) + \mathbb{E}[\text{一个循环的费用}]) dF(x) \\ &= (C_1 + C_2)F(A) + (C_1 - R(A))\bar{F}(A) + \bar{F}(A)\mathbb{E}[\text{一个循环的费用}]. \end{aligned}$$

则

$$\mathbb{E}[\text{一个循环的费用}] = \frac{1}{F(A)} (C_1 + C_2F(A) - R(A)\bar{F}(A)).$$

故长程平均费用为

$$\frac{C_1 + C_2F(A) - R(A)\bar{F}(A)}{\int_0^A x dF(x) + A\bar{F}(A)}.$$

Exercise 1.22 (Ex 3.31)

一个包含四个部件的系统称为在工作，如果每当有部件 1 和 2 中至少有一个在工作，又有部件 3 和 4 中至少有一个在工作。假设部件 i 按照具有非格点分布 F_i 和 G_i ($i = 1, 2, 3, 4$) 的交替更新过程交替地处于工作状态和失效状态。若这些交替更新过程都是独立的，求 $\lim_{t \rightarrow \infty} P\{\text{系统在时刻 } t \text{ 在工作}\}$ 。

解. 设 F_i 的均值是 μ_i ，以及 G_i 的均值是 ν_i ，那么我们有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(\text{部件 } i \text{ 在工作状态}) = \frac{\mu_i}{\mu_i + \nu_i}.$$

系统工作的概率即 1, 2 中至少有一个在工作的概率乘 3, 4 中至少有一个在工作的概率，即为

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P\{\text{系统在时刻 } t \text{ 在工作}\} = \left(1 - \frac{\nu_1\nu_2}{(\mu_1 + \nu_1)(\mu_2 + \nu_2)}\right) \left(1 - \frac{\nu_3\nu_4}{(\mu_3 + \nu_3)(\mu_4 + \nu_4)}\right).$$

Exercise 1.23 (Ex 3.32)

考虑一个按速率为 λ 的 Poisson 过程到达的单条服务线排队系统, 其具有均值为 μ_G 的服务分布 G . 假设 $\lambda\mu_G < 1$.

- 求系统空闲的时间比例 P_0 .
- 当系统非空时就称为在忙 (故而服务线在忙)。计算忙期的平均长度。
- 利用 (b) 部分和 Wald 方程计算在一个忙期中服务过的期望顾客数。

解. (a) 分别以 I 与 B 记空闲期与忙期长度, 由于顾客按速率 λ 的 Poisson 过程到达, 则 I 为顾客全离开直至下一个顾客到达的时间间隔。由 Poisson 过程有独立增量及指数分布的无记忆性, 我们有 $\mathbb{E}[I] = 1/\lambda$. 而由教材定理 3.6.2, 在接受服务的时间平均人数 = $\lambda\mathbb{E}[\text{一个顾客的服务时间}] = \lambda\mu_G$. 由于只有一条服务线, 我们有 $P_0 = (t - \lambda\mu_G t)/t = 1 - \lambda\mu_G$.

(b) 我们有

$$P_0 = \frac{\mathbb{E}[I]}{\mathbb{E}[I] + \mathbb{E}[B]} = 1 - \lambda\mu_G = \frac{1/\lambda}{1/\lambda + \mathbb{E}[B]}.$$

解得忙期的平均长度为

$$\mathbb{E}[B] = \frac{\mu_G}{1 - \lambda\mu_G}.$$

(c) 记 N 为一个忙期中服务的顾客数, 且记 Y_i 为一个忙期中第 i 个顾客的服务时间, 以及记 X_i 为第 i 个顾客与第 $(i+1)$ 个顾客的到达时间间隔, 则我们有

$$B = \sum_{i=1}^N Y_i.$$

于是 $N = n \Leftrightarrow Y_1 \geq X_1, Y_2 + Y_1 \geq X_2 + X_1, \dots, Y_{n-1} + \dots + Y_1 \geq X_{n-1} + \dots + X_1, Y_n + \dots + Y_1 < X_n + \dots + X_1$. 由 $\{Y_i\}$ 独立同分布, $\{N = n\}$ 与 $Y_{n+1}, \dots$ 无关, 故 N 为 $Y_1, Y_2, \dots$ 的一个停时。从而由 Wald 方程可得

$$\mathbb{E}[B] = \frac{\mu_G}{1 - \lambda\mu_G} = \mathbb{E}[N]\mathbb{E}[Y_i] = \mathbb{E}[N] \cdot \mu_G.$$

$$\mathbb{E}[N] = \frac{1}{1 - \lambda\mu_G}.$$

即为一个忙期中服务过的顾客数的期望。

1.2.2 往年考题**Exercise 1.24 (2025 春期中 T6)**

设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 为一更新过程, 且其达到间隔时间 $X_1, X_2, \dots$ 均服从均匀分布 $U[1, 3]$.

- 求更新函数 $m(t)$ 的表达式, 其中 $0 < t < 3$.
- 利用关键更新定理求

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{-(t-s)} dm(s).$$

- 设 $Y(t)$ 表示时刻 t 的剩余寿命, 求

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t Y(s) ds / t.$$

- 求 $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[Y(t)]$.

解. (1) 由于间隔时间大于1, 于是 $m(t) = 0, 0 < t < 1$. 当 $t \in [1, 2)$ 时, 将 F 为 $U(1, 3)$ 的分布函数代入更新方程

$$\begin{aligned} m(t) &= F(t) + \int_0^t m(t-x) dF(x) \\ &= \frac{t-1}{2} + \frac{1}{2} \int_1^t m(t-x) dx = \frac{t-1}{2} + \frac{1}{2} \int_0^{t-1} m(x) dx = \frac{t-1}{2}. \end{aligned}$$

当 $t \in [2, 3)$ 时

$$\begin{aligned} m(t) &= F(t) + \int_0^t m(t-x) dF(x) \\ &= \frac{t-1}{2} + \frac{1}{2} \int_1^t m(t-x) dx = \frac{t-1}{2} + \frac{1}{2} \int_0^{t-1} m(x) dx \\ &= \frac{t-1}{2} + \frac{1}{2} \int_1^{t-1} \frac{x-1}{2} dx = \frac{t-1}{2} + \frac{(t-2)^2}{8} = \frac{t^2}{8}. \end{aligned}$$

综上可得

$$m(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < 1, \\ (t-1)/2, & 1 \leq t < 2, \\ t^2/8, & 2 \leq t < 3. \end{cases}$$

(2) 令 $h(t) = e^{-t}$, 可以验证 $h(t)$ 恒正递减且在 $(0, \infty)$ 上可积, 因此满足直接 Riemann 可积. 容易计算间隔时间的期望为2, 从而由关键更新定理

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{-(t-s)} dm(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_0^t e^{-s} ds = \frac{1}{2}.$$

(3) 记间隔时间对应随机变量为 $X \sim U[1, 3]$, 由更新报酬过程理论可得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t Y(s) ds / t = \frac{\mathbb{E}[X^2]}{2\mathbb{E}[X]} = \frac{13}{12}.$$

(4) 由教材命题 3.4.6 可得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[Y(t)] = \frac{\mathbb{E}[X^2]}{2\mathbb{E}[X]} = \frac{13}{12}.$$

Exercise 1.25 (2025 春期中 T7, 附加题)

设 $\{N_D(t), t \geq 0\}$ 为一延迟更新过程, 且其达到间隔时间 X_1 和 X_2 分别服从参数为 λ 和 μ 的指数分布. 试求更新函数 $m_D(t)$ 的精确表达式.

解. 先不看延迟更新的部分, 当作 $X_1 = 0$, 先求解后半部分普通更新过程 $N(t)$ 的更新函数 $m(t)$.

法一: 注意 Poisson 过程可以由如下定义: 设 $\{X_n\}$ 独立同分布且 $X_n \sim \text{Exp}(\mu)$, 第 n 个事件发生的时刻 S_n 为 $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. 这样定义的计数过程为速率为 μ 的 Poisson 过程, 则本题的后半部分更新过程实际上就是一个参数为 μ 的 Poisson 过程 $N(t)$, 故 $m(t) = \mathbb{E}[N(t)] = \mu t$.

法二: 设 $X_1 \sim F, X_2 \sim G$, 记 $m(t) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t)$. 则有更新方程

$$\begin{aligned} m(t) &= G(t) + \int_0^t m(t-x) dG(x) = 1 - e^{-\mu t} + \int_0^t m(t-x) \mu e^{-\mu x} dx \\ &= 1 - e^{-\mu t} + \int_0^t m(x) \mu e^{-\mu(t-x)} dx = 1 - e^{-\mu t} + \mu e^{-\mu t} \int_0^t m(x) e^{\mu x} dx. \end{aligned}$$

于是 $m'(t) = \mu$. 代入 $m(0) = 0$, 得 $m(t) = \mathbb{E}[N(t)] = \mu t$.

再计算延迟更新过程的更新函数 $m_D(t)$.

法一：利用延迟更新过程的更新方程

$$\begin{aligned} m_D(t) &= F(t) + \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t) * F(t) = F(t) + \int_0^t m(t-x) dF(x) \\ &= 1 - e^{-\lambda t} + \int_0^t \mu(t-x) \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= 1 - e^{-\lambda t} + \mu t + \frac{\mu}{\lambda} e^{-\lambda t} - \frac{\mu}{\lambda}. \end{aligned}$$

法二：对首次更新发生的时刻 s 取条件

$$m_D(t) = \mathbb{E}[N_D(t)] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[N_D(t) | X_1 = s]]$$

且有

$$\mathbb{E}[N_D(t) | X_1 = s] = \begin{cases} 1 + \mathbb{E}[N(t-s)], & t > s, \\ 0, & t \leq s. \end{cases}$$

则

$$\begin{aligned} m_D(t) &= \int_0^t (1 + \mathbb{E}[N(t-s)]) \lambda e^{-\lambda s} ds \\ &= \int_0^t (1 + \mu(t-s)) \lambda e^{-\lambda s} ds \\ &= 1 - e^{-\lambda t} + \mu t + \frac{\mu}{\lambda} e^{-\lambda t} - \frac{\mu}{\lambda}. \end{aligned}$$

故更新函数的精确表达式为

$$m_D(t) = 1 - e^{-\lambda t} + \mu t + \frac{\mu}{\lambda} e^{-\lambda t} - \frac{\mu}{\lambda}.$$

Exercise 1.26 (2024 春期中 T2)

考虑一个 $M/G/\infty$ 系统，顾客到达系统的规律可以用齐次 Poisson 过程来描述，单位时间内平均到达的顾客数为 5，每个顾客需要服务员提供的服务时间相互独立，服从区间 $(1, 3)$ 上的均匀分布，系统有无穷多个服务员（即顾客到达系统后立即能得到服务）。

- (1) 求于 $(0, 4]$ 到达，且于时刻 5 未被服务完毕的顾客人数 M_1 服从的分布；
- (2) 求于 $(0, 4]$ 到达，且于 $(4, 5]$ 内被服务完毕的顾客人数 M_2 服从的分布；
- (3) 求于 $(3, 4]$ 到达，且于时刻 5 未被服务完毕的顾客人数 M_3 服从的分布；
- (4) 判断 M_1, M_2, M_3 两两之间的独立性。

解. 服务时间 G 的密度为 $g(x) = \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{1 < x < 3\}}$. 其分布函数为

$$G(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ \frac{x-1}{2}, & 1 \leq x \leq 3, \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

则服务时间的生存函数为

$$\bar{G}(x) = 1 - G(x) = \begin{cases} 1, & x < 1, \\ \frac{3-x}{2}, & 1 \leq x \leq 3, \\ 0, & x > 3. \end{cases}$$

(1) 于 $(0, 4]$ 中 s 时刻到达, 且于时刻 5 未被服务完毕的概率为

$$P_1(s) = \begin{cases} \overline{G}(5-s), & s \leq 4, \\ 0, & s > 4 \end{cases} = \begin{cases} \frac{s-2}{2}, & 2 \leq s \leq 4, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

则由分类 Poisson 过程有

$$M_1 \sim \text{Poi} \left(5 \int_0^4 P_1(s) ds \right) = \text{Poi}(5).$$

(2) 于 $(0, 4]$ 中 s 时刻到达, 且于 $(4, 5]$ 内被服务完毕的概率为

$$P_2(s) = \begin{cases} G(5-s) - G(4-s), & 1 < s \leq 4, \\ 0, & 0 < s \leq 1 \text{ 或 } s > 4 \end{cases} = \begin{cases} \frac{s-1}{2}, & 1 < s \leq 2, \\ \frac{1}{2}, & 2 < s \leq 3, \\ \frac{4-s}{2}, & 3 < s \leq 4, \\ 0, & 0 < s \leq 1 \text{ 或 } s > 4 \end{cases}$$

则由分类 Poisson 过程有

$$M_2 \sim \text{Poi} \left(5 \int_0^4 P_2(s) ds \right) = \text{Poi}(5).$$

(3) 于 $(3, 4]$ 中 s 时刻到达, 且于时刻 5 未被服务完毕的概率为

$$P_3(s) = \begin{cases} 0, & s \leq 3, \\ \overline{G}(5-s), & 3 < s \leq 4, \\ 0, & s > 4 \end{cases} = \begin{cases} 0, & s \leq 3, \\ \frac{s-2}{2}, & 3 < s \leq 4, \\ 0, & s > 4. \end{cases}$$

则由分类 Poisson 过程有

$$M_3 \sim \text{Poi} \left(5 \int_3^4 P_3(s) ds \right) = \text{Poi} \left(\frac{15}{4} \right).$$

(4) 由分类 Poisson 过程, M_1 和 M_2 是独立的, M_2 和 M_3 也是独立的, 而 M_1 和 M_3 不是独立的, 具体原因考虑这三种类型的顾客两两之间是否有交集即可。

Exercise 1.27 (2024 春期中 T4)

以 $A(t)$ 和 $Y(t)$ 记一个更新过程在时刻 t 的年龄和剩余寿命, 且假设更新间隔服从参数为 λ 的指数分布, 求 $P(Y(t) > x \mid A(t+x) > s)$, 其中 $s < t+x$.

解. (1) 当 $s < x$ 时, $A(t+x) > s$ 说明 $(t+x-s, t+x)$ 时间段内不可能发生更新, 则利用指数分布的无记忆性和生存函数 $\overline{F}(x) = e^{-\lambda x}$ 有

$$\begin{aligned} & P(Y(t) > x \mid A(t+x) > s) \\ &= P((t, t+x) \text{ 时间段内不发生更新} \mid (t+x-s, t+x) \text{ 时间段内不发生更新}) \\ &= \frac{P((t, t+x) \text{ 时间段内不发生更新}, (t+x-s, t+x) \text{ 时间段内不发生更新})}{P((t+x-s, t+x) \text{ 时间段内不发生更新})} \\ &= \frac{P((t, t+x) \text{ 时间段内不发生更新})}{P((t+x-s, t+x) \text{ 时间段内不发生更新})} = \frac{\overline{F}(x)}{\overline{F}(s)} = e^{-\lambda(x-s)}. \end{aligned}$$

(2) 当 $x \leq s < t+x$ 时, $A(t+x) > s$ 就说明在时刻 $t+x$ 距离上一次更新的时间间隔大于 s , 也就大于 x , 所以 $(t, t+x)$ 时间段内不可能发生更新, 这就说明 t 时刻距离下一次更新的时间间隔大于 x , 即 $Y(t) > x$ 必然发生。因此 $P(Y(t) > x \mid A(t+x) > s) = 1$.

Exercise 1.28 (2024 春期中 T5)

观察一系列独立同分布的离散随机变量序列 $\{W_n, n \geq 1\}$, 已知

$$P(W_1 = 0) = \frac{1}{6}, P(W_1 = 1) = \frac{1}{3}, P(W_1 = 2) = \frac{1}{2}.$$

- (1) 分别求等待花样“121”和花样“212”首次发生所需要的期望时间;
- (2) 给定花样“121”已发生, 求等待花样“212”首次发生所需要的额外期望时间;
- (3) 求等待花样“121”或花样“212”首次发生所需要的期望时间;
- (4) 求花样“121”于花样“212”之前发生的概率。

解. (1) “121”有重叠“1”, “1”没有重叠; “212”有重叠“2”, “2”没有重叠, 则

$$\mathbb{E}[N_{121}] = (P^2(W_1 = 1)P(W_1 = 2))^{-1} + (P(W_1 = 1))^{-1} = 21,$$

$$\mathbb{E}[N_{212}] = (P(W_1 = 1)P^2(W_1 = 2))^{-1} + (P(W_1 = 2))^{-1} = 14.$$

(2) 花样“121”给花样“212”提供了花样“21”, 并注意到“21”没有重叠, 因此

$$\mathbb{E}[N_{212|121}] = \mathbb{E}[N_{212}] - \mathbb{E}[N_{21}] = 14 - 6 = 8.$$

类似地, 花样“212”给花样“121”提供了花样“12”, 并注意到“12”没有重叠, 因此

$$\mathbb{E}[N_{121|212}] = \mathbb{E}[N_{121}] - \mathbb{E}[N_{12}] = 21 - 6 = 15.$$

(3)(4) 设 $P_A = P(\text{花样“121”于花样“212”之前发生})$, $M = \min(N_{121}, N_{212})$. 对花样“121”是与否于花样“212”之前发生取条件, 有

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[N_{121}] &= \mathbb{E}[M] + \mathbb{E}[N_{121} - M] \\ &= \mathbb{E}[M] + \mathbb{E}[N_{121} - M \mid \text{花样“212”于花样“121”之前发生}](1 - P_A) \\ &= \mathbb{E}[M] + \mathbb{E}[N_{121|212}](1 - P_A). \end{aligned}$$

类似地

$$\mathbb{E}[N_{212}] = \mathbb{E}[M] + \mathbb{E}[N_{212|121}]P_A.$$

最后

$$\begin{aligned} P_A &= \frac{\mathbb{E}[N_{212}] + \mathbb{E}[N_{121|212}] - \mathbb{E}[N_{121}]}{\mathbb{E}[N_{212|121}] + \mathbb{E}[N_{121|212}]} = \frac{8}{23}, \\ \mathbb{E}[M] &= \mathbb{E}[N_{212}] - \mathbb{E}[N_{212|121}]P_A = \frac{258}{23}. \end{aligned}$$

Exercise 1.29 (2023 春期中 T3)

假设冲击按参数为 $\lambda = 1$ 的 Poisson 过程发生, 且假设每次冲击独立地以概率 p 引起系统失效. 以 M_r 记使得系统第 r 次失效的冲击数, T_r 表示系统第 r 次失效的时刻, 其中 $r \geq 1$ 为整数.

- (1) 求 M_2 的概率分布;
- (2) 给定 $M_2 = n \geq 2$, 求 T_2 的条件分布;
- (3) 求 $P(M_2 = n \mid T_2 = t)$, 其中 $n \geq 2$;
- (4) 求 $P(M_r = n \mid T_r = t)$, 其中 $n \geq r \geq 3$;
- (5) 假设每次冲击造成系统的损失为 c_1 元, 若造成系统失效, 则还需要额外的 c_2 元维修损失费. 记 $R(t)$ 为 $(0, t]$ 时间段冲击造成系统总的损失费, 求 $\lim_{t \rightarrow \infty} R(t)/t$.

解. (1) 首先 $M_2 \sim NB(2, p)$, 即服从参数为 $(2, p)$ 的负二项分布, 取值于 $\{2, 3, \dots\}$, 即

$$P(M_2 = n) = \binom{n-1}{1} p^2 (1-p)^{n-2} = (n-1)p^2(1-p)^{n-2}, n \geq 2.$$

(2) 利用 $[T_2 | M_2 = n] = [S_n | M_2 = n] = S_n \sim \Gamma(n, 1)$.

(3) 可以参考(4)中的一般解法。记 $g_{T_2|M_2}(t | n)$ 为 $[T_2 | M_2 = n]$ 的条件概率密度函数, 由(2)得

$$g_{T_2|M_2}(t | n) = \lambda \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t}.$$

对 M_2 取条件, 由(2)可以得到 T_2 的概率密度函数为

$$\begin{aligned} g_{T_2}(t) &= \sum_{k=2}^{\infty} g_{T_2|M_2}(t | k) \cdot P(M_2 = k) \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} \lambda \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t} \cdot (k-1)p^2(1-p)^{k-2} = p^2 \lambda^2 t e^{-\lambda t p}. \end{aligned}$$

于是, 当 $n \geq 2$ 时,

$$\begin{aligned} P(M_2 = n | T_2 = t) &= \frac{g_{T_2|M_2}(t | n) \cdot P(M_2 = n)}{g_{T_2}(t)} \\ &= \frac{[\lambda t(1-p)]^{n-2}}{(n-2)!} \exp\{-\lambda t(1-p)\}. \end{aligned}$$

(4) 考虑 Poisson 过程事件分类, 任意时刻 s 发生的冲击事件以概率 p 划为 I 型事件 (造成系统失效), 以概率 $1-p$ 划为 II 型事件 (未造成系统失效), 分别以 $N_i(t)$ 表示 $(0, t]$ 时间段 i 型事件发生的个数, 则 $N_1(t), N_2(t)$ 相互独立。给定 $T_r = t$ 表示系统于时刻 t 第 r 次失效, 且第 r 个 I 型事件一定发生于时刻 t , 截止到 t 时刻的所有冲击个数应该为 $M_r = N_2(t) + r$, 即

$$[M_r - r | T_r = t] = N_2(t) \sim \text{Poi}(\lambda t(1-p)).$$

于是就有

$$P(M_r = n | T_r = t) = P(N_2(t) = n - r) = \frac{[\lambda(1-p)t]^{n-r}}{(n-r)!} \exp\{-\lambda(1-p)t\}.$$

(5) 引进一个更新酬劳过程, 每当冲击造成系统失效, 则称一个更新发生, 该时刻称为更新点。此时, 更新间隔长度 T 与 T_1 同分布, 一个更新间隔里总的酬劳 R 为 $c_1 M_1 + c_2$. 且 $M_1 \sim Ge(p)$, 则

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[T_1] &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{M_1} X_i\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{M_1} X_i \mid M_1\right]\right] = \frac{1}{\lambda} \mathbb{E}[M_1] = \frac{1}{\lambda p}, \\ \mathbb{E}[R] &= c_1 \mathbb{E}[M_1] + c_2 = \frac{c_1}{p} + c_2. \end{aligned}$$

其中 $\{X_k\}$ 为冲击到达间隔。于是, 利用更新酬劳过程理论得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{R(t)}{t} = \frac{\mathbb{E}[R]}{\mathbb{E}[T_1]} = c_1 \lambda + c_2 \lambda p.$$

当 $\lambda = 1$ 时, 有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{R(t)}{t} = c_1 + c_2 p.$$

Exercise 1.30 (2023 春期中 T5)

观察一系列独立同分布的离散随机变量 $W_1, W_2, \dots$, 等待花样“22322”的发生。设

$$P(W_1 = 0) = P(W_1 = 1) = \frac{1}{8}, P(W_1 = 2) = \frac{1}{2}, P(W_1 = 3) = \frac{1}{4}.$$

求等待花样“22322”首次发生所需要的期望时间。

解. 解法一: 构造标准更新酬劳过程 $\{X_n, n \geq 1\}$ 如下: 首次出现的花样“22322”时刻称为首次更新时刻; 从该时刻以后开始 (不考虑该时刻及其以前的历史) 再次出现该花样的时刻称为第二次更新时刻; 如此下去. 每个更新区间里的酬劳并不是于更新点给付的, 如果在任何时刻 i 出现上述花样 (此时考虑该时刻所有的历史), 则付酬劳 $R_i = 1$ 个单位. 利用更新酬劳过程理论得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}[R_1 + R_2 + \cdots + R_n]}{n} = \frac{\mathbb{E}[R]}{\mathbb{E}[T]}. \quad (*)$$

其中 $\mathbb{E}[T]$ 和 $\mathbb{E}[R]$ 分别表示期望更新间隔时和在一个更新间隔时的期望酬劳. 另一方面, $R_j = 0, \forall j = 1, \cdots, 4; \mathbb{E}[R_i] = 1/64, \forall i \geq 5$, 于是就有

$$\mathbb{E}[R] = 1 + \sum_{j=1}^4 \mathbb{E}[\text{在一个更新之后的第 } j \text{ 时刻的酬劳}] = 1 + \left[0 + 0 + 0 + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} \right].$$

于是利用 (*) 可求出

$$\mathbb{E}[T] = 64 \left(1 + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} \right) = 70.$$

解法二: 设 T_2 为首次出现花样“2”的时刻, 设 $T_{22|2}$ 为在出现“2”条件下等待花样“22”出现所需要的额外时间, $T_{22322|22}$ 为在出现“22”条件下花样“22322”出现所需要的额外投掷次数, 则首次出现花样“22322”所需要的时间 $T_{22322} = T_2 + T_{22|2} + T_{22322|22}$. 其中 $T_2, T_{22|2}$ 和 $T_{22322|22}$ 相互独立. 于是利用 (延迟) 更新过程的理论可求出 $\mathbb{E}[T_2] = 2, \mathbb{E}[T_{22|2}] = 4, \mathbb{E}[T_{22322|22}] = 64$. 所以 $\mathbb{E}[T_{22322}] = 2 + 4 + 64 = 70$.

Exercise 1.31 (2023 春期中 T3)

某公司的一部售后服务电话的呼叫次数服从速率为 λ 的 Poisson 过程, 通话时间 $\{X_n, n \geq 1\}$ 是一列独立随机变量, 且均服从参数为 μ 的指数分布. 假设这部售后服务电话在通话时, 其它电话打不进来, 而空闲时一定会接听呼叫电话. 以 $N(t)$ 表示到时刻 t 为止电话打进来的次数. (呼叫速度单位: 次 / 分钟. 通话时间单位: 分钟)

- (1) 问 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是何种随机过程? 请说明理由.
- (2) 试求一次通话时没能打进来的电话的平均次数.
- (3) 对充分大的 t , 试求时刻 t 电话处于通话中的概率.
- (4) 试求下列极限:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}[N(t)]}{t}.$$

解. (1) $\{X_n, n \geq 1\}$ 为更新过程, 每接听一次电话视为一次更新, 因为指数分布的无记忆性, 可以视为通话时相当于没有人打电话.

(2) 设一次通话时间为 T , 未接的电话数为 N , 则

$$\mathbb{E}[N] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[N | T]] = \mathbb{E}[\text{Poi}(\lambda T)] = \mathbb{E}[\lambda T] = \frac{\lambda}{\mu}.$$

(3) 考虑交替更新过程, 记接听电话时系统为开, 则

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(t \text{ 时刻处于通话状态}) = \frac{\mathbb{E}[\text{一次接听时间}]}{\mathbb{E}[\text{一次接听时间}] + \mathbb{E}[\text{一次空闲时间}]}.$$

同时我们又有

$$\mathbb{E}[\text{一次接听时间}] = \frac{1}{\mu}, \mathbb{E}[\text{一次空闲时间}] = \frac{1}{\lambda}.$$

最后

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(t \text{ 时刻接听}) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}.$$

(4) 我们有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}[N(t)]}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{m(t)}{t} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]}.$$

其中

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu}.$$

则

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}[N(t)]}{t} = \frac{\lambda\mu}{\lambda + \mu}.$$

Exercise 1.32 (2023 春期中 T4)

现考虑一系列独立重复试验，每次试验抛掷一枚均匀的骰子，以 W_n 表示第 n 次抛骰子掷出的点数。试验一直进行到连续抛出四个点数同奇数或者同偶数为止。试用两种不同的方法求抛掷次数 T 的期望。

解. 法一：把问题约化成投掷一个均匀硬币，连续出 4 次正面/反面的所需次数的期望，显然这两个的次数的期望应该是一样的，因此总次数的期望应该是连续 4 次正面的次数的期望的一半，下面求连续 4 次正面的次数的期望。

$$\mathbb{E}[T_{\text{HHHH}}] = 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2 = 30.$$

$$\mathbb{E}[T] = \frac{\mathbb{E}[T_{\text{HHHH}}]}{2} = 15.$$

法二：条件期望递推。仍求连续 4 次投出正面的次数，对连续 3 次投出正面后的下一次取条件

$$\mathbb{E}[T_{\text{HHHH}} | T_{\text{HHH}} = n] = \frac{1}{2}(n+1) + \frac{1}{2}(n+1 + \mathbb{E}[T_{\text{HHHH}}]).$$

$$\mathbb{E}[T_{\text{HHHH}}] = 2\mathbb{E}[T_{\text{HHH}}] + 2.$$

递推下去，有

$$\mathbb{E}[\text{连续投掷出 } n \text{ 个正面需要的次数}] = \sum_{k=1}^n 2^k.$$

特别地，有 $\mathbb{E}[T_{\text{HHHH}}] = 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2 = 30$. 故 $\mathbb{E}[T] = 15$.

Exercise 1.33 (2021 春期中 T1)

设 $\{X_n, n \geq 1\}$ 和 $\{Y_n, n \geq 1\}$ 是两个独立同分布的随机变量序列，满足 $\mathbb{E}X_1 = \mu_1, \mathbb{E}Y_1 = \mu_2$ ，再设 $N \sim \text{Poisson}(\lambda)$ 且独立于 $\{X_n, Y_n, n \geq 1\}$ ，求 $\text{Cov}\left(\sum_{i=1}^N X_i, \sum_{j=1}^N Y_j\right)$.

解. 我们有

$$\text{Cov}\left(\sum_{i=1}^N X_i, \sum_{j=1}^N Y_j\right) = \mathbb{E}\left[\text{Cov}\left(\sum_{i=1}^N X_i, \sum_{j=1}^N Y_j \mid N\right)\right] + \text{Cov}\left(\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^N X_i \mid N\right], \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^N Y_j \mid N\right]\right)$$

由 $\{X_n\}$ 与 $\{Y_n\}$ 独立，知对任意 n 有

$$\text{Cov}\left(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{j=1}^n Y_j\right) = 0.$$

故第一项为0. 又

$$\mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^N X_i \mid N \right] = N\mu_1, \mathbb{E} \left[\sum_{j=1}^N Y_j \mid N \right] = N\mu_2.$$

于是就有

$$\text{Cov} \left(\sum_{i=1}^N X_i, \sum_{j=1}^N Y_j \right) = \text{Cov}(N\mu_1, N\mu_2) = \mu_1\mu_2 \text{Var}(N) = \mu_1\mu_2\lambda.$$

Exercise 1.34 (2021 春期中 T2)

设 $X_1, \dots, X_n$ 相互独立, $X_k \sim \text{Exp}(\lambda_k), k = 1, \dots, n$.

$$(1) \text{ 求 } P \left(X_i = \min_{1 \leq j \leq n} X_j \right); (2) \text{ 求 } P \left(X_i = \min_{1 \leq j \leq n} X_j \mid \min_{1 \leq k \leq n} X_k > t \right).$$

其中 $t > 0$.

解. 记 $N_k(t)$ 为以 λ_k 为速率的 Poisson 过程, 设 $N(t) = \sum_{k=1}^n N_k(t)$. 可对 $N(t)$ 的更新分类, 即源自 $N_k(t)$ 的更新为一类.

(1) 于是就有

$$P(X_i = \min X_j) = P(\text{首次更新源自 } N_i(t)) = \frac{\lambda_i}{\sum_{j=1}^n \lambda_j}.$$

(2) 由无记忆性可知 $\min X_k > t$ 的条件等价于 $N_k(t)$ 在 $[0, t]$ 内无更新发生, 只需认为 $N_k(t)$ 从 t 开始, 故概率不变, 即

$$P \left(X_i = \min_{1 \leq j \leq n} X_j \mid \min_{1 \leq k \leq n} X_k > t \right) = \frac{\lambda_i}{\sum_{j=1}^n \lambda_j}.$$

Exercise 1.35 (2021 春期中 T3)

设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是强度 $\lambda = 2$ 的齐次 Poisson 过程, 第 i 个事件发生时刻记为 $S_i, i \geq 1$. 求

$$\mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^{\infty} Z_i \max\{10 - S_i, 0\} \right].$$

其中 $\{Z_n, n \geq 1\}$ iid $\sim N(5, 10)$, 该序列独立于过程 $\{N(t), t \geq 0\}$.

解. 易知 $\max\{10 - S_i, 0\} = 0 \iff S_i > 10$, 故

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^{\infty} Z_i \max\{10 - S_i, 0\} \right] &= \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^{N(10)} Z_i (10 - S_i) \right] \\ &= 10\mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^{N(10)} Z_i \right] - \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^{N(10)} Z_i S_i \right]. \end{aligned}$$

第一项

$$10\mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^{N(10)} Z_i \right]$$

在给定 $N(10) = n$ 条件下为 $10E[N(10)]E[Z_i] = 10 \times 20 \times 5 = 1000$.

而第二项

$$\mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^{N(10)} Z_i S_i \right] = \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^{N(10)} Z_i S_i \mid N(10) = n \right] \right] = \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^n Z_i U_{(i)} \right] \right]$$

$$= \mathbb{E}[N(10)]\mathbb{E}[Z_i U_i] = \mathbb{E}[N(10)]\mathbb{E}[Z_i]\mathbb{E}[U_i] = 20 \times 5 \times \frac{10}{2} = 500.$$

故

$$\mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^{\infty} Z_i \max\{10 - S_i, 0\} \right] = 1000 - 500 = 500.$$

Exercise 1.36 (2021 春期中 T4)

假设系统故障的发生规律可以用齐次 Poisson 过程来描述, 单位时间平均发生 12 次故障, 每次故障都要造成损失, 分别以概率 $1/2, 1/3$ 和 $1/6$ 损失 \$1, \$5 和 \$10. 设 $X(t)$ 表示到时刻 t 系统因故障累计造成的损失大小.

- (1) 求 $P(X(t) = 11)$;
- (2) 求 $\text{Cov}(X(t), X(t+5))$.

解. (1) 将 $N(t)$ 按损失金额分为 1, 5, 10 三类为 $N_1(t), N_2(t), N_3(t)$. 则

$$\begin{aligned} P(X(t) = 11) &= P(N_1(t) = 11)P(N_2(t) = 0)P(N_3(t) = 0) \\ &\quad + P(N_1(t) = 6)P(N_2(t) = 1)P(N_3(t) = 0) \\ &\quad + P(N_1(t) = 1)P(N_2(t) = 0)P(N_3(t) = 1) \\ &\quad + P(N_1(t) = 1)P(N_2(t) = 2)P(N_3(t) = 0). \end{aligned}$$

由分类 Poisson 过程有

$$\begin{aligned} N_1(t) &\sim \text{Poi} \left(12t \cdot \frac{1}{2} \right) = \text{Poi}(6t), \quad N_2(t) \sim \text{Poi} \left(12t \cdot \frac{1}{3} \right) = \text{Poi}(4t), \\ N_3(t) &\sim \text{Poi} \left(12t \cdot \frac{1}{6} \right) = \text{Poi}(2t). \end{aligned}$$

且相互独立, 所以

$$P(X(t) = 11) = e^{-12t} \left(\frac{(6t)^{11}}{11!} + \frac{(6t)^6}{6!} \frac{(4t)}{1!} + \frac{(6t)}{1!} \frac{(2t)}{1!} + \frac{(6t)}{1!} \frac{(4t)^2}{2!} \right).$$

(2) $\text{Cov}(X(t), X(t+5)) = \text{Cov}(X(t), X(t+5) - X(t)) + \text{Cov}(X(t), X(t)) = \text{Var}(X(t))$, 因为独立增量性有 $X(t+5) - X(t)$ 与 $X(t)$ 独立. 又 $X(t) = N_1(t) + 5N_2(t) + 10N_3(t)$, 故

$$\begin{aligned} \text{Var}(X(t)) &= \text{Var}(N_1(t)) + 25 \text{Var}(N_2(t)) + 100 \text{Var}(N_3(t)) \\ &= 12t \cdot \frac{1}{2} + 25 \cdot 12t \cdot \frac{1}{3} + 100 \cdot 12t \cdot \frac{1}{6} = 306t. \end{aligned}$$

于是 $\text{Cov}(X(t), X(t+5)) = 306t$.

Exercise 1.37 (2021 春期中 T6)

设 $\{X_n, n \geq 1\}$ 是独立同分布的非负随机变量序列, 共同的分布具有概率密度函数 $f(x)$, $M \sim \text{Poisson}(\lambda_0)$, $\lambda_0 > 0$, 且独立于 $\{X_n, n \geq 1\}$, 定义

$$N(t) = \#\{k : X_k \leq t, k \leq M\}, t \geq 0.$$

证明 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是非齐次 Poisson 过程, 其强度函数为 $\lambda(t) = \lambda_0 f(t)$.

证明. 显然 $N(0) = 0$. 对任意 $s, t \geq 0$, 在给定 M 的条件下有

$$N(t+s) - N(t) \mid M \sim B(M, F(t+s) - F(t)).$$

记 $p = F(t+s) - F(t)$. 则对 $n \geq 0$ 有

$$\begin{aligned} P(N(t+s) - N(t) = n) &= \sum_{k=n}^{\infty} P(M=k) \binom{k}{n} p^n (1-p)^{k-n} \\ &= \sum_{k=n}^{\infty} e^{-\lambda_0} \frac{\lambda_0^k}{k!} \frac{k!}{n!(k-n)!} p^n (1-p)^{k-n} = \frac{p^n}{n!} e^{-\lambda_0} \lambda_0^n \sum_{k=n}^{\infty} \frac{[\lambda_0(1-p)]^{k-n}}{(k-n)!} \\ &= \frac{(p\lambda_0)^n}{n!} e^{-\lambda_0} e^{\lambda_0(1-p)} = e^{-p\lambda_0} \frac{(p\lambda_0)^n}{n!}. \end{aligned}$$

故 $N(t+s) - N(t) \sim \text{Poi}(\lambda_0(F(t+s) - F(t)))$.

下面验证独立增量. 设 (a_1, b_1) 与 (a_2, b_2) 不交, 记 $p_1 = F(a_1) - F(b_1)$, $p_2 = F(a_2) - F(b_2)$. 则

$$\begin{aligned} &P(N(a_1) - N(b_1) = m, N(a_2) - N(b_2) = n) \\ &= \sum_{k=m+n}^{\infty} P(M=k) \binom{k}{m} \binom{k-m}{n} p_1^m p_2^n (1-p_1-p_2)^{k-m-n} \\ &= \sum_{k=m+n}^{\infty} e^{-\lambda_0} \frac{\lambda_0^k}{k!} \frac{k!}{m!(k-m)!} \frac{(k-m)!}{n!(k-m-n)!} p_1^m p_2^n (1-p_1-p_2)^{k-m-n} \\ &= \frac{p_1^m p_2^n}{m!n!} e^{-\lambda_0} \lambda_0^{m+n} \sum_{k=m+n}^{\infty} \frac{[\lambda_0(1-p_1-p_2)]^{k-m-n}}{(k-m-n)!} \\ &= \frac{(p_1\lambda_0)^m}{m!} e^{-p_1\lambda_0} \cdot \frac{(p_2\lambda_0)^n}{n!} e^{-p_2\lambda_0}. \end{aligned}$$

这说明不交区间上的增量相互独立. 因此 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是一个具有独立增量的计数过程, 且对任意 $s, t \geq 0$ 有 $N(t+s) - N(t) \sim \text{Poi}(\lambda_0(F(t+s) - F(t)))$. 于是它是非齐次 Poisson 过程, 且其均值函数为

$$m(t) = \lambda_0 F(t) = \int_0^t \lambda(u) du.$$

对 t 求导得其强度函数为 $\lambda(t) = m'(t) = \lambda_0 f(t)$. 证毕. $\square$

Exercise 1.38 (2021 春期中 T5)

假设一个元件于时刻 0 开始投入使用, 该元件易于受到外界的冲击, 在前 5 个小时内冲击以每小时 4 个的泊松速率到达, 在随后的时间段中冲击是每小时 2 个的泊松速率到达. 泊松速率到达是指不可能有两个或多个冲击同时达到.

- (1) 问冲击到达可以用什么样的过程来描述?
- (2) 求时间段 $(2, 4]$ 有 1 个冲击发生的概率;
- (3) 求时间段 $(4, 6]$ 有 1 个冲击发生的概率;
- (4) 求第三个冲击发生时刻 S_3 的概率密度函数.

解. (1) 这是非齐次泊松过程, 其强度函数为

$$\lambda(t) = \begin{cases} 4, & t \leq 5, \\ 2, & t > 5. \end{cases}$$

故均值函数

$$m(t) = \int_0^t \lambda(s) ds = \begin{cases} 4t, & t \leq 5, \\ 20 + 2(t-5) = 2t + 10, & t > 5. \end{cases}$$

(2) 我们有 $N(4) - N(2) \sim \text{Poi}(8)$, 故 $P(N(4) - N(2) = 1) = 8e^{-8}$.

(3) 我们有 $N(6) - N(4) \sim \text{Poi}(m(6) - m(4)) = \text{Poi}(6)$, 故 $P(N(6) - N(4) = 1) = 6e^{-6}$.

(4) 对充分小的 $h > 0$ 有

$$P\{S_3 \in (t, t+h)\} = P\{N(t) = 2\}P\{N(t+h) - N(t) = 1\} + o(h).$$

故 S_3 的密度为

$$f_{S_3}(t) = P\{N(t) = 2\}\lambda(t) = \frac{m(t)^2}{2}e^{-m(t)}\lambda(t).$$

代入 $m(t), \lambda(t)$ 得

$$f_{S_3}(t) = \begin{cases} 32t^2e^{-4t}, & t \leq 5, \\ (2t+10)^2e^{-(2t+10)}, & t > 5. \end{cases}$$

Exercise 1.39 (2020 春期中 T1)

现有 m 个偶数和 n 个奇数, $m \geq 1, n \geq 1$. 现随机地将这 $m+n$ 个数从左到右排成一行 (位置编号分别为 $1, 2, \dots, m+n$), 记 W 为该序列中从左到右首次出现偶数的位置编号, 求 $\mathbb{E}[W]$.

解. 记 $f(m, n) = \mathbb{E}[W]$. 对第一个位置分类讨论. 若第一个位置是偶数, 则 $W = 1$; 若第一个位置是奇数, 则后面还剩 m 个偶数与 $n-1$ 个奇数, 且首次出现偶数的位置比新的问题多 1. 于是

$$f(m, n) = 1 \cdot \frac{m}{m+n} + \frac{n}{m+n} (f(m, n-1) + 1) = 1 + \frac{n}{m+n} f(m, n-1).$$

又 $f(m, 0) = 1$. 由递推可得

$$f(m, 1) = 1 + \frac{1}{m+1}, f(m, 2) = 1 + \frac{2}{m+2} \cdot \frac{m+2}{m+1} = 1 + \frac{2}{m+1},$$

从而归纳得

$$f(m, n) = \mathbb{E}[W] = 1 + \frac{n}{m+1}.$$

Exercise 1.40 (2020 春期中 T2)

假设一个系统有两个服务台, 服务台 i 给顾客提供的服务时间服从参数 λ_i 的指数分布, $i = 1, 2$, 采用先到先服务、后到排队的规则, 当顾客 A 到达该系统时, 发现顾客 B 和 C 各占据一个服务台, 求顾客 A 在系统中滞留的期望时间.

解. 记顾客 A 在系统中的滞留时间为 T_A , 则 $\mathbb{E}[T_A] = \mathbb{E}[\text{排队时间}] + \mathbb{E}[\text{服务时间}]$. 由于两个服务台当前各有一人, A 需要等待先完成服务的那个顾客离开. 由指数分布无记忆性, 排队时间为两个独立指数随机变量最小值的期望, 因此 $\mathbb{E}[\text{排队时间}] = 1/(\lambda_1 + \lambda_2)$. 当 A 开始接受服务时, 它进入服务台 1 的概率为 $\lambda_1/(\lambda_1 + \lambda_2)$, 进入服务台 2 的概率为 $\lambda_2/(\lambda_1 + \lambda_2)$. 故

$$\mathbb{E}[\text{服务时间}] = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \cdot \frac{1}{\lambda_1} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \cdot \frac{1}{\lambda_2} = \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad \mathbb{E}[T_A] = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} + \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{3}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

Exercise 1.41 (2020 春期中 T5)

设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是强度为 1 的齐次 Poisson 过程, 事件发生时刻序列记为 $\{S_n, n \geq 1\}$, 求

$$\mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^{N(t)} \log S_k \right].$$

解. 对 $N(t)$ 取条件. 给定 $N(t) = n$ 时, $S_1, \dots, S_n$ 与 n 个独立 $\text{Unif}(0, t)$ 随机变量的次序统计量同分布, 而对称函数求和不受排序影响, 因此

$$\mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^{N(t)} \log S_k \mid N(t) = n \right] = \mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^n \log U_k \right] = n \mathbb{E}[\log U_1],$$

其中 $U_1 \sim \text{Unif}(0, t)$. 又

$$\mathbb{E}[\log U_1] = \frac{1}{t} \int_0^t \log x dx = \frac{t \log t - t}{t} = \log t - 1.$$

故

$$\mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^{N(t)} \log S_k \right] = \mathbb{E}[N(t)(\log t - 1)].$$

由于 $N(t) \sim \text{Poi}(t)$, 有 $\mathbb{E}[N(t)] = t$, 从而

$$\mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^{N(t)} \log S_k \right] = t(\log t - 1).$$

Exercise 1.42 (2019 春期中 T3)

设 X_n 独立同分布于 $\text{Exp}(\lambda)$, $N \sim \text{Geo}(p)$ 且与 $\{X_n\}$ 独立, 且 N 与 X_i 独立, 求 $S = \sum_{k=1}^N X_k$ 的分布, 并用 Poisson 过程理论给予解释。

解. 在给定 $N = n$ 条件下,

$$S \mid N = n = \sum_{k=1}^n X_k \sim \Gamma(\lambda, n),$$

故对 $x > 0$ 有

$$f_S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{S \mid N=n}(x) P(N = n).$$

由题有 $P(N = n) = p(1-p)^{n-1}, n \geq 1$. 则

$$\begin{aligned} f_S(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n x^{n-1} e^{-\lambda x}}{(n-1)!} p(1-p)^{n-1} \\ &= \lambda p e^{-\lambda x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[\lambda x(1-p)]^{n-1}}{(n-1)!} = \lambda p e^{-\lambda x} e^{\lambda x(1-p)} = \lambda p e^{-\lambda p x}. \end{aligned}$$

故 $S \sim \text{Exp}(\lambda p)$. Poisson 过程解释: 把速率为 λ 的 Poisson 过程的到达间隔独立地以概率为 p 保留, 则被保留的项的和构成速率为 λp 的 Poisson 过程. S 正是第一个被保留点出现前所经历的时间, 所以服从参数为 λp 的指数分布。

Exercise 1.43 (2011 春期中 T7, 附加题)

某保险公司对老年人的收费率在 r_0 和 r_1 之中变换 ($r_0 < r_1$): 一个新的被保险人开始时收费率为每个单位时间 r_1 , 当一个收费率为 r_1 的参保人在最近的 s 个单位时间内没有理赔, 那么他的收费率就变成单位时间 r_0 . 收费率保持在 r_0 直到作下一次理赔, 这时收费率再次回到 r_1 . 假定给定的一参保人永远在活着, 而且按速率为 λ 的 Poisson 过程理赔. 在很长一段时间内, 求该参保人

(1) 以收费率 r_i 付费的时间的比例 $P_i, i = 0, 1$;

(2) 在单位时间所付的平均金额。

解. (1) 考虑两次理赔之间的时间 T , 则 $T \sim \text{Exp}(\lambda)$, $\mathbb{E}[T] = 1/\lambda$. 在一个周期内, 若 $T > s$, 则先以 r_1 收费 s 个单位时间, 再以 r_0 收费 $T - s$ 个单位时间; 若 $T \leq s$, 则整个周期都以 r_1 收费。于是, 一个周期内以 r_0 收费的时间为 $T_0 = (T - s)^+$. 由指数分布无记忆性

$$\mathbb{E}[T_0] = \mathbb{E}[T - s \mid T > s]P(T > s) = \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda s}.$$

故长期处于收费率 r_0 的时间比例

$$P_0 = \frac{\mathbb{E}[T_0]}{\mathbb{E}[T]} = e^{-\lambda s}.$$

从而 $P_1 = 1 - P_0 = 1 - e^{-\lambda s}$.

(2) 再看单位时间平均缴费。一个周期内的平均收费额为 $\mathbb{E}[R] = r_0\mathbb{E}[T_0] + r_1\mathbb{E}[T_1]$. 其中

$$\mathbb{E}[T_1] = \mathbb{E}[T] - \mathbb{E}[T_0] = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda s}, \quad \frac{\mathbb{E}[R]}{\mathbb{E}[T]} = r_0e^{-\lambda s} + r_1(1 - e^{-\lambda s}).$$

因此单位时间所付的平均金额为 $r_0e^{-\lambda s} + r_1(1 - e^{-\lambda s})$.

第2章

期末习题课

2.1 知识点梳理

期末考试的范围包含在教材的第四到八章，主要考察 Markov 链相关的两章，鞅和布朗运动也会考察，但相对比较浅。

2.1.1 第四章知识点

考虑一个取值于有限或可数个可能值的随机过程 $\{X_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$.

第一部分：Markov 链与转移概率

Definition 2.1

1. Markov 链：即我们假设对一切状态 $i_0, i_1, \dots, i_{n-1}, i, j$ 和一切 $n \geq 0$ 有

$$P(X_{n+1} = j \mid X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_1 = i_1, X_0 = i_0) = P_{ij}.$$

这样的随机过程以 Markov 链闻名，方程表示的性质称为 Markov 性（未来的状态独立与过去的状态，只依赖于现在的状态）。

2. 转移概率：

(1) 一步转移概率 P_{ij} ： P_{ij} 的值表示当过程处在状态 i 时，下次转移到状态 j 的概率。所以有：

$$P_{ij} \geq 0, i, j \geq 0; \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij} = 1, i = 0, 1, \dots$$

以 P 记一步转移概率 P_{ij} 的矩阵。

(2) n 步转移概率 P_{ij}^n ：一个处在状态 i 的过程经 n 次转移后处在状态 j 的概率。记

$$P_{ij}^n = P\{X_{n+m} = j \mid X_m = i\}, n \geq 0, i, j \geq 0.$$

以 $P^{(n)}$ 记 n 步转移概率 P_{ij}^n 的矩阵。

Chapman-Kolmogorov 方程提供了计算 n 步转移概率的方法。

Theorem 2.1 (Chapman-Kolmogorov 方程)

$$P_{ij}^{n+m} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}^n P_{kj}^m \text{ 对一切 } n, m \geq 0, \text{ 一切 } i, j$$

亦即

$$P^{(n+m)} = P^{(n)}P^{(m)}$$

利用 Markov 性, 可以推出简单随机徘徊绝对值的条件分布:

Definition 2.2 (简单随机徘徊)

随机徘徊 $\{X_n, n \geq 1\}$ 称为简单随机徘徊, 若对每个 $p(0 < p < 1)$ 有

$$P\{X_i = 1\} = p, P\{X_i = -1\} = q \equiv 1 - p.$$

其中 $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

$|S_n|$ 是一个 Markov 链, 利用这一性质, 可以求出简单随机徘徊的条件分布, 进而求出绝对值的转移概率。

Proposition 2.1 (简单随机徘徊绝对值的条件分布)

若 $\{S_n, n \geq 1\}$ 是简单随机徘徊, 则

$$P(S_n = i \mid |S_n| = i, |S_{n-1}| = i_{n-1}, \dots, |S_1| = i_1) = \frac{p^i}{p^i + q^i}.$$

$\{|S_n|, n \geq 1\}$ 是 Markov 链, 具有转移概率

$$P_{i,i+1} = \frac{p^{i+1} + q^{i+1}}{p^i + q^i} = 1 - P_{i,i-1}, i > 0, P_{01} = 1.$$

第二部分: 状态分类

Definition 2.3 (状态分类)

1. 互通: 可相互到达的两个状态称为互通的, 且记为 $i \leftrightarrow j$.

互通是一个等价关系, 具有自反性, 对称性和传递性。两个互通的状态称为在同一个类中, 即互通类, 因其性质, 两个类或者不交或者相同。

2. 不可约: 若 Markov 链只有一个类, 即所有的状态彼此都互通, 则称为不可约的。

3. 周期: 状态 i 称为具有周期 d , 若只要 n 不能被 d 整除时就有 $P_{ii}^n = 0$, 则 d 是具有此性质的最大整数。(若对任意 $n > 0$ 都有 $P_{ii}^n = 0$, 则定义 i 的周期为无穷。)将状态 i 的周期记为 $d(i)$.

周期为 1 的状态称为非周期的。

4. 常返/暂态: (1) 定义 1: 若 $f_{jj} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{jj}^n = 1$, 则状态 j 称为常返的, 而在其他情形 ($f_{jj}^n < 1$) 则称为暂态的。

注记 2.1. 对任意状态 i 和 j 定义 f_{ij}^n 为开始处在 i 而转移到 j 在时刻 n 首次发生。形式地

$$f_{ij}^0 = 0, f_{ij}^n = P\{X_n = j, X_k \neq j, 1 \leq k \leq n-1 \mid X_0 = i\}, f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^n.$$

(2) 定义2: 状态 j 是常返的, 当且仅当

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_{jj}^n = \infty.$$

(公式的实际意义为初始状态为 j 时, 访问 j 的总次数的期望是无限的)

5. 正常返/零常返: 首先得是常返态。

(1) 定义1: 如果 $\mu_{jj} < \infty$, 则我们称之为正常返, 而若 $\mu_{jj} = \infty$, 则称之为零常返。

(μ_{jj} 记回返到状态 j 所需的期望转移次数。若为暂态, 则 μ_{jj} 一定为 ∞ .)

(2) 定义2: 若 $\pi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{jj}^{nd(j)} > 0$ 则常返态 j 是正常返的, 若 $\pi_j = 0$, 则是零常返的。(暂态同样有 $\pi_j = 0$)

周期性、常返性、暂态、正常返/零常返都是等价类的性质, 即在同一个互通类中性质相同。

进一步可以推出:

Theorem 2.2

若 $i \leftrightarrow j$, 且 j 是常返的, 则 $f_{ij} = 1$.

注意这里是 f_{ij} , 而常返定义1中的是 f_{jj} .

除开用 $\sum_{n=1}^{\infty} P_{jj}^n$ 是否为无穷区分常返和暂态外, 直接考察 $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{ij}^n$ 是否为0, 可得到以下定理:

Theorem 2.3

一个不可约且非周期的 Markov 链恰属于下列两类之一。

情形一: 全体状态暂态或零常返

对任意 i, j :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = 0.$$

并且不存在平稳分布。

情形二: 全体状态正常返

对任意 i, j :

$$\pi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)}$$

π_j 是唯一平稳分布。

第三部分: 极限性质与平稳分布

紧随上面的定理, 明确平稳分布的定义:

Definition 2.4 (平稳分布)

概率分布 $\pi_j, j \geq 0$ 若满足:

$$P_j = \sum_{i=0}^{\infty} P_i P_{ij}, j \geq 0,$$

则称其为该 Markov 链的平稳分布。

注记 2.2. 1. 由前一定理可知平稳分布的线性方程不一定有解。另外, 如果初始概率分布是平稳分布, 则对一切 n, X_n 将有相同的分布。

2. 求平稳分布的经典方法: 对于前一定理中的第二个情形 (不可约、非周期、正常返的 Markov 链), 此时称此 Markov 链是遍历的. 此时平稳分布和极限分布都存在, 且平稳分布就是极限分布。因此有 $\pi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)}$ 是方程:

$$\pi_j = \sum_i \pi_i P_{ij}, \sum_j \pi_j = 1$$

唯一非负解。

3. 不可约、正常返、周期时上述方程仍成立, 只是需要将 π_j 解释为 Markov 链处在状态 j 的长程时间比例。

4. 若过程开始于极限分布, 则所得的 Markov 链是平稳的。(因为 $\infty + t = \infty$.)

Example 2.1 (教材例 4.3 (D))

假设在每个时间周期, 群体的每一个成员以概率 p 死去, 又在每个时期加入此群体的新成员数是均值为 λ 的 Poisson 随机变量。若我们以 X_n 记在时期 n 开始时群体的成员数, 则易见 $X_n, n \geq 0$ 是一个 Markov 链。

为求此链的平稳概率, 假设 X_0 以具有参数为 α 的 Poisson 随机变量分布。因为这 X_0 个个彼此独立地在下一个时期的开始以概率 $1 - p$ 活着, 由此推出它们在时刻 1 仍在群体中的个数是均值为 $\alpha(1 - p)$ 的 Poisson 随机变量。因为直至时刻 1 为止加入群体的新成员数是均值为 λ 的独立的 Poisson 随机变量, 由此推出 X_1 是均值为 $\alpha(1 - p) + \lambda$ 的 Poisson 随机变量。因此, 若

$$\alpha = \alpha(1 - p) + \lambda$$

则这个链将是平稳的。因此, 由平稳分布的唯一性, 我们可断言平稳分布是均值为 λ/p 的 Poisson 分布。即

$$\pi_j = e^{-\lambda/p} (\lambda/p)^j / j!, j = 0, 1, \dots$$

上例说明: 求解平稳方程困难时, 可以直接尝试选取某些特殊的概率分布作为初始状态, 直接推理知得到的链是平稳的。

Theorem 2.4 (极限性质)

设 $i \leftrightarrow j$, 记 μ_{jj} 为从 j 出发首次回到 j 所需转移次数的期望, $N_j(t)$ 为到时间 t 位置访问 j 的次数。则:

$$P\left\{\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N_j(t)}{t} = \frac{1}{\mu_{jj}} \mid X_0 = i\right\} = 1$$

并且:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n p_{ij}^{(k)} = \frac{1}{\mu_{jj}}.$$

若 j 非周期, 则:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \frac{1}{\mu_{jj}}.$$

若 j 的周期为 d , 则:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{jj}^{(nd)} = \frac{d}{\mu_{jj}}.$$

核心思想: 回到状态 j 的时刻构成更新过程。四个公式分别类比于命题 3.3.1, 基本更新定理, Blackwell 定理。

第四部分: 类之间的转移

常返类是一个封闭的类, 进入这个类就不再离开。

Proposition 2.2

1. 常返类 $\nleftrightarrow$ 其他: 设 R 是一个常返类。若: $i \in R, j \notin R$, 则: $P_{ij} = 0$.
2. 暂态 $\xrightarrow{f_{ij}}$ 常返类: 若 j 是常返的, 则概率的集合 $f_{ij}, i \in T$ 满足

$$f_{ij} = \sum_{k \in T} P_{ik} f_{kj} + \sum_{k \in R} P_{ik}, i \in T,$$

这里 R 记与 j 互通的状态集。

该命题的一个重要应用是赌徒破产问题。

Example 2.2 (例 4.4(A): 赌徒破产问题)

考虑一个赌徒, 他在每次赌局中以概率 p 赢一个单位, 以概率

$$q = 1 - p$$

输一个单位。假设相继赌局相互独立。问: 若赌徒从 i 个单位开始, 在达到 0 之前, 财富先达到 N 的概率是多少?

以 X_n 记赌徒在时刻 n 的财富, 则 $\{X_n, n \geq 0\}$ 是一个 Markov 链, 状态空间为

$$\{0, 1, 2, \dots, N\}.$$

其转移概率为

$$P_{00} = P_{NN} = 1,$$

$$P_{i,i+1} = p, P_{i,i-1} = q, i = 1, 2, \dots, N-1.$$

这个链有三个互通类:

$$\{0\}, \{1, 2, \dots, N-1\}, \{N\}.$$

其中 $\{0\}$ 与 $\{N\}$ 是常返类, 而

$$\{1, 2, \dots, N-1\}$$

是暂态类。由于暂态状态最终只被访问有限次, 故赌徒最终必然或者破产, 或者达到目标 N 。
令

$$f_i = P_i\{\text{在达到0之前先达到}N\}, 0 \leq i \leq N.$$

显然

$$f_0 = 0, f_N = 1.$$

对首局结果取条件, 得

$$f_i = pf_{i+1} + qf_{i-1}, i = 1, 2, \dots, N-1.$$

因为 $p + q = 1$, 所以

$$p(f_{i+1} - f_i) = q(f_i - f_{i-1}),$$

即

$$f_{i+1} - f_i = \frac{q}{p}(f_i - f_{i-1}).$$

由此递推得到

$$f_2 - f_1 = \frac{q}{p}(f_1 - f_0) = \frac{q}{p}f_1,$$

$$f_3 - f_2 = \left(\frac{q}{p}\right)^2 f_1,$$

一般地,

$$f_i - f_{i-1} = \left(\frac{q}{p}\right)^{i-1} f_1.$$

将这些式子相加, 有

$$f_i = f_1 \left[1 + \frac{q}{p} + \left(\frac{q}{p}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{q}{p}\right)^{i-1} \right].$$

再利用边界条件 $f_N = 1$, 得到

$$f_i = \begin{cases} \frac{1 - (q/p)^i}{1 - (q/p)^N}, & p \neq q, \\ \frac{i}{N}, & p = q = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

特别地, 当 $N \rightarrow \infty$ 时,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} f_i = \begin{cases} 1 - \left(\frac{q}{p}\right)^i, & p > q, \\ 0, & p \leq q. \end{cases}$$

因此, 当 $p > 1/2$ 时, 赌徒有正概率使财富趋于无穷; 而当 $p \leq 1/2$ 时, 若与一个具有无穷财富的对手赌博, 则赌徒以概率 1 迟早破产。

现在考虑从 i 开始, 直到达到 0 或 N 所需的期望赌局数。记

$$B = \inf\{n \geq 0 : X_n = 0 \text{ 或 } X_n = N\}.$$

教材给出的巧妙方法是: 想象赌徒即使达到 0 或 N 后仍继续赌博, 并令

$$Y_j = \begin{cases} 1, & \text{第 } j \text{ 局赢,} \\ -1, & \text{第 } j \text{ 局输.} \end{cases}$$

则

$$Y_1, Y_2, \dots$$

独立同分布, 且

$$\mathbb{E}[Y_j] = p - q = 2p - 1.$$

从初始财富 i 出发, 到达 0 或 N 等价于

$$\sum_{j=1}^B Y_j = -i$$

或

$$\sum_{j=1}^B Y_j = N - i.$$

令

$$\alpha = f_i = P_i\{\text{先达到 } N\}.$$

则

$$\sum_{j=1}^B Y_j = \begin{cases} N - i, & \text{概率为 } \alpha, \\ -i, & \text{概率为 } 1 - \alpha. \end{cases}$$

因此

$$\mathbb{E} \left[\sum_{j=1}^B Y_j \right] = (N - i)\alpha - i(1 - \alpha) = N\alpha - i.$$

另一方面, 由 Wald 方程,

$$\mathbb{E} \left[\sum_{j=1}^B Y_j \right] = \mathbb{E}[B]E[Y_1] = (p - q)\mathbb{E}[B].$$

于是当 $p \neq q$ 时,

$$\mathbb{E}_i[B] = \frac{Nf_i - i}{p - q}.$$

代入 f_i 可写为

$$\mathbb{E}_i[B] = \frac{1}{p - q} \left[N \frac{1 - (q/p)^i}{1 - (q/p)^N} - i \right], p \neq q.$$

当

$$p = q = \frac{1}{2}$$

时, 上式不能直接使用。此时可用差分方程或鞅

$$S_n^2 - n$$

得到

$$\mathbb{E}_i[B] = i(N - i).$$

方法总结:

本例有两个核心方法。

第一, 求“先达到某个常返类”的概率时, 对第一步转移取条件:

$$f_i = pf_{i+1} + qf_{i-1},$$

再结合边界条件

$$f_0 = 0, f_N = 1.$$

第二, 求达到边界的期望时间时, 不必直接解二阶差分方程。可以把赌博过程写成独立增量和

$$S_B = \sum_{j=1}^B Y_j,$$

再利用 Wald 方程:

$$\mathbb{E}[S_B] = \mathbb{E}[B]\mathbb{E}[Y_1].$$

这样可把“期望停时”转化为“停时时刻位置的期望”。

Proposition 2.3 (由平均访问次数求访问概率)

对暂态 $i, j \in T$, 令

$$f_{ij} = P_i\{\text{迟早访问状态 } j\}.$$

由是否曾访问过 j 取条件, 可得

$$m_{ij} = f_{ij}m_{jj}.$$

因此

$$f_{ij} = \frac{m_{ij}}{m_{jj}}.$$

直观解释: 若从 i 出发最终会访问 j , 则从首次到达 j 后, 后续访问 j 的期望次数与“从 j 出发访问 j 的期望次数”相同, 即为 m_{jj} .

第六部分: 分支过程

Definition 2.5 (分支过程)

考虑一个由可产生同类后代的个体组成的群体。假设每个个体在其生命结束时, 与其他个体独立地, 以概率

$$p_j, j = 0, 1, 2, \dots$$

产生 j 个子裔。

令 X_0 为初始个体数, 称为第 0 代的规模; 第 0 代所有个体的子裔组成第 1 代, 其个数记为 X_1 ; 一般地, X_n 表示第 n 代的规模。

随机过程

$$\{X_n, n \geq 0\}$$

称为分支过程。

假设 $X_0 = 1$ 。记

$$\pi_0 = P\{\text{群体最终灭绝}\}.$$

对第一代个体数取条件, 有

$$\pi_0 = \sum_{j=0}^{\infty} P\{\text{群体灭绝} \mid X_1 = j\} p_j.$$

若 $X_1 = j$, 则群体最终灭绝当且仅当由这 j 个第一代个体分别开始的 j 个家庭全部灭绝。由于各家庭独立, 且每个家庭的灭绝概率仍为 π_0 , 故

$$P\{\text{群体灭绝} \mid X_1 = j\} = \pi_0^j.$$

因此

$$\pi_0 = \sum_{j=0}^{\infty} p_j \pi_0^j. \quad (4.5.1)$$

Theorem 2.5 (分支过程的灭绝概率)

假设 $X_0 = 1$ 。记

$$\pi_0 = P\{\text{群体最终灭绝}\}.$$

假设

$$p_0 > 0, p_0 + p_1 < 1.$$

则:

- (i) π_0 是方程 $s = \sum_{j=0}^{\infty} p_j s^j$ 的最小非负解;
- (ii) $\pi_0 = 1 \iff \mu \leq 1$.

也就是说: 若 $\mu \leq 1$, 则群体以概率 1 最终灭绝; 若 $\mu > 1$, 则群体有正概率永不灭绝, 且灭绝概率是方程 $s = \phi(s)$ 在 $[0, 1)$ 中的最小根。

第七部分: 时间可逆的 Markov 链

Definition 2.6 (稳定态下的倒向链)

设一个不可约正常返 Markov 链具有转移概率 P_{ij}

和平稳分布 $\{\pi_i, i \geq 0\}$. 若初始状态按平稳分布选取, 则该链处于稳定态。

现在从某个时刻开始沿时间倒向观察状态序列, 即观察 $X_n, X_{n-1}, X_{n-2}, \dots$. 则倒向过程本身仍是一个 Markov 链, 其转移概率记为 P_{ij}^* 。

$$P_{ij}^* = \frac{\pi_j P_{ji}}{\pi_i}.$$

倒向过程仍是 Markov 链的原因是: 给定当前状态后, 过去状态与未来状态条件独立。也就是说, 若把时刻 $m+1$ 看作“现在”, 则在给定 X_{m+1} 后, X_m 与 $X_{m+2}, X_{m+3}, \dots$ 独立。

Definition 2.7 (时间可逆)

若倒向链与原链具有相同的转移概率, 即对一切 i, j 有

$$P_{ij}^* = P_{ij},$$

则称该 Markov 链是时间可逆的。

由倒向转移概率公式可知, 时间可逆等价于

$$\pi_i P_{ij} = \pi_j P_{ji}, \forall i, j. \quad (4.7.1)$$

即时间可逆要求: 任意两个状态之间的正向流量和反向流量相等。

Proposition 2.4 (时间可逆推出平稳分布)

若存在非负数 $\{x_i\}$, 满足 $\sum_i x_i = 1$, 并且对一切 i, j 有 $x_i P_{ij} = x_j P_{ji}$, 则 $\{x_i\}$ 是该 Markov 链的平稳分布。

若能找到满足时间可逆的概率分布, 则既得到了平稳分布, 也证明了链是时间可逆的。这是求平稳分布时非常重要的方法。

Proposition 2.5 (一维随机徘徊型链的可逆性)

若一个遍历 Markov 链只能在相邻状态之间移动, 即

$$P_{i,i+1} + P_{i,i-1} = 1,$$

则该链是时间可逆的。

直观理由是: 在任意长时间内, 从 i 到 $i+1$ 的转移次数与从 $i+1$ 到 i 的转移次数最多相差 1。因此在长程比例意义下, 这两个方向的转移频率相等, 则有:

$$\pi_i P_{i,i+1} = \pi_{i+1} P_{i+1,i}.$$

Metropolis 算法的核心思路也正是构造一个满足细致平衡方程的 Markov 链: 如果目标分布难以直接模拟, 就构造一个容易模拟的链, 使其平稳分布恰好为目标分布。

Definition 2.8 (边加权图上的随机徘徊)

考虑一个有限图, 每条边 (i, j) 附有正权重 w_{ij} , 且

$$w_{ij} = w_{ji}.$$

若 (i, j) 不是边, 则令

$$w_{ij} = 0.$$

定义质点在图上移动: 若当前在顶点 i , 则下一步移动到顶点 j 的概率为

$$P_{ij} = \frac{w_{ij}}{\sum_k w_{ik}}.$$

这样的 Markov 链称为边加权图上的随机徘徊。

在 24 和 25 年卷中都考过。

Proposition 2.6 (命题 4.7.1: 边加权图随机徘徊的平稳分布)

考虑有限个顶点的边加权图上的随机徘徊。若该 Markov 链不可约, 则它是正常返的、时间可逆的, 且平稳概率为

$$\pi_i = \frac{\sum_k w_{ik}}{\sum_j \sum_k w_{jk}}.$$

Theorem 2.6 (定理 4.7.2: 路径判别准则)

一个平稳 Markov 链是时间可逆的, 当且仅当: 对任意状态 i , 任意从 i 出发又回到 i 的路径, 其正向路径概率与逆向路径概率相等。

即对一切状态

$$i, i_1, i_2, \dots, i_k$$

都有

$$P_{i,i_1} P_{i_1,i_2} \cdots P_{i_k,i} = P_{i,i_k} P_{i_k,i_{k-1}} \cdots P_{i_1,i}. \quad (4.7.4)$$

特别地, 对任意三个状态 i, j, k , 时间可逆的必要条件是

$$P_{ik} P_{kj} P_{ji} = P_{ij} P_{jk} P_{ki}. \quad (4.7.3)$$

这表示沿环路

$$i \rightarrow k \rightarrow j \rightarrow i$$

的概率与沿其逆向环路

$$i \rightarrow j \rightarrow k \rightarrow i$$

的概率相同。

Theorem 2.7 (定理 4.7.3: 倒向链与平稳分布)

考虑一个具有转移概率 P_{ij} 的不可约 Markov 链。若可以找到和为 1 的非负数

$$\{\pi_i, i \geq 0\}$$

以及一个转移概率矩阵

$$P^* = (P_{ij}^*)$$

使得

$$\pi_i P_{ij} = \pi_j P_{ji}^*, \quad (4.7.5)$$

则 $\{\pi_i\}$ 是原链的平稳分布, 且 P^* 是倒向链的转移概率矩阵。

这个定理的用途在于: 有时直接求平稳分布很困难, 但可以先猜测倒向链的转移结构, 再利用 $\pi_i P_{ij} = \pi_j P_{ji}^*$ 同时求出平稳分布和倒向链。

第九部分: 半 Markov 过程与嵌入 Markov 链

Definition 2.9 (半 Markov 过程)

半 Markov 过程是这样一种过程: 它访问的状态按照一个 Markov 链转移, 但在两次状态转移之间停留的时间是随机的。

更具体地, 设过程每次进入状态 i 后:

(i) 下一次进入状态 j 的概率为 P_{ij} ;

(ii) 在指定下一状态为 j 的条件下, 从 i 到 j 的转移时间分布为 F_{ij} 。

若以 $Z(t)$ 记时刻 t 的状态, 则

$$\{Z(t), t \geq 0\}$$

称为一个半 Markov 过程。

半 Markov 过程一般不具有通常意义下的 Markov 性。原因是: 若要预测未来, 仅知道当前状态还不够, 还需要知道过程已经在当前状态停留了多长时间。

但是, 在转移发生的时刻, 过程只需要知道新进入的状态, 而不需要知道更早的历史。

Definition 2.10 (嵌入 Markov 链)

设半 Markov 过程依次访问的状态为

$$X_0, X_1, X_2, \dots,$$

其中 X_n 表示第 n 次转移后进入的状态。则

$$\{X_n, n \geq 0\}$$

是一个离散时间 Markov 链，其转移概率为 P_{ij} 。则这个 Markov 链称为该半 Markov 过程的嵌入 Markov 链。

也就是说，嵌入 Markov 链只记录状态跳转的顺序：

$$X_0 \rightarrow X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow \cdots,$$

而忽略每两个状态之间实际经过了多长时间。

Markov 链本身可以看作半 Markov 过程的特殊情形：每次转移所需时间恒等于 1，即

$$F_{ij}(t) = \begin{cases} 0, & t < 1, \\ 1, & t \geq 1. \end{cases}$$

总结

$$\text{赌徒破产概率: } f_i = \begin{cases} \frac{1 - (q/p)^i}{1 - (q/p)^N}, & p \neq q, \\ \frac{i}{N}, & p = q = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$\text{赌徒破产期望时间: } \mathbb{E}_i[B] = \frac{Nf_i - i}{p - q}, p \neq q$$

$$\text{暂态基本矩阵: } M = (I - Q)^{-1}, m_{ij} = E_i[\text{访问 } j \text{ 的总次数}]$$

$$f_{ij} = \frac{m_{ij}}{m_{jj}}$$

$$\text{分支过程灭绝概率: } \pi_0 = \sum_{j=0}^{\infty} p_j \pi_0^j$$

$$\text{时间可逆} \iff \pi_i P_{ij} = \pi_j P_{ji}$$

$$\text{倒向链转移概率: } P_{ij}^* = \frac{\pi_j P_{ji}}{\pi_i}$$

2.1.2 第五章知识点

第一部分：连续时间 Markov 链与转移速率

Definition 2.11 (连续时间 Markov 链)

考虑取值于有限或可数状态空间的随机过程

$$\{X(t), t \geq 0\}.$$

若对一切 $s, t \geq 0$ ，一切状态 i, j ，以及一切过去路径信息

$$X(u) = x(u), 0 \leq u < s,$$

都有

$$P\{X(t+s)=j \mid X(s)=i, X(u)=x(u), 0 \leq u < s\} = P\{X(t+s)=j \mid X(s)=i\},$$

则称 $\{X(t), t \geq 0\}$ 为连续时间 Markov 链。

若进一步

$$P\{X(t+s)=j \mid X(s)=i\}$$

与 s 无关, 则称其具有时齐转移概率。记

$$P_{ij}(t) = P\{X(t+s)=j \mid X(s)=i\}.$$

连续时间 Markov 链与离散时间 Markov 链的核心区别在于: 离散时间链每一步都发生在整数时刻, 而连续时间链在某一状态停留一段随机时间后才跳转。连续时间 Markov 链是特殊的半 Markov 链。

Proposition 2.7 (停留时间的指数性)

设过程进入状态 i 后, 到离开状态 i 为止的停留时间记为 T_i 。由 Markov 性可知, 对一切 $s, t \geq 0$,

$$P\{T_i > s+t \mid T_i > s\} = P\{T_i > t\}.$$

因此 T_i 具有无记忆性, 从而 T_i 服从指数分布。

记其速率为 ν_i , 即

$$P\{T_i > t\} = e^{-\nu_i t}.$$

若 $\nu_i = 0$, 则状态 i 为吸收态; 若 $\nu_i = \infty$, 则称状态 i 为瞬时状态。通常只考虑

$$0 \leq \nu_i < \infty.$$

Definition 2.12 (嵌入链与转移速率)

连续时间 Markov 链可以理解为:

先在状态 i 停留指数时间, 然后跳到下一个状态。

设离开状态 i 后跳到状态 j 的概率为 p_{ij} , 其中

$$p_{ii} = 0, \sum_{j \neq i} p_{ij} = 1.$$

则称

$$q_{ij} = \nu_i p_{ij}, i \neq j,$$

为从状态 i 到状态 j 的转移速率。

直观地, 在很小的时间区间 h 内,

$$P\{X(t+h)=j \mid X(t)=i\} = q_{ij}h + o(h), i \neq j,$$

而

$$P\{X(t+h)=i \mid X(t)=i\} = 1 - \nu_i h + o(h),$$

其中

$$\nu_i = \sum_{j \neq i} q_{ij}.$$

Definition 2.13 (生成矩阵)

定义矩阵 $Q = (q_{ij})$ 为

$$q_{ij} \geq 0, i \neq j,$$

并令

$$q_{ii} = -\nu_i = -\sum_{j \neq i} q_{ij}.$$

矩阵 Q 称为连续时间 Markov 链的生成矩阵或无穷小生成元。

因此每一行之和为

$$\sum_j q_{ij} = 0.$$

第二部分：生灭过程

Definition 2.14 (生灭过程)

若状态空间为 $\{0, 1, 2, \dots\}$ ，且过程每次只能从状态 i 跳到相邻状态 $i+1$ 或 $i-1$ ，即只要 $|i-j| > 1$ 就有 $q_{ij} = 0$ ，则称该连续时间 Markov 链为生灭过程。记

$$\lambda_i = q_{i,i+1}, i \geq 0,$$

为出生率，记

$$\mu_i = q_{i,i-1}, i \geq 1,$$

为死亡率。于是

$$\nu_i = \lambda_i + \mu_i,$$

其中通常令 $\mu_0 = 0$ 。

生灭过程可以理解为：当系统中有 i 个个体时，下一个出生时间服从速率为 λ_i 的指数分布，下一个死亡时间服从速率为 μ_i 的指数分布，二者相互独立。

Example 2.3 (常见生灭过程)

1. Poisson 过程

若

$$\lambda_i = \lambda, \mu_i = 0, i \geq 0,$$

则得到速率为 λ 的 Poisson 过程。

2. Yule 过程

若每个个体独立地以速率 λ 生育，且没有死亡，则

$$\lambda_i = i\lambda, \mu_i = 0.$$

这称为 Yule 过程。若 $X(0) = i$, 则

$$P_{ij}(t) = \binom{j-1}{i-1} e^{-i\lambda t} (1 - e^{-\lambda t})^{j-i}, j \geq i \geq 1.$$

3. $M/M/s$ 排队系统

顾客按速率 λ 的 Poisson 过程到达, 有 s 个服务台, 每个服务台服务时间服从速率为 μ 的指数分布。若 $X(t)$ 表示时刻 t 系统中的顾客数, 则

$$\lambda_n = \lambda, n \geq 0,$$

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu, & 1 \leq n \leq s, \\ s\mu, & n > s. \end{cases}$$

4. 简单流行病模型

设群体总人数为 m , 已有感染者不会康复。若当前有 n 个感染者, 则有 $m-n$ 个易感者, 每一对“感染者-易感者”以速率 α 发生感染, 则

$$\lambda_n = n(m-n)\alpha, n = 1, \dots, m-1.$$

此时 $\{X(t)\}$ 是纯生过程。

第三部分: Kolmogorov 微分方程

Theorem 2.8 (连续时间 Chapman-Kolmogorov 方程)

对一切 $s, t \geq 0$, 有

$$P_{ij}(t+s) = \sum_k P_{ik}(t) P_{kj}(s).$$

矩阵形式为

$$P(t+s) = P(t)P(s).$$

Theorem 2.9 (Kolmogorov 向后方程)

在适当正则条件下, 对一切 i, j 有

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k \neq i} q_{ik} P_{kj}(t) - \nu_i P_{ij}(t).$$

若采用生成矩阵 Q , 则可写为

$$P'(t) = QP(t).$$

Theorem 2.10 (Kolmogorov 向前方程)

在适当正则条件下, 对一切 i, j 有

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k \neq j} P_{ik}(t) q_{kj} - \nu_j P_{ij}(t).$$

矩阵形式为

$$P'(t) = P(t)Q.$$

Example 2.4 (两状态连续时间 Markov 链)

考虑状态空间 $\{0, 1\}$ 。设过程从 0 到 1 的速率为 λ ，从 1 到 0 的速率为 μ 。即

$$q_{01} = \lambda, q_{10} = \mu.$$

则

$$\nu_0 = \lambda, \nu_1 = \mu.$$

由向前方程可得

$$P'_{00}(t) = \mu P_{01}(t) - \lambda P_{00}(t).$$

因为

$$P_{01}(t) = 1 - P_{00}(t),$$

所以

$$P'_{00}(t) = \mu - (\lambda + \mu)P_{00}(t).$$

解得

$$P_{00}(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t}.$$

类似地，

$$P_{10}(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} - \frac{\mu}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t}.$$

因此极限概率为

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_{00}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{10}(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu}.$$

Definition 2.15 (矩阵指数表示)

若状态空间有限，或生成矩阵满足适当有界条件，则

$$P(t) = e^{Qt},$$

其中

$$e^{Qt} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(Qt)^n}{n!}.$$

第四部分：极限概率与平稳分布**Definition 2.16 (连续时间链的平稳分布)**

概率分布 $\{P_j, j \geq 0\}$ 若满足

$$P_j = \sum_i P_i P_{ij}(t), \forall t \geq 0,$$

则称其为连续时间 Markov 链的平稳分布。

等价地，平稳分布满足

$$PQ = 0,$$

即对每个 j ,

$$\sum_i P_i q_{ij} = 0.$$

展开为

$$\nu_j P_j = \sum_{i \neq j} P_i q_{ij}.$$

再加上归一化条件

$$\sum_j P_j = 1.$$

上式称为平衡方程。其含义为：

进入状态 j 的长期速率 = 离开状态 j 的长期速率。

具体地，

$$\sum_{i \neq j} P_i q_{ij}$$

表示进入状态 j 的总速率，而

$$\nu_j P_j$$

表示离开状态 j 的总速率。

Theorem 2.11 (极限概率)

若连续时间 Markov 链不可约且正常返，则存在极限概率

$$P_j = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{ij}(t),$$

且与初始状态 i 无关。

此时 $\{P_j\}$ 是平稳分布，并且是方程组

$$\begin{aligned} \nu_j P_j &= \sum_{i \neq j} P_i q_{ij}, j \geq 0, \\ \sum_j P_j &= 1 \end{aligned}$$

的唯一非负解。

同时， P_j 也等于过程处在状态 j 的长程时间比例。

Proposition 2.8 (生灭过程的极限概率)

对生灭过程，平衡方程可化为局部平衡方程：

$$\lambda_n P_n = \mu_{n+1} P_{n+1}, n \geq 0.$$

因此

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{\lambda_0}{\mu_1} P_0, \\ P_2 &= \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2} P_0, \end{aligned}$$

一般地，

$$P_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n} P_0, n \geq 1.$$

由归一化条件

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1,$$

可得

$$P_0 = \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n} \right]^{-1}.$$

极限概率存在的条件为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n} < \infty.$$

Example 2.5 ($M/M/1$ 排队系统)

对 $M/M/1$ 排队系统, 有

$$\lambda_n = \lambda, \mu_n = \mu.$$

因此

$$P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n P_0.$$

若

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1,$$

则

$$P_0 = 1 - \rho,$$

从而

$$P_n = (1 - \rho) \rho^n, n = 0, 1, 2, \cdots.$$

若 $\lambda \geq \mu$, 则不存在正常化的极限概率。

Example 2.6 ($M/M/s$ 排队系统的平稳分布)

对 $M/M/s$ 系统, 有

$$\lambda_n = \lambda, n \geq 0,$$

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu, & 1 \leq n \leq s, \\ s\mu, & n > s. \end{cases}$$

令

$$\rho = \frac{\lambda}{s\mu}.$$

若

$$\rho < 1,$$

则存在平稳分布。

由生灭过程公式,

$$P_n = \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} P_0, 0 \leq n \leq s,$$

而当 $n > s$ 时,

$$P_n = \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \left(\frac{\lambda}{s\mu} \right)^{n-s} P_0.$$

其中 P_0 由

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$$

确定, 即

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{s-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \frac{1}{1 - \lambda/(s\mu)} \right]^{-1}.$$

Example 2.7 (机器修理模型)

设有 M 台机器和一个修理工。每台机器工作到损坏前的时间服从速率为 λ 的指数分布, 修理时间服从速率为 μ 的指数分布。

若状态 n 表示有 n 台机器损坏, 则这是生灭过程, 且

$$\lambda_n = (M - n)\lambda, 0 \leq n \leq M,$$

$$\mu_n = \mu, n \geq 1.$$

因此

$$P_n = \frac{M!}{(M - n)!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n P_0, n = 0, 1, \dots, M,$$

其中

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^M \frac{M!}{(M - n)!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \right]^{-1}.$$

第五部分: 时间可逆性

Definition 2.17 (倒向链)

设连续时间 Markov 链处在稳态, 平稳分布为 $\{P_i\}$ 。从时间倒向观察该过程, 仍得到一个连续时间 Markov 链, 称为倒向链。

倒向链的转移速率记为 q_{ij}^* , 则

$$q_{ij}^* = \frac{P_j q_{ji}}{P_i}.$$

等价地,

$$P_i q_{ij}^* = P_j q_{ji}.$$

Definition 2.18 (时间可逆)

若倒向链与原链具有相同的概率规律, 即

$$q_{ij}^* = q_{ij}, \forall i, j,$$

则称该连续时间 Markov 链是时间可逆的。

等价地, 对一切 i, j ,

$$P_i q_{ij} = P_j q_{ji}.$$

其直观含义是:

从 i 到 j 的长期转移速率 = 从 j 到 i 的长期转移速率.

Proposition 2.9 (时间可逆推出平稳分布)

若存在非负数 $\{P_i\}$, 满足

$$\sum_i P_i = 1,$$

且对一切 i, j 有

$$P_i q_{ij} = P_j q_{ji},$$

则 $\{P_i\}$ 是平稳分布, 并且该链是时间可逆的。

Proposition 2.10 (生灭过程的时间可逆性)

处在稳态的遍历生灭过程是时间可逆的。

$$P_i \lambda_i = P_{i+1} \mu_{i+1}, i \geq 0.$$

这正是前面求生灭过程平稳分布时使用的局部平衡方程。

Proposition 2.11 ($M/M/s$ 输出过程)

考虑稳态下的 $M/M/s$ 排队系统。若

$$\lambda < s\mu,$$

则系统的输出过程, 即顾客离开系统的时刻, 构成速率为 λ 的 Poisson 过程。

该结论的核心思想是: $M/M/s$ 队列对应的生灭过程是时间可逆的。正向看, 顾客到达使系统人数增加 1, 到达过程是 Poisson 过程; 倒向看, 这些“增加 1”的时刻对应正向过程中的离开时刻, 因此离开过程也是同速率的 Poisson 过程。

Proposition 2.12 (截断后的时间可逆性)

设一个时间可逆链的状态空间为 S , 平稳分布为 $\{P_i, i \in S\}$ 。若将链截断在某个子集 $A \subset S$ 上, 即禁止从 A 跳出到 A^c , 且截断后的链在 A 上仍不可约, 则截断后的链仍是时间可逆的。其平稳分布为

$$P_i^A = \frac{P_i}{\sum_{j \in A} P_j}, i \in A.$$

第六部分: 倒向链在排队论中的应用

Theorem 2.12 (开放排队网络的乘积形式解)

考虑有 k 个服务站的开放排队网络。外部顾客以速率 r_i 的 Poisson 过程到达服务站 i 。顾客

在服务站 i 完成服务后, 以概率 p_{ij} 转到服务站 j , 并以概率

$$1 - \sum_{j=1}^k p_{ij}$$

离开系统。

设服务站 i 是 $M/M/1$ 服务台, 服务速率为 μ_i 。令 λ_i 表示到达服务站 i 的总到达率, 则 λ_i 满足交通方程

$$\lambda_j = r_j + \sum_{i=1}^k \lambda_i p_{ij}, j = 1, \dots, k.$$

若

$$\lambda_i < \mu_i, i = 1, \dots, k,$$

则稳态下各服务站人数相互独立, 并且

$$P\{N_1 = n_1, \dots, N_k = n_k\} = \prod_{i=1}^k \left(1 - \frac{\lambda_i}{\mu_i}\right) \left(\frac{\lambda_i}{\mu_i}\right)^{n_i}.$$

Proposition 2.13 (排队网络的离开过程)

在上述开放排队网络中, 顾客从服务站 i 离开整个系统的过程是 Poisson 过程, 其速率为

$$\lambda_i \left(1 - \sum_{j=1}^k p_{ij}\right).$$

不同服务站离开系统的输出过程相互独立。

Theorem 2.13 (Erlang 消失公式)

考虑一个有 k 条服务线的消失系统。顾客按速率为 λ 的 Poisson 过程到达, 服务时间分布为 G , 均值为

$$\mathbb{E}[S].$$

若到达时所有 k 条服务线都忙, 则该顾客不进入系统并消失。

稳态下系统中顾客数 N 的分布为

$$P\{N = n\} = \frac{(\lambda \mathbb{E}[S])^n / n!}{\sum_{i=0}^k (\lambda \mathbb{E}[S])^i / i!}, n = 0, 1, \dots, k.$$

特别地, 顾客被拒绝进入系统的长期比例为

$$P\{N = k\} = \frac{(\lambda \mathbb{E}[S])^k / k!}{\sum_{i=0}^k (\lambda \mathbb{E}[S])^i / i!}.$$

Erlang 消失公式的重要特点是: 系统中顾客数的极限分布只通过服务时间分布的均值 $\mathbb{E}[S]$ 依赖于 G , 而与 G 的具体形状无关。

Theorem 2.14 ($M/G/1$ 共享处理系统)

考虑 $M/G/1$ 共享处理系统。顾客按速率为 λ 的 Poisson 过程到达, 每个顾客需要的工作量分布为 G , 均值为 $\mathbb{E}[S]$ 。服务台以单位速率工作, 并在当前所有顾客之间平均分配服务能力。

若

$$\rho = \lambda \mathbb{E}[S] < 1,$$

则稳态下系统中顾客数 N 满足

$$P\{N = n\} = (1 - \rho)\rho^n, n = 0, 1, 2, \dots$$

因此系统中平均顾客数为

$$L = \mathbb{E}[N] = \frac{\rho}{1 - \rho}.$$

由 Little 公式 $L = \lambda W$ 得, 顾客平均逗留时间为

$$W = \frac{\mathbb{E}[S]}{1 - \rho}.$$

若一个顾客所需工作量为 y , 则其条件平均逗留时间为

$$\mathbb{E}[W | S = y] = \frac{y}{1 - \rho}.$$

第七部分: 本章核心总结

连续时间 Markov 链 = 指数停留时间 + 嵌入离散 Markov 链

q_{ij} = 从 i 到 j 的转移速率

$$q_{ij} = \nu_i p_{ij}, \nu_i = \sum_{j \neq i} q_{ij}$$

$$P'(t) = QP(t), P'(t) = P(t)Q$$

$$PQ = 0, \sum_i P_i = 1$$

$$\text{时间可逆} \iff P_i q_{ij} = P_j q_{ji}$$

生灭过程平稳分布由局部平衡方程 $P_i \lambda_i = P_{i+1} \mu_{i+1}$ 给出

2.1.3 第六章知识点

第一部分: 鞅

Definition 2.19 (鞅)

一个随机过程 $\{Z_n, n \geq 1\}$ 若对一切 n 有

$$\mathbb{E}[|Z_n|] < \infty,$$

并且满足

$$\mathbb{E}[Z_{n+1} | Z_1, Z_2, \dots, Z_n] = Z_n, \quad (6.1.1)$$

则称 $\{Z_n, n \geq 1\}$ 为鞅过程, 简称为鞅。

实际意义: 鞅是“公平博弈”的数学刻画。若 Z_n 表示赌徒在第 n 次赌博后的财富, 则

$$\mathbb{E}[Z_{n+1} | Z_1, \dots, Z_n] = Z_n$$

表示：无论过去发生了什么，在已知当前财富为 Z_n 的条件下，下一次赌博后的期望财富仍等于当前财富。

未来的条件期望 = 现在的值.

对鞅条件两边取期望，由全期望公式可得

$$\mathbb{E}[Z_{n+1}] = \mathbb{E}\{\mathbb{E}[Z_{n+1} \mid Z_1, \dots, Z_n]\} = \mathbb{E}[Z_n].$$

因此

$$\mathbb{E}[Z_n] = \mathbb{E}[Z_1], n \geq 1.$$

即鞅在平均意义下保持不变。

Example 2.8 (鞅的一些重要构造方法)

下面汇总教材中“鞅的一些例子”和“鞅的更多例子”的核心内容。重点不在于单个例子本身，而在于掌握几类常用的构造鞅的方法。

1. 均值为 0 的独立同分布随机变量的部分和构造鞅

令 $X_1, X_2, \dots$ 是均值为 0 的独立同分布随机变量，定义

$$Z_n = \sum_{i=1}^n X_i.$$

则 $\{Z_n, n \geq 1\}$ 是鞅。因为

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z_{n+1} \mid Z_1, \dots, Z_n] &= \mathbb{E}[Z_n + X_{n+1} \mid Z_1, \dots, Z_n] \\ &= \mathbb{E}[Z_n \mid Z_1, \dots, Z_n] + \mathbb{E}[X_{n+1} \mid Z_1, \dots, Z_n]. \end{aligned}$$

由于 X_{n+1} 独立于过去，且 $\mathbb{E}[X_{n+1}] = 0$ ，所以

$$\mathbb{E}[Z_{n+1} \mid Z_1, \dots, Z_n] = Z_n + \mathbb{E}[X_{n+1}] = Z_n.$$

构造思想：若增量 X_i 是独立且均值为 0 的，则部分和

$$Z_n = X_1 + \dots + X_n$$

自然形成鞅。这是最基本的鞅构造方法。

2. 均值为 1 的独立随机变量的乘积构造鞅

若 $X_1, X_2, \dots$ 是独立随机变量，且

$$\mathbb{E}[X_i] = 1, i \geq 1,$$

定义

$$Z_n = \prod_{i=1}^n X_i.$$

则 $\{Z_n, n \geq 1\}$ 是鞅。因为

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z_{n+1} \mid Z_1, \dots, Z_n] &= \mathbb{E}[Z_n X_{n+1} \mid Z_1, \dots, Z_n] \\ &= Z_n \mathbb{E}[X_{n+1} \mid Z_1, \dots, Z_n] = Z_n \mathbb{E}[X_{n+1}] = Z_n. \end{aligned}$$

构造思想：若因子 X_i 独立且均值为 1，则乘积

$$Z_n = X_1 X_2 \dots X_n$$

形成鞅。这类乘积鞅常用于指数型不等式、大偏差估计和随机徘徊问题。

3. 分支过程中的标准化规模构造鞅

考虑一个分支过程，以 X_n 记第 n 代的规模。若每个个体的平均子裔数为 m ，则

$$Z_n = \frac{X_n}{m^n}$$

是一个鞅。

直观解释：虽然 X_n 本身可能随 n 增长或衰减，但除以其平均增长因子 m^n 后，得到的标准化过程在条件期望意义下保持不变。

4. 给定更多信息来证明鞅

有时直接计算

$$\mathbb{E}[Z_{n+1} \mid Z_1, \dots, Z_n]$$

不方便。教材指出，可以先给定更多信息，例如某个随机向量 Y 。如果能够证明

$$\mathbb{E}[Z_{n+1} \mid Z_1, \dots, Z_n, Y] = Z_n,$$

那么由条件期望的迭代性质

$$\mathbb{E}[X \mid U] = \mathbb{E}\{\mathbb{E}[X \mid Y, U] \mid U\}, \quad (6.1.2)$$

可得

$$\mathbb{E}[Z_{n+1} \mid Z_1, \dots, Z_n] = \mathbb{E}\{\mathbb{E}[Z_{n+1} \mid Z_1, \dots, Z_n, Y] \mid Z_1, \dots, Z_n\} = Z_n.$$

构造思想：证明鞅时可以“多给条件”，先在更细的信息下验证条件期望等于 Z_n ，再用迭代条件期望回到原来的条件信息。

5. Doob 鞅

令 $X, Y_1, Y_2, \dots$ 为任意随机变量，且

$$\mathbb{E}[|X|] < \infty.$$

定义

$$Z_n = \mathbb{E}[X \mid Y_1, \dots, Y_n].$$

则 $\{Z_n, n \geq 1\}$ 是鞅。事实上，

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z_{n+1} \mid Y_1, \dots, Y_n] &= \mathbb{E}\{\mathbb{E}[X \mid Y_1, \dots, Y_n, Y_{n+1}] \mid Y_1, \dots, Y_n\} \\ &= \mathbb{E}[X \mid Y_1, \dots, Y_n] = Z_n. \end{aligned}$$

这类鞅称为 Doob 鞅。

实际意义：若 X 是我们想预测的随机变量，而 $Y_1, \dots, Y_n$ 是逐渐积累的信息，则

$$\mathbb{E}[X \mid Y_1, \dots, Y_n]$$

是给定当前信息时对 X 的最优均方预测。随着信息增加，最优预测序列构成一个鞅。

6. 用“实际值减去条件期望”构造鞅

对任意随机变量序列 $X_1, X_2, \dots$ ，定义

$$Z_n = \sum_{i=1}^n (X_i - \mathbb{E}[X_i \mid X_1, \dots, X_{i-1}]),$$

其中对 $i=1$ ，可将 $\mathbb{E}[X_1 \mid X_1, \dots, X_0]$ 理解为 $\mathbb{E}[X_1]$ 。

若对一切 n 有

$$\mathbb{E}[|Z_n|] < \infty,$$

则 $\{Z_n, n \geq 1\}$ 是均值为 0 的鞅。

因为

$$Z_{n+1} = Z_n + X_{n+1} - \mathbb{E}[X_{n+1} | X_1, \dots, X_n].$$

于是

$$\mathbb{E}[Z_{n+1} | X_1, \dots, X_n] = Z_n + \mathbb{E}[X_{n+1} | X_1, \dots, X_n] - \mathbb{E}[X_{n+1} | X_1, \dots, X_n] = Z_n.$$

构造思想：任意过程都可以通过“减去条件期望漂移”的方式构造出鞅：

$$\text{鞅增量} = \text{真实增量} - \text{在过去信息下的期望增量}.$$

这是一种非常重要的“去漂移”方法。

第二部分：停时

Definition 2.20 (随机时刻、停时与停止过程)

设 $\{Z_n, n \geq 1\}$ 是一个随机过程。

1. 随机时刻

可能取无穷大的正整数值随机变量 N 称为关于过程 $\{Z_n, n \geq 1\}$ 的随机时刻，如果事件

$$\{N = n\}$$

由随机变量

$$Z_1, Z_2, \dots, Z_n$$

决定。也就是说，只要知道了前 n 步的信息，就能判断是否有 $N = n$ 。

2. 停时

若随机时刻 N 进一步满足

$$P\{N < \infty\} = 1,$$

则称 N 为一个停时。

停时的直观意义是：是否在时刻 n 停止，只能根据到时刻 n 为止已经观察到的信息来决定，不能依赖未来信息。

3. 停止过程

令 N 是关于过程 $\{Z_n, n \geq 1\}$ 的一个随机时刻，定义停止过程 $\{\tilde{Z}_n, n \geq 1\}$ 为

$$\tilde{Z}_n = \begin{cases} Z_n, & n \leq N, \\ Z_N, & n > N. \end{cases}$$

即过程在时刻 N 以后保持不变。

若 $\{Z_n, n \geq 1\}$ 是鞅，则停止过程

$$\{\tilde{Z}_n, n \geq 1\}$$

也是鞅。这就是命题 6.2.1 的结论。

证明思想：令

$$I_n = \begin{cases} 1, & N \geq n, \\ 0, & N < n. \end{cases}$$

则

$$\tilde{Z}_n = \tilde{Z}_{n-1} + I_n(Z_n - Z_{n-1}). \quad (6.2.1)$$

由于 I_n 由过去信息决定，而

$$\mathbb{E}[Z_n - Z_{n-1} \mid Z_1, \dots, Z_{n-1}] = 0,$$

所以停止以后不会改变鞅的公平性。

由停止过程仍是鞅可得，对一切 n ，

$$\mathbb{E}[\tilde{Z}_n] = \mathbb{E}[Z_1].$$

若当 $n \rightarrow \infty$ 时可以把极限和期望交换，并且 $\tilde{Z}_n \rightarrow Z_N$ ，则会得到

$$\mathbb{E}[Z_N] = \mathbb{E}[Z_1].$$

这正是鞅停止定理的核心思想。

Theorem 2.15 (鞅停止定理)

若 N 是关于鞅 $\{Z_n, n \geq 1\}$ 的停时，并且下列条件之一成立：

- (i) Z_n 一致有界；
 - (ii) N 是有界的；
 - (iii) $\mathbb{E}[N] < \infty$, 且存在 $M < \infty$ 使得
- $$\mathbb{E}[|Z_{n+1} - Z_n| \mid Z_1, \dots, Z_n] < M,$$

则

$$\mathbb{E}[Z_N] = \mathbb{E}[Z_1].$$

实际意义：在一个公平博弈中，如果赌徒采用一个停时规则决定何时离开，并且满足上述正则条件之一，则他最终财富的期望仍等于初始财富的期望。

公平博弈 + 合理停止规则 $\implies$ 期望财富不变.

因此，在这些条件下，不存在一种“永远能在期望意义下获利”的赌博停止策略。

Theorem 2.16 (推论 6.2.3: Wald 方程)

若 $X_i, i \geq 1$ 独立同分布，且

$$\mathbb{E}[|X_i|] < \infty,$$

又若 N 是关于 $X_1, X_2, \dots$ 的停时，并且

$$\mathbb{E}[N] < \infty,$$

则

$$\mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^N X_i \right] = \mathbb{E}[N] \mathbb{E}[X_1].$$

证明思想：令

$$\mu = \mathbb{E}[X_1],$$

并定义

$$Z_n = \sum_{i=1}^n (X_i - \mu).$$

则 $\{Z_n, n \geq 1\}$ 是鞅。由鞅停止定理，

$$\mathbb{E}[Z_N] = 0.$$

而

$$Z_N = \sum_{i=1}^N X_i - \mu N.$$

因此

$$\mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^N X_i \right] - \mu \mathbb{E}[N] = 0,$$

即

$$\mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^N X_i \right] = \mathbb{E}[N] \mathbb{E}[X_1].$$

Example 2.9 (例 6.2(A): 直至指定模式出现的平均时间)

假设独立同分布的离散随机变量逐个被观察，每天观察一个。每次结果分别以概率

$$P\{0\} = \frac{1}{2}, P\{1\} = \frac{1}{3}, P\{2\} = \frac{1}{6}$$

取值为 0, 1, 2。求直到模式

$$0, 2, 0$$

首次出现所需观察数的期望。

例如，若出现序列为

$$2, 1, 2, 0, 2, 1, 0, 1, 0, 0, 2, 0,$$

则模式 0, 2, 0 首次在第 10, 11, 12 天出现，因此所需观察数为 12。

构造鞅的思路：

设想每天开始都有一个新的赌徒进入赌场，每个赌徒初始赌资为 1 个单位，并按如下规则下注：

第 i 个赌徒在第 i 天开始参赌，他先用 1 个单位赌当天的结果是 0。由于

$$P\{0\} = \frac{1}{2},$$

若赌赢，他的资金变为 2 个单位。

然后他用这 2 个单位赌下一天的结果是 2。由于

$$P\{2\} = \frac{1}{6},$$

公平赔率下若赌赢，他的资金变为

$$2 \cdot 6 = 12$$

个单位。

最后，他用全部 12 个单位赌再下一天的结果是 0。若再次成功，则他的资金变为

$$12 \cdot 2 = 24$$

个单位。

因此，每个赌徒有如下两种可能：

若三个赌局中任意一次失败，则损失初始的 1 个单位；

若连续猜中模式 0, 2, 0，则最终资金为 24，相对于初始赌资 1，净赢

$$24 - 1 = 23$$

个单位。

令 X_n 表示第 n 天结束后赌场的总赢利。因为每个赌局都是公平的，所以

$$\{X_n, n \geq 1\}$$

是均值为 0 的鞅。

令

$$N = \text{模式 } 0, 2, 0 \text{ 首次出现的时间.}$$

在第 N 天结束时：

$$\text{第 } 1, \dots, N-3 \text{ 个赌徒均已输掉 } 1 \text{ 个单位,}$$

给赌场带来赢利

$$N-3.$$

第 $N-2$ 个赌徒从第 $N-2$ 天开始，恰好猜中

$$0, 2, 0,$$

因此他净赢 23 个单位，赌场收益为

$$-23.$$

第 $N-1$ 个赌徒在第 $N-1$ 天第一步下注失败，赌场收益为

$$+1.$$

第 N 个赌徒在第 N 天猜中第一步的 0，净赢 1 个单位，赌场收益为

$$-1.$$

所以第 N 天结束时赌场总赢利为

$$X_N = (N-3) - 23 + 1 - 1 = N - 26.$$

由鞅停止定理,

$$\mathbb{E}[X_N] = 0.$$

因此

$$\mathbb{E}[N - 26] = 0,$$

从而

$$\mathbb{E}[N] = 26.$$

所以, 直到模式 0, 2, 0 首次出现所需观察数的期望为

$$\boxed{26}.$$

同样的方法可以用于任意指定模式。例如, 在投掷硬币中, 直到模式

$$HHTTHH$$

出现的平均时间为

$$p^{-4}q^{-2} + p^{-2} + p^{-1},$$

其中

$$p = P\{H\}, q = 1 - p.$$

Example 2.10 (例 6.2(B): 带正漂移随机徘徊的 hitting time)

考虑一个人从位置 0 出发, 每次以概率 p 向右移动一个单位, 以概率 $1 - p$ 向左移动一个单位, 且相继移动相互独立。假设

$$p > \frac{1}{2}.$$

求此人首次到达位置 $i(i > 0)$ 所需步数的期望。

令

$$X_j = \begin{cases} 1, & \text{第 } j \text{ 步向右,} \\ -1, & \text{第 } j \text{ 步向左.} \end{cases}$$

则

$$\mathbb{E}[X_j] = p - (1 - p) = 2p - 1.$$

若 N 是首次到达 i 的步数, 则

$$\sum_{j=1}^N X_j = i.$$

由 Wald 方程,

$$\mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^N X_j\right] = \mathbb{E}[N]\mathbb{E}[X_1].$$

因此

$$i = \mathbb{E}[N](2p - 1),$$

从而

$$\mathbb{E}[N] = \frac{i}{2p - 1}.$$

方法总结：本题的关键是把位置变化写成独立同分布增量的和：

$$S_N = \sum_{j=1}^N X_j.$$

当停时时刻 N 满足

$$S_N = i$$

时，直接使用 Wald 方程即可得到 $\mathbb{E}[N]$.

Example 2.11 (例 6.2(C): 三人硬币博弈)

玩家 X, Y, Z 初始分别有

$$x, y, z$$

个硬币，总数为

$$s = x + y + z.$$

每一步随机选取两名玩家，并要求第一人给另一人一个硬币。所有可能的选取等概率，并且相继选取独立。游戏持续到某一人拥有所有 s 个硬币为止。求游戏步数的期望。

教材的关键思想是：即使某人已经破产，也假想游戏继续进行，允许财富为负数，从而便于构造鞅。

令 X_n, Y_n, Z_n 分别表示第 n 局后三人的财富。令

$$T = \text{首次有两个人财富为0 的时刻.}$$

此时另一个人拥有全部 s 个硬币。

构造过程

$$M_n = X_n Y_n + X_n Z_n + Y_n Z_n + n.$$

教材验证了

$$\{M_n, n \geq 1\}$$

是鞅。

若三人都还在局中，即 $X_n Y_n Z_n > 0$ ，则例如

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[X_{n+1} Y_{n+1} \mid X_n = x, Y_n = y] \\ &= \frac{1}{6} [(x+1)y + (x+1)(y-1) + x(y+1) + x(y-1) + (x-1)y + (x-1)(y+1)] \\ &= xy - \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

类似地，

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_{n+1} Z_{n+1} \mid \text{过去}] &= X_n Z_n - \frac{1}{3}, \\ \mathbb{E}[Y_{n+1} Z_{n+1} \mid \text{过去}] &= Y_n Z_n - \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

因此三项之和的条件期望减少 1，而 n 增加 1，所以 M_n 保持鞅性。

若已有一人出局，例如 X 已出局，则

$$X_{n+1} = X_n = 0,$$

并且

$$\mathbb{E}[Y_{n+1}Z_{n+1} \mid Y_n = y, Z_n = z] = \frac{(y+1)(z-1) + (y-1)(z+1)}{2} = yz - 1.$$

此时 $Y_n Z_n$ 的条件期望减少 1, 而 n 增加 1, 所以仍有

$$\mathbb{E}[M_{n+1} \mid \text{过去}] = M_n.$$

由鞅停止定理,

$$\mathbb{E}[M_T] = E[M_0].$$

而

$$M_0 = xy + xz + yz.$$

在时刻 T , 三人中有两人的财富为 0, 所以

$$X_T Y_T + X_T Z_T + Y_T Z_T = 0.$$

因此

$$M_T = T.$$

于是

$$\mathbb{E}[T] = xy + xz + yz.$$

方法总结: 本题的关键不是直接分析 Markov 链状态, 而是构造一个含有补偿项 $+n$ 的鞅:

$$M_n = X_n Y_n + X_n Z_n + Y_n Z_n + n.$$

由于每一步使乘积和的条件期望减少 1, 加入 $+n$ 后恰好抵消漂移, 从而得到鞅。然后用鞅停止定理把

$$\mathbb{E}[M_T] = \mathbb{E}[M_0]$$

转化为所求的

$$\mathbb{E}[T].$$

第三部分: 下鞅、上鞅、鞅收敛定理

Definition 2.21 (下鞅与上鞅)

设随机过程 $\{Z_n, n \geq 1\}$ 满足

$$\mathbb{E}[|Z_n|] < \infty, n \geq 1.$$

若对一切 n 有

$$\mathbb{E}[Z_{n+1} \mid Z_1, \dots, Z_n] \geq Z_n, \quad (6.4.1)$$

则称 $\{Z_n, n \geq 1\}$ 为下鞅。

若对一切 n 有

$$\mathbb{E}[Z_{n+1} \mid Z_1, \dots, Z_n] \leq Z_n, \quad (6.4.2)$$

则称 $\{Z_n, n \geq 1\}$ 为上鞅。

下鞅表示“超公平博弈”, 即未来的条件期望不小于现在; 上鞅表示“欠公平博弈”, 即未来的条件期望不大于现在。

对下鞅取期望, 有

$$\mathbb{E}[Z_{n+1}] = \mathbb{E}\{\mathbb{E}[Z_{n+1} \mid Z_1, \dots, Z_n]\} \geq \mathbb{E}[Z_n].$$

因此

$$\mathbb{E}[Z_1] \leq \mathbb{E}[Z_2] \leq \dots.$$

对上鞅则有

$$\mathbb{E}[Z_{n+1}] \leq \mathbb{E}[Z_n],$$

即

$$\mathbb{E}[Z_1] \geq \mathbb{E}[Z_2] \geq \dots.$$

Theorem 2.17 (定理 6.4.1: 下鞅与上鞅的停止定理)

若 N 是关于 $\{Z_n, n \geq 1\}$ 的停时, 并且满足鞅停止定理中的充分条件之一, 即:

- (i) Z_n 一致有界;
 - (ii) N 是有界的;
 - (iii) $\mathbb{E}[N] < \infty$, 且存在 $M < \infty$ 使
- $$\mathbb{E}[|Z_{n+1} - Z_n| \mid Z_1, \dots, Z_n] < M,$$

则:

若 $\{Z_n, n \geq 1\}$ 是下鞅, 则

$$\mathbb{E}[Z_N] \geq \mathbb{E}[Z_1].$$

若 $\{Z_n, n \geq 1\}$ 是上鞅, 则

$$\mathbb{E}[Z_N] \leq \mathbb{E}[Z_1].$$

Theorem 2.18 (定理 6.4.6: 鞅收敛定理)

若 $\{Z_n, n \geq 1\}$ 是鞅, 且存在常数 $M < \infty$, 使得对一切 n 有

$$\mathbb{E}[|Z_n|] \leq M,$$

则以概率为 1, 存在有限极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n.$$

Theorem 2.19 (推论 6.4.7: 非负鞅收敛)

若 $\{Z_n, n \geq 1\}$ 是非负鞅, 则以概率为 1,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n$$

存在且有限。

理由是: 由于 $Z_n \geq 0$, 所以

$$\mathbb{E}[|Z_n|] = \mathbb{E}[Z_n] = \mathbb{E}[Z_1],$$

从而满足鞅收敛定理的 L^1 有界条件。

Example 2.12 (例 6.4(B): 公平博弈中的破产)

考虑一个参加公平博弈的赌徒。若 Z_n 表示赌徒在第 n 局后的财富，则

$$\{Z_n, n \geq 1\}$$

是一个鞅。

现在假设赌徒不能欠钱，即

$$Z_n \geq 0,$$

并且只要赌徒还在继续赌博，每一局至少赢或输 1 个单位。设

$$N = \text{赌徒被迫出局时刻}.$$

也就是说，在 $n < N$ 时仍在赌博，因此

$$|Z_{n+1} - Z_n| \geq 1.$$

由于 $\{Z_n, n \geq 1\}$ 是非负鞅，由推论 6.4.7 可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n$$

以概率为 1 存在且有限。

但是，如果赌徒永远不破产，即 $N = \infty$ ，那么他会无限次继续赌博，而每次赌博财富至少变化 1 个单位：

$$|Z_{n+1} - Z_n| \geq 1.$$

这就不可能使 Z_n 收敛到一个有限极限。

因此只能有

$$P\{N < \infty\} = 1.$$

即赌徒以概率 1 迟早破产。

本章核心总结

$$\text{鞅} \iff E[Z_{n+1} | \text{过去信息}] = Z_n$$

$$\text{下鞅} \iff E[Z_{n+1} | \text{过去信息}] \geq Z_n$$

$$\text{上鞅} \iff E[Z_{n+1} | \text{过去信息}] \leq Z_n$$

停时只依赖已经观察到的信息

鞅停止定理：公平博弈在合理停止规则下期望不变

$$\text{Wald 方程: } E \left[\sum_{i=1}^N X_i \right] = E[N]E[X_1]$$

鞅收敛定理： L^1 有界鞅几乎必然收敛

非负鞅必收敛，是鞅收敛定理最常用的形式之一

2.1.4 第八章知识点

第一部分：引言与准备知识

Definition 2.22 (Brown 运动)

随机过程 $\{X(t), t \geq 0\}$ 若满足:

$$(i) X(0) = 0;$$

(ii) $\{X(t), t \geq 0\}$ 有平稳的独立增量;

(iii) 对任意 $t > 0$, $X(t)$ 服从均值为0、方差为 $c^2 t$ 的正态分布,

则称 $\{X(t), t \geq 0\}$ 为 Brown 运动过程。

当 $c = 1$ 时, 称为 标准 Brown 运动。由于一般 Brown 运动可通过

$$\frac{X(t)}{c}$$

转化为标准 Brown 运动, 因此通常只讨论标准 Brown 运动。

Proposition 2.14 (Brown 运动的 Markov 性)

Brown 运动的独立增量性质蕴含它是 Markov 过程。

事实上, 对任意 $s, t \geq 0$, $X(s+t) - X(s)$ 与时刻 s 以前的全部历史独立。因此

$$\begin{aligned} & P\{X(t+s) \leq a \mid X(s) = x, X(u), 0 \leq u < s\} \\ &= P\{X(t+s) - X(s) \leq a - x \mid X(s) = x, X(u), 0 \leq u < s\} \\ &= P\{X(t+s) - X(s) \leq a - x\} \\ &= P\{X(t+s) \leq a \mid X(s) = x\}. \end{aligned}$$

这说明: 给定当前状态 $X(s)$ 后, 未来状态的条件分布不再依赖过去路径。

Definition 2.23 (Brown 运动的密度与有限维联合密度)

由于 $X(t)$ 服从均值为 0、方差为 t 的正态分布, 所以其密度函数为

$$f_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-x^2/(2t)}.$$

由平稳独立增量可得, 若

$$0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n,$$

则

$$(X(t_1), X(t_2), \cdots, X(t_n))$$

的联合密度为

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f_{t_1}(x_1) f_{t_2-t_1}(x_2 - x_1) \cdots f_{t_n-t_{n-1}}(x_n - x_{n-1}). \quad (8.1.3)$$

原则上, 利用该式可以计算关于 Brown 运动有限多个时刻取值的任意概率。

Proposition 2.15 (Brown 运动的条件分布)

设 $0 < s < t$ 。若给定

$$X(t) = B,$$

则 $X(s)$ 的条件分布为正态分布, 并且

$$\mathbb{E}[X(s) | X(t) = B] = \frac{s}{t}B, \quad (8.1.4a)$$

$$\text{Var}(X(s) | X(t) = B) = \frac{s(t-s)}{t}. \quad (8.1.4b)$$

特别地, 若令

$$\alpha = \frac{s}{t}, 0 < \alpha < 1,$$

则给定 $X(t)$ 时, $X(s)$ 的条件均值和方差可写为

$$\mathbb{E}[X(s) | X(t)] = \alpha X(t),$$

$$\text{Var}(X(s) | X(t)) = \alpha(1-\alpha)t.$$

注意: 条件方差不依赖于给定的终点值 B , 只依赖于 s, t 。

Definition 2.24 (Gauss 过程)

若对任意

$$t_1, t_2, \dots, t_n,$$

随机向量

$$(X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n))$$

都具有多元正态分布, 则称随机过程 $\{X(t), t \geq 0\}$ 为 Gauss 过程。

由式 (8.1.3) 可知 Brown 运动是 Gauss 过程。由于多元正态分布由均值向量与协方差矩阵完全决定, 因此 Brown 运动也可以等价地定义为满足

$$\mathbb{E}[X(t)] = 0$$

且对 $s \leq t$ 有

$$\text{Cov}(X(s), X(t)) = s$$

的 Gauss 过程。

Definition 2.25 (Brown 桥)

考虑标准 Brown 运动 $\{X(t), t \geq 0\}$, 并在条件 $X(1) = 0$ 下观察区间 $[0, 1]$ 上的过程:

$$\{X(t), 0 \leq t \leq 1 | X(1) = 0\}.$$

这个过程称为 Brown 桥, 因为它在 0 和 1 两端被固定。

Brown 桥是均值为 0 的 Gauss 过程, 并且当 $s \leq t$ 时, 其协方差函数为

$$\text{Cov}(X(s), X(t) | X(1) = 0) = s(1-t).$$

Proposition 2.16 (命题 8.1.1: Brown 桥的构造)

若 $\{X(t), t \geq 0\}$ 是标准 Brown 运动, 定义

$$Z(t) = X(t) - tX(1), 0 \leq t \leq 1,$$

则

$$\{Z(t), 0 \leq t \leq 1\}$$

是 Brown 桥过程。

第二部分：击中时刻、最大随机变量、反正弦律

Definition 2.26 (击中时刻)

设 $\{X(t), t \geq 0\}$ 是标准 Brown 运动。对实数 a ，定义

$$T_a = \inf\{t \geq 0 : X(t) = a\}$$

为 Brown 运动首次击中 a 的时刻。

Theorem 2.20 (击中时刻分布)

设 $a > 0$ 。为了计算

$$P\{T_a \leq t\},$$

考虑事件

$$\{X(t) \geq a\}$$

并按是否已经在 t 前击中 a 取条件：

$$\begin{aligned} P\{X(t) \geq a\} &= P\{X(t) \geq a \mid T_a \leq t\}P\{T_a \leq t\} \\ &\quad + P\{X(t) \geq a \mid T_a > t\}P\{T_a > t\}. \end{aligned} \quad (8.2.1)$$

若 $T_a \leq t$ ，则过程在 $[0, t]$ 中某时刻已经击中 a 。由 Brown 运动路径在击中点之后的对称性可知，在时刻 t 它等可能地位于 a 上方或下方，因此

$$P\{X(t) \geq a \mid T_a \leq t\} = \frac{1}{2}.$$

另一方面，若 $T_a > t$ ，由于路径连续，在击中 a 之前不可能有 $X(t) \geq a$ ，所以

$$P\{X(t) \geq a \mid T_a > t\} = 0.$$

于是由式 (8.2.1) 得

$$P\{T_a \leq t\} = 2P\{X(t) \geq a\}.$$

由于 $X(t) \sim N(0, t)$ ，

$$P\{T_a \leq t\} = 2 \int_a^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-x^2/(2t)} dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{a/\sqrt{t}}^\infty e^{-y^2/2} dy. \quad (8.2.2)$$

令 $t \rightarrow \infty$ ，得到

$$P\{T_a < \infty\} = 1.$$

也就是说，Brown 运动以概率 1 迟早会击中任意给定的正水平 a 。

但另一方面，

$$\mathbb{E}[T_a] = \int_0^\infty P\{T_a > t\} dt = \infty.$$

因此，虽然 Brown 运动以概率 1 最终会击中 a ，但是平均击中时间是无穷大。

几乎必然会发生 $\nRightarrow$ 平均等待时间有限。

若 $a < 0$, 由 Brown 运动关于原点的对称性, 有 T_a 与 T_{-a} 同分布。因此对任意 $a \neq 0$,

$$P\{T_a \leq t\} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{|a|/\sqrt{t}}^{\infty} e^{-y^2/2} dy.$$

重点:

(1) Brown 运动路径在击中点之后的对称性:

$$P\{X(t) \geq a \mid T_a \leq t\} = \frac{1}{2}.$$

(2) $P\{T_a \leq t\} = 2P\{X(t) \geq a\}$.

(3) $P\{T_a < \infty\} = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{T_a \leq t\} = 1, E[T_a] = \infty$.

以概率为 1 地 Brown 运动过程迟早会击中

Theorem 2.21 (Brown 运动最大值的分布)

考虑 Brown 运动在区间 $[0, t]$ 中达到的最大值

$$\max_{0 \leq s \leq t} X(s).$$

对 $a > 0$,

$$\left\{ \max_{0 \leq s \leq t} X(s) \geq a \right\} = \{T_a \leq t\}.$$

因此由击中时刻公式,

$$\begin{aligned} P\left\{ \max_{0 \leq s \leq t} X(s) \geq a \right\} &= P\{T_a \leq t\} \\ &= 2P\{X(t) \geq a\} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{a/\sqrt{t}}^{\infty} e^{-y^2/2} dy. \end{aligned}$$

上述结论的核心方法是反射原理: 若 Brown 运动已经在 t 前击中 a , 则从首次击中 a 之后的路径可以关于水平线 a 反射, 从而把“曾经越过 a ”的问题转化为终点 $X(t)$ 的分布问题。

Proposition 2.17 (命题 8.2.1: 无零点区间的反正弦律)

对 $0 < x < 1$,

$$P\{\text{Brown 运动在 } (xt, t) \text{ 中无零点}\} = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{x}.$$

这一结论与对称随机徘徊中的相应结论一致: 对称随机徘徊在缩放极限下趋向 Brown 运动, 因此随机徘徊中关于“后段无零点”的反正弦律, 在 Brown 运动中变成了精确等式。

Proposition 2.18 (命题 8.2.2: 取正时间比例的反正弦律)

对 Brown 运动, 令

$$A(t) = \text{在 } [0, t] \text{ 中 Brown 运动取正值的时间总量}.$$

则对 $0 < x < 1$,

$$P\left\{ \frac{A(t)}{t} < x \right\} = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{x}.$$

这说明 Brown 运动在 $[0, t]$ 中取正值的时间比例并不是集中在 $1/2$ 附近, 而是服从反正弦分布。该分布在 0 和 1 附近较大, 表示 Brown 运动较可能在很长一段时间里主要位于同一侧。

第三部分: Brown 运动的变种

本节只列出四种变种的定义公式。

Definition 2.27 (在一点吸收的 Brown 运动)

令 $\{X(t), t \geq 0\}$ 是 Brown 运动, 且

$$T_x = \inf\{t \geq 0 : X(t) = x\}, x > 0.$$

定义

$$Z(t) = \begin{cases} X(t), & t < T_x, \\ x, & t \geq T_x. \end{cases}$$

则 $\{Z(t), t \geq 0\}$ 称为在点 x 吸收的 Brown 运动。即过程一旦击中 x , 以后便永远停留在 x 。

Definition 2.28 (在原点反射的 Brown 运动)

若 $\{X(t), t \geq 0\}$ 是 Brown 运动, 定义

$$Z(t) = |X(t)|, t \geq 0.$$

则 $\{Z(t), t \geq 0\}$ 称为在原点反射的 Brown 运动。

Definition 2.29 (几何 Brown 运动)

若 $\{X(t), t \geq 0\}$ 是 Brown 运动, 定义

$$Y(t) = e^{X(t)}, t \geq 0.$$

则 $\{Y(t), t \geq 0\}$ 称为几何 Brown 运动。

Definition 2.30 (积分 Brown 运动)

若 $\{X(t), t \geq 0\}$ 是 Brown 运动, 定义

$$Z(t) = \int_0^t X(s)ds, t \geq 0.$$

则 $\{Z(t), t \geq 0\}$ 称为积分 Brown 运动。

本章以上内容核心总结

Brown 运动 = 对称随机徘徊在 $\Delta x = \sqrt{\Delta t}$ 尺度下的极限

$$X(t) \sim N(0, t), X(t) - X(s) \sim N(0, t - s)$$

Brown 运动具有平稳独立增量, 因此是 Markov 过程

$$\text{Cov}(X(s), X(t)) = \min(s, t)$$

$$\text{Brown 桥: } Z(t) = X(t) - tX(1)$$

$$P\{T_a \leq t\} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{|a|/\sqrt{t}}^{\infty} e^{-y^2/2} dy$$

$$P\left\{\max_{0 \leq s \leq t} X(s) \geq a\right\} = 2P\{X(t) \geq a\}$$

$$P\left\{\frac{A(t)}{t} < x\right\} = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{x}$$

2.2 部分作业题与往年考题

2.2.1 作业题

Exercise 2.1 (Ex 4.1)

一个商店对某种商品的库存用以下的 (s, S) 订货策略：若在一个时期开始时商店的供应量是 x ，则订货

$$\begin{cases} 0, & \text{若 } x \geq s \\ S - x, & \text{若 } x < s \end{cases}$$

订货立刻供应。每天的需求以概率 α_j 等于 j ，各天的需求是独立的。而不能立刻满足的需求就会失去。以 X_n 记在第 n 个时期结束时的存货水平。论证 $\{X_n, n \geq 1\}$ 是 Markov 链并计算它的转移概率。

解. 设第 n 个时期开始时，订货后的总供应量为 $Y_n = X_{n-1} + (S - X_{n-1})I_{\{X_{n-1} < s\}}$ 。记第 n 天的需求量为 D_n ，由题意可知 D_n 独立同分布，且 $P(D_n = j) = \alpha_j$ （应有 $\alpha_j = 0, \forall j < 0$ ）。

因为不能立刻满足的需求会失去，所以第 n 个时期结束时的存货水平为 $X_n = \max(0, Y_n - D_n)$ 。给定历史状态 $X_1 = i_1, \dots, X_{n-1} = i$ 时， X_n 的条件分布仅依赖于 X_{n-1} 的取值，即：

$$\begin{aligned} P(X_n = j \mid X_1 = i_1, \dots, X_{n-1} = i) \\ = P(\max(0, X_{n-1} + (S - X_{n-1})I_{\{X_{n-1} < s\}} - D_n) = j \mid X_{n-1} = i) = P(X_n = j \mid X_{n-1} = i). \end{aligned}$$

故 $\{X_n, n \geq 1\}$ 是 Markov 链。

其转移概率 $P_{ij} = P(X_n = j \mid X_{n-1} = i)$ 需分两种情况计算：

1. 当 $j > 0$ 时，期末有剩余库存，说明当期需求量 $D_n = i + (S - i)I_{\{i < s\}} - j$ ：

$$P_{ij} = P(D_n = i + (S - i)I_{\{i < s\}} - j) = \alpha_{i + (S - i)I_{\{i < s\}} - j}.$$

2. 当 $j = 0$ 时，期末库存为空，说明当期需求量大于等于订货后的总供应量，即 $D_n \geq i + (S - i)I_{\{i < s\}}$ ：

$$P_{i0} = P(D_n \geq i + (S - i)I_{\{i < s\}}) = \sum_{k=i+(S-i)I_{\{i < s\}}}^{\infty} \alpha_k.$$

Exercise 2.2 (Ex 4.10)

在每个时期的开始， N 个个体中的每一个处在三个可能的情况之一：有传染性，受感染但无传染性，或未感染。若一个未感染的个体在一段时期变成受感染，则它在该时期中处在受感染（但没有传染性）情况。在每个时期个体的 $\binom{N}{2}$ 对独立地以概率 p 相接触。若一对个体相接触，且其中之一的成员有传染性，而另一个未感染，则未感染的人变成受感染（于是在下一个时期的开始处在有传染性情况）。以 X_n 和 Y_n 分别记在第 n 个时期开始有传染性的个体数和未感染的个体数。

- (a) 若在一个时期的开始有 i 个有传染性的个体, 问一个指定的未感染的个体在此时期变成受感染的概率是多少?
- (b) $\{X_n, n \geq 0\}$ 是 Markov 链吗? 如果是, 给出它的转移概率。
- (c) $\{Y_n, n \geq 0\}$ 是 Markov 链吗? 如果是, 给出它的转移概率。
- (d) $\{(X_n, Y_n), n \geq 0\}$ 是 Markov 链吗? 如果是, 给出它的转移概率。

解. (a) 由题, 对一个指定的未感染个体来说, 它与每一个有传染性的个体都独立地以概率 p 接触, 因此它在这一时期内不与任何一个有传染性的个体接触的概率是 $(1-p)^i$. 于是该个体在这一时期变成受感染的概率为 $1 - (1-p)^i$.

(b) 若 $(X_n, Y_n) = (i, j)$, 设第 n 个时期内增加的感染的人数为 Z_n , 则每一个未感染个体在这一时期内变成受感染的概率都是 $1 - (1-p)^i$, 并且对不同未感染个体, 这些事件相互独立。故 $Z_n \sim B(j, 1 - (1-p)^i)$. 因此 $X_{n+1} = X_n + Z_n$ 并不只依赖于 X_n , 还依赖于 Y_n , 所以一般来说, $\{X_n, n \geq 0\}$ 不是 Markov 链。

(c) 若 $(X_n, Y_n) = (i, j)$, 由 (b) 有 $Z_n \sim B(j, 1 - (1-p)^i)$, 并且 $Y_{n+1} = Y_n - Z_n$. 因此 Y_{n+1} 同样不只依赖于 Y_n , 还依赖于 X_n , 所以一般来说, $\{Y_n\}$ 不是 Markov 链。

(d) 若 $(X_n, Y_n) = (i, j)$, 则由 (b)(c) 可知下一时刻的状态完全由这一时期中增加的感染的人数 Z_n 决定, 而这一人数的分布只依赖于 $(X_n, Y_n) = (i, j)$, 与过去的状态无关。且转移概率为

$$P_{(i,j),(k,l)} = \begin{cases} \binom{j}{l} (1 - (1-p)^i)^{j-l} ((1-p)^i)^l, & k+l = i+j = N, 0 \leq i \leq k \leq N \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

故 $\{(X_n, Y_n)\}$ 是 Markov 链, 且其状态空间可写为 $\{(i, j) : i \geq 0, j \geq 0, i+j = N\}$.

Exercise 2.3 (Ex 4.16)

一个人有 r 把雨伞, 用于在她家和办公室之间来往。若一天开始时 (结束时) 她在家 (办公室), 而正在下雨, 倘若有雨伞可拿, 则她将拿一把雨伞去办公室 (家)。若不在下雨, 则从不拿雨伞。假定独立于过去的情形, 一天开始时 (结束时) 下雨的概率为 p .

- (a) 定义一个有 $r+1$ 个状态的 Markov 链, 它将帮助我们确定这个人被淋湿的时间比例。(注: 若正在下雨而所有的雨伞都在她的另一个地点, 则她将被淋湿。)
- (b) 计算其极限概率。
- (c) 这个人被淋湿的时间比例是多少?

解. (a) 令 X_n 表示第 n 次出发时, 她所在地点的雨伞数。于是状态空间为

$$S = \{0, 1, \dots, r\}.$$

若出发时所在地点有 i 把雨伞, 则另一地点有 $r-i$ 把雨伞。

若此时不下雨, 概率为 $1-p$, 她不带伞去另一地点, 因此下一次出发时所在地点的雨伞数为 $r-i$.

若此时下雨且 $i \geq 1$, 概率为 p , 她带一把伞去另一地点, 因此下一次出发时所在地点的雨伞数为 $r-i+1$.

若此时下雨且 $i=0$, 她没有伞可拿, 会被淋湿; 但到达另一地点后, 另一地点有全部 r 把伞, 因此下一次出发时所在地点的雨伞数为 r .

所以转移概率为

$$P_{i,r-i} = 1 - p, 0 \leq i \leq r,$$

$$P_{i,r-i+1} = p, 1 \leq i \leq r.$$

特别地, 当 $i = 0$ 时,

$$P_{0,r} = 1.$$

因此, 题目要求的 Markov 链就是以

$X_n =$ 第 n 次出发时所在地点的雨伞数

为状态的链, 其状态空间为 $\{0, 1, \dots, r\}$, 转移概率如上所示。

(b) 设平稳分布为

$$\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_r).$$

由转移结构可得, 状态 0 只能由状态 r 在不下雨时转移而来, 因此

$$\pi_0 = (1 - p)\pi_r.$$

对于 $1 \leq i \leq r$, 由对称的转移结构可推出

$$\pi_i = \pi_r, i = 1, 2, \dots, r.$$

因此

$$\pi_1 = \pi_2 = \dots = \pi_r.$$

又因为

$$\pi_0 + \pi_1 + \dots + \pi_r = 1,$$

所以

$$(1 - p)\pi_r + r\pi_r = 1.$$

于是

$$\pi_r = \frac{1}{r + 1 - p}.$$

从而

$$\begin{aligned} \pi_i &= \frac{1}{r + 1 - p}, i = 1, 2, \dots, r, \\ \pi_0 &= \frac{1 - p}{r + 1 - p}. \end{aligned}$$

因此, 该 Markov 链的极限概率为

$$\pi_0 = \frac{1 - p}{r + 1 - p}, \pi_i = \frac{1}{r + 1 - p}, i = 1, 2, \dots, r.$$

(c) 她被淋湿当且仅当出发时正在下雨且所在地点没有雨伞, 即 $X_n = 0$ 且下雨。因此长期被淋湿的时间比例为

$$p\pi_0 = p \cdot \frac{1 - p}{r + 1 - p}.$$

所以, 这个人被淋湿的长期时间比例为

$$\frac{p(1 - p)}{r + 1 - p}.$$

Exercise 2.4 (Ex 4.21)

考虑状态为 $0, 1, 2, \dots$ 的 Markov 链, 它是

$$P_{i,i+1} = p_i = 1 - P_{i,i-1},$$

其中 $p_0 = 1$. 求使链正常返的这些 p_i 满足的充要条件, 并在此种情形计算极限概率。

解. 记

$$q_i = 1 - p_i, i \geq 1.$$

若该链存在平稳分布 $\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots)$, 因为它 $P_{i,i+1} + P_{i,i-1} = 1$ 的遍历链, 则有时间可逆性方程:

$$\pi_i p_i = \pi_{i+1} q_{i+1}$$

因此

$$\pi_{i+1} = \pi_i \frac{p_i}{q_{i+1}}.$$

递推可得

$$\pi_n = \pi_0 \frac{p_0 p_1 \cdots p_{n-1}}{q_1 q_2 \cdots q_n}, n \geq 1.$$

因为又 $\sum_{n=0}^{\infty} \pi_n = 1$, 带入上式:

$$\pi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \pi_0 a_n = \pi_0 \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_0 p_1 \cdots p_{n-1}}{q_1 q_2 \cdots q_n} \right) < \infty.$$

因此该链正常返的充要条件为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_0 p_1 \cdots p_{n-1}}{q_1 q_2 \cdots q_n} < \infty.$$

在此情形下, 令

$$C = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_0 p_1 \cdots p_{n-1}}{q_1 q_2 \cdots q_n}.$$

则极限概率为

$$\pi_0 = \frac{1}{C},$$

$$\pi_n = \frac{1}{C} \frac{p_0 p_1 \cdots p_{n-1}}{q_1 q_2 \cdots q_n}, n \geq 1.$$

Exercise 2.5 (Ex 4.35)

考虑一个分支过程, 每个个体的子裔数具有均值为 λ ($\lambda > 1$) 的 Poisson 分布. 以 π_0 记从单个个体开始的群体迟早灭绝的概率. 又令 a ($a < 1$) 使

$$ae^{-a} = \lambda e^{-\lambda}.$$

(a) 证明 $a = \lambda \pi_0$.

(b) 证明: 在取条件于迟早灭绝时, 这个分支过程, 与单个个体的子裔数是均值为 a 的 Poisson 随机变量的分支过程, 遵循相同的概率规律。

证明. 这是一个 Galton-Watson 分支过程. 单个个体的子裔数服从均值为 λ 的 Poisson 分布, 因此其概率母函数为

$$f(s) = e^{\lambda(s-1)}.$$

(a) 灭绝概率 π_0 是方程

$$s = f(s)$$

在区间 $[0, 1]$ 中的最小根。因此

$$\pi_0 = e^{\lambda(\pi_0-1)}.$$

题中给定 $a < 1$, 且

$$ae^{-a} = \lambda e^{-\lambda}.$$

两边同除以 λ , 得

$$\frac{a}{\lambda} = e^{a-\lambda}.$$

令

$$\pi_0 = \frac{a}{\lambda}.$$

则

$$e^{\lambda(\pi_0-1)} = e^{\lambda(a/\lambda-1)} = e^{a-\lambda}.$$

又因为

$$\frac{a}{\lambda} = e^{a-\lambda},$$

所以

$$\pi_0 = e^{\lambda(\pi_0-1)}.$$

即 $\pi_0 = a/\lambda$ 确为灭绝方程在 $[0, 1]$ 中的根。由于 $\lambda > 1$ 时灭绝概率是该方程在 $[0, 1)$ 中的最小根, 所以

$$\pi_0 = \frac{a}{\lambda}.$$

因此

$$\boxed{a = \lambda\pi_0.}$$

(b) 设一个个体的子裔数为 Z 。在条件灭绝事件下, 若该个体有 k 个子裔, 则这 k 个子分支过程都必须最终灭绝。因此

$$P(Z = k \mid \text{最终灭绝}) = \frac{P(Z = k)\pi_0^k}{\pi_0}.$$

由 $Z \sim \text{Poisson}(\lambda)$, 有

$$P(Z = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

所以

$$P(Z = k \mid \text{最终灭绝}) = \frac{e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \pi_0^k}{\pi_0}.$$

利用灭绝方程

$$\pi_0 = e^{\lambda(\pi_0-1)},$$

得到

$$\frac{e^{-\lambda}}{\pi_0} = e^{-\lambda\pi_0}.$$

因此

$$P(Z = k \mid \text{最终灭绝}) = e^{-\lambda\pi_0} \frac{(\lambda\pi_0)^k}{k!}.$$

又由第一问知

$$\lambda\pi_0 = a.$$

所以

$$P(Z = k | \text{最终灭绝}) = e^{-a} \frac{a^k}{k!}.$$

这说明在给定最终灭绝条件下, 每个个体的子裔数服从均值为 a 的 Poisson 分布。

并且由于各个子分支过程相互独立, 条件在最终灭绝事件下, 后代分支仍然独立且服从相同的条件分布。因此, 在给定最终灭绝时, 该分支过程与一个子裔数服从 $\text{Poisson}(a)$ 的 Galton–Watson 分支过程具有相同的概率规律。□

Exercise 2.6 (Ex 4.41)

一个质点沿在圆周上的 n 个地点 (与 n 相邻的地点是 $n-1$ 和 1) 之间移动。每一步或以概率 p 沿顺时针方向移动一个位置, 或以概率 $1-p$ 沿逆时针方向移动一个位置。

- (a) 求倒向链的转移概率。
(b) 这个链是否时间可逆?

解. 不妨设 $n \geq 3$, 否则平凡。(a) 首先 $P_{ij}^* = \pi_j P_{ji} / \pi_i$. 所以只需求极限概率, 列出极限方程组:

$$\begin{cases} \pi_1 = \pi_2(1-p) + \pi_n p \\ \pi_i = \pi_{i+1}(1-p) + \pi_{i-1}p, 2 \leq i \leq n-1 \\ \pi_n = \pi_1(1-p) + \pi_{n-1}p \\ \pi_1 + \cdots + \pi_n = 1 \end{cases}$$

解得 $\pi_i = 1/n$. 所以倒向转移概率 $P_{ij}^* = P_{ji}$. 即 $P_{i,i+1}^* = 1-p, P_{i,i-1}^* = p$, 其中下标按模 n 理解。

(b) 时间可逆当且仅当 $P_{ij}^* = P_{ij}$, 即 $p = 1-p$. 于是当且仅当 $p = 1/2$ 时这个链是时间可逆的。

Exercise 2.7 (Ex 4.46)

以 $\{X_n, n \geq 1\}$ 记一个具有可数个状态的不可约 Markov 链。现在考虑一个只接受 Markov 链在 0 和 N 之间的值的新随机过程 $\{Y_n, n \geq 0\}$ 。即定义 Y_n 为 Markov 链在 0 和 N 之间的第 n 个值。例如, 若 $N = 3$ 且 $X_1 = 1, X_2 = 3, X_3 = 5, X_4 = 6, X_5 = 2$, 则 $Y_1 = 1, Y_2 = 3, Y_3 = 2$ 。

- (a) $\{Y_n, n \geq 0\}$ 是否为 Markov 链? 简单解释之。
(b) 以 π_j 记 $\{X_n, n \geq 1\}$ 处在状态 j 的时间比例。如果对一切 j 有 $\pi_j > 0$, $\{Y_n, n \geq 0\}$ 处在 $0, 1, \dots, N$ 中每个状态的时间比例是多少?
(c) 如果 $\{X_n\}$ 是零常返的, 且以 $\pi_j(N)$ ($j = 0, \dots, N$) 记 $\{Y_n, n \geq 0\}$ 的长程比例。证明对 $j \neq i$ 有

$$\pi_j(N) = \pi_i(N) \mathbb{E}[\text{过程 } X \text{ 在回到 } i \text{ 之前处在 } j \text{ 的时间}].$$

- (d) 用 (c) 论证, 在对称随机徘徊中, 在回到原点之前访问状态 i 的期望次数等于 1 。
(e) 如果 $\{X_n, n \geq 0\}$ 是时间可逆的, 证明 $\{Y_n, n \geq 0\}$ 也是时间可逆的。

证明. (a) 是 Markov 链, 因为在给定 $Y_{n-1} = i$ 的条件下考虑 Y_n 的分布, 其实就是考虑在链 $\{X_n\}$ 里, 从 i 转移到 $[0, N]$ 中的状态的分布, 而我们有 X_n 是 Markov 链, 于是这只依赖于当前的状态 i , 而独立于所有过去的状态。故 $\{Y_n, n \geq 0\}$ 是 Markov 链。

(b) 也就是说在 1 个时间单位内处于 j 状态的时间是 π_j , 删去 $\{X_n\}$ 特有的状态就可以得到 $\{Y_n\}$ 所有状态总时间占比是 $\sum_{i=0}^N \pi_i$, 从而 $\{Y_n\}$ 处于状态 j 的时间比例是 $\pi_j / (\sum_{i=0}^N \pi_i)$.

(c) 由更新报酬过程理论可得

$$\pi_j(N) = \frac{\mathbb{E}[\text{两次访问 } i \text{ 之间访问 } j \text{ 的次数}]}{\mathbb{E}[\text{链 } Y_n \text{ 两次访问 } i \text{ 之间的时间}]}, \text{ 且我们有 } \pi_i(N) = \frac{1}{\mathbb{E}[\text{链 } Y_n \text{ 两次访问 } i \text{ 之间的时间}]}.$$

于是就得到 $\pi_j(N) = \pi_i(N) \mathbb{E}[\text{过程 } X \text{ 在回到 } i \text{ 之前处在 } j \text{ 的时间}]$.

(d) 对每个给定的 i , 在 (c) 中, 将链 $\{X_n\}$ 取为对称随机徘徊, 取 i 为 0 且将 j 替换为 i , 取 $N > i$, 则要证明期望为 1, 只需要证明链 $\{Y_n\}$ 每个状态的极限概率都相等. 而由方程组:

$$\begin{cases} \pi_0 = \frac{1}{2}(\pi_0 + \pi_1), \pi_N = \frac{1}{2}(\pi_{N-1} + \pi_N) \\ \pi_k = \frac{1}{2}(\pi_{k-1} + \pi_{k+1}), 1 \leq k \leq N-1 \end{cases}$$

显然解是所有极限概率都相等, 代入 (c) 的结论就完成了证明.

(e) 首先 $\{X_n\}$ 时间可逆意味着 $\pi_i P_{ij}^X = \pi_j P_{ji}^X$. 要证明 $\{Y_n\}$ 时间可逆, 也就是要证明 $\pi_i(N) P_{ij}^Y = \pi_j(N) P_{ji}^Y$. 由于等式左右两边分别表示在链 $\{Y_n\}$ 中从状态 $i(j)$ 进入 $j(i)$ 的速率, 我们同时考虑在链 $\{X_n\}$ 中从状态 $i(j)$ 进入 $j(i)$ 的速率, 可以写出如下的等式, 其中 $P(k, j, N)$ 表示从 k 出发, 不经过任何落在 $[0, N]$ 中的状态, 最后抵达 j 的概率:

$$\begin{aligned} \pi_i(N) P_{ij}^Y &= \pi_i(N) P_{ij}^X + \pi_i(N) \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus [0, N]} P_{ik} P(k, j, N), \\ \pi_j(N) P_{ji}^Y &= \pi_j(N) P_{ji}^X + \pi_j(N) \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus [0, N]} P_{jk} P(k, i, N). \end{aligned}$$

两式右边的第一项显然相等, 因为 $\pi_k(N)$ 实际上就是我们在 (b) 中求出的时间比例, 其与在链 $\{X_n\}$ 中的长程比例 π_k 仅差一个常数倍. 至于两式的第二项, 一个是对所有正向路径的概率求和, 另一个是对所有逆向路径的概率求和, 而链 $\{X_n\}$ 是时间可逆的, 故由定理 4.7.2 可知相等. $\square$

Exercise 2.8 (Ex 4.50)

一个出租车交替行驶在三个地点之间. 当它到达地点 1 时, 它下一次等可能地驶向 2 或 3. 当它到达地点 2 时, 它下一次以概率 $1/3$ 驶向 1, 而以概率 $2/3$ 驶向 3. 从 3 它总是驶向 1. 在地点 i 和 j 之间的平均时间是 $t_{12} = 20, t_{13} = 30, t_{23} = 30$ ($t_{ij} = t_{ji}$).

(a) 出租车最近停在地点 i ($i = 1, 2, 3$) 的(极限)概率是多少?

(b) 出租车前往地点 2 的(极限)概率是多少?

(c) 出租车从 2 前往 3 的行程所占的时间比例是多少? 注: 在到达一个地点时出租车立刻离开.

解. (a) 记地点 i 为状态 i , 则转移概率为:

$$P_{11} = 0, P_{12} = P_{13} = \frac{1}{2}, P_{21} = \frac{1}{3}, P_{22} = 0, P_{23} = \frac{2}{3}, P_{31} = 1, P_{32} = P_{33} = 0.$$

于是转移概率矩阵为:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

而 $(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)P$, 则 $\pi_1 = \pi_2/3 + \pi_3, \pi_2 = \pi_1/2, \pi_3 = \pi_1/2 + 2\pi_2/3$, 且 $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$. 则 $\pi_1 = 3/7, \pi_2 = 3/14, \pi_3 = 5/14$. 而 $\mu_1 = P_{12}t_{12} + P_{13}t_{13} = 25, \mu_2 = P_{21}t_{21} + P_{23}t_{23} = 80/3, \mu_3 =$

$P_{31}t_{31} = 30$. 则由定理 4.8.3 可知 $P_i = \pi_i \mu_i / (\sum_j \pi_j \mu_j)$. 并且

$$\pi_1 \mu_1 = \frac{3}{7} \cdot 25 = \frac{75}{7}, \pi_2 \mu_2 = \frac{3}{14} \cdot \frac{80}{3} = \frac{40}{7}, \pi_3 \mu_3 = \frac{5}{14} \cdot 30 = \frac{75}{7}, \sum_j \pi_j \mu_j = \frac{190}{7}.$$

于是计算得到

$$P_1 = \frac{15}{38}, P_2 = \frac{4}{19}, P_3 = \frac{15}{38}.$$

即为出租车最近停在地点 1, 2, 3 的极限概率。

(b) 由习题 4.48 (c), 所求极限概率为

$$\frac{P_{12}\eta_{12}}{\mu_{11}} + \frac{P_{22}\eta_{22}}{\mu_{22}} + \frac{P_{32}\eta_{32}}{\mu_{33}} = \frac{P_{12}t_{12}}{\mu_{11}}.$$

而 $P_1 = \mu_1/\mu_{11}$, $\mu_{11} = \mu_1/P_1 = 190/3$. 则

$$\frac{1}{\mu_{11}} P_{12} t_{12} = \frac{3}{19}.$$

故出租车前往地点 2 的极限概率为 3/19.

Exercise 2.9 (Ex 5.4)

对出生参数为 $\lambda_n (n \geq 0)$ 的纯生过程, 计算这个群体的规模从 0 到 N 所需时间的均值、方差和矩母函数。

解. 设纯生过程为 $X(t)$, 出生参数为 $\lambda_n, n \geq 0$. 群体从规模 $i-1$ 到 i 所需时间记为 $S_i, i \geq 1$. 则从 0 到 N 所需时间为

$$T_N = S_1 + \cdots + S_N.$$

由纯生过程的定义可知, $S_i (i \geq 1)$ 都是相互独立的, 且

$$S_i \sim \text{Exp}(\lambda_{i-1}).$$

因此

$$\mathbb{E}S_i = \frac{1}{\lambda_{i-1}}, \text{Var}(S_i) = \frac{1}{\lambda_{i-1}^2}.$$

并且 S_i 的矩母函数为

$$M_{S_i}(\theta) = \mathbb{E}(e^{\theta S_i}) = \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_{i-1} - \theta}, \theta < \lambda_{i-1}.$$

所以可直接得到

$$\begin{aligned} \mathbb{E}T_N &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{\lambda_{i-1}}, \\ \text{Var}(T_N) &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{\lambda_{i-1}^2}. \end{aligned}$$

又因为 $S_1, \dots, S_N$ 相互独立, 所以

$$M_{T_N}(\theta) = \mathbb{E}(e^{\theta T_N}) = \prod_{i=1}^N \mathbb{E}(e^{\theta S_i}) = \prod_{i=1}^N \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_{i-1} - \theta}, \theta < \min_{0 \leq n \leq N-1} \lambda_n.$$

Exercise 2.10 (Ex 5.7)

考虑从一个个体开始的 Yule 过程, 并且假设在时刻 s 出生的个体以概率 $P(s)$ 是健康的。计算在 $(0, t)$ 中出生的健康个体数的分布。

解. 考虑从一个个体开始的 Yule 过程, 即 $X(0) = 1, \lambda_n = n\lambda$. 设 $H(t)$ 表示在 $(0, t)$ 中出生的健康个体数。又记 $K = X(t) - 1$ 为在 $(0, t)$ 中出生的个体总数。

由 Yule 过程的分布可知

$$P(K = k) = P(X(t) = k + 1) = e^{-\lambda t}(1 - e^{-\lambda t})^k, k = 0, 1, 2, \dots$$

另一方面, 由上一题可知, 在给定 $K = k$ 后, 这 k 个出生时刻的无序版本为 k 个独立同分布随机变量, 其公共密度为

$$f(s) = \frac{\lambda e^{-\lambda(t-s)}}{1 - e^{-\lambda t}}, 0 < s < t.$$

等价地,

$$f(s) = \frac{\lambda e^{\lambda s}}{e^{\lambda t} - 1}, 0 < s < t.$$

因此, 给定 $K = k$ 后, 一个出生个体为健康的概率为

$$p_t = \int_0^t P(s) f(s) ds = \int_0^t P(s) \frac{\lambda e^{\lambda s}}{e^{\lambda t} - 1} ds.$$

于是

$$H(t) | K = k \sim B(k, p_t).$$

所以对 $m = 0, 1, 2, \dots$, 有

$$P(H(t) = m) = \sum_{k=m}^{\infty} P(H(t) = m | K = k) P(K = k).$$

即

$$P(H(t) = m) = \sum_{k=m}^{\infty} \binom{k}{m} p_t^m (1 - p_t)^{k-m} e^{-\lambda t} (1 - e^{-\lambda t})^k.$$

令

$$A(t) = \int_0^t \lambda e^{\lambda s} P(s) ds.$$

由于

$$p_t = \frac{A(t)}{e^{\lambda t} - 1},$$

化简上式可得

$$P(H(t) = m) = \frac{1}{1 + A(t)} \left(\frac{A(t)}{1 + A(t)} \right)^m, m = 0, 1, 2, \dots$$

因此, 在 $(0, t)$ 中出生的健康个体数

$$H(t) \sim \text{Geo} \left(\frac{1}{1 + A(t)} \right) - 1,$$

其中

$$A(t) = \int_0^t \lambda e^{\lambda s} P(s) ds.$$

Exercise 2.11 (Ex 5.20)

假定一个生物群体中的个体以指数速率 λ 出生, 且以指数速率 μ 死亡。此外由于移民, 存在一个增加的指数速率 θ 。然而, 在群体的规模为 N 或更大时, 移民就不再允许。

(a) 将此建立为一个生灭模型。

(b) 若 $N = 3, \theta = \lambda = 1, \mu = 2$, 确定移民受限制的时间的比例。

解. (a) 只需要确定出生率和死亡率即可, 显然有出生率为 $\lambda_n = n\lambda + \theta, 0 \leq n < N$, 及 $\lambda_n = n\lambda, n \geq N$, 而死亡率为 $\mu_n = n\mu, n \geq 1$.

(b) 即确定极限情况下群体个体数 $\geq N$ 的时间比例, 这需要计算生灭链的极限概率. 直接列出极限方程 $\lambda_0 P_0 = \mu_1 P_1, (\lambda_n + \mu_n) P_n = \mu_{n+1} P_{n+1} + \lambda_{n-1} P_{n-1}, n \geq 1$. 由教材 5.5 节结论知

$$P_0 = \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \cdots \mu_n} \right]^{-1}, P_n = \frac{\lambda_0 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \cdots \mu_n} P_0.$$

直接计算知对 $0 \leq n \leq 2$ 有 $\lambda_n/\mu_{n+1} = 1/2$, 对 $n \geq 3$ 有 $\lambda_n/\mu_{n+1} = n/(2(n+1))$, 所以有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \cdots \mu_n} = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2^4} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2^5} + \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{2^6} + \cdots$$

而通过 $\ln(1-x)$ 的泰勒展开式可以得到

$$-3 \ln(1 - \frac{1}{2}) = 3 \cdot \frac{1}{2^1} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{3}{3} \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2^4} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2^5} + \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{2^6} + \cdots$$

把上面的两个式子相减可以得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \cdots \mu_n} = 3 \ln 2 - \frac{9}{8}.$$

也就是说 $P_0 = 1/(3 \ln 2 - 1/8), P_1 = P_0/2, P_2 = P_0/4$. 所以移民受限制的时间的比例为

$$\sum_{n=3}^{\infty} P_n = 1 - P_0 - P_1 - P_2 = 1 - \frac{7}{4} P_0 = \frac{24 \ln 2 - 15}{24 \ln 2 - 1}.$$

Exercise 2.12 (Ex 5.22)

求 $M/M/s$ 系统的极限分布, 并且确定它们存在需要的条件.

解. 记 $X(t)$ 为 t 时刻系统中人数, 则 $\{X(t), t \geq 0\}$ 为一个生灭过程. 其出生率为 $\lambda_n = \lambda, n \geq 0$, 死亡率为 $\mu_n = n\mu, 1 \leq n \leq s$, 及 $\mu_n = s\mu, n > s$. 由教材 5.5 节结论知, 极限分布存在所需要的条件为如下的级数收敛:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \cdots \mu_n} = \sum_{n=1}^s \frac{\lambda^n}{n! \mu^n} + \sum_{n=s+1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{s! \mu^s (s\mu)^{n-s}}.$$

前一项有限, 只需考虑后一项. 当 $\lambda/(s\mu) \geq 1$ 时有

$$\sum_{n=s+1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{s! \mu^s (s\mu)^{n-s}} = \frac{s^s}{s!} \sum_{n=s+1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu s} \right)^n \geq \frac{s^s}{s!} \sum_{n=s+1}^{\infty} 1 = +\infty.$$

而当 $\lambda/(s\mu) < 1$ 时, 由上式可知后一项收敛, 故极限分布存在的条件是 $\lambda/(s\mu) < 1$. 且此时

$$\begin{aligned} P_0 &= \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n} \right]^{-1} = \left[1 + \sum_{n=1}^s \frac{\lambda^n}{n! \mu^n} + \frac{s^s}{s!} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu s} \right)^{s+1}}{1 - \frac{\lambda}{\mu s}} \right]^{-1} \\ &= \left(\sum_{n=0}^s \frac{\lambda^n}{n! \mu^n} + \frac{\lambda^{s+1}}{s! \mu^s (\mu s - \lambda)} \right)^{-1}, P_n = \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n} P_{n-1}, n \geq 1. \end{aligned}$$

其中 P_n 为过程处在状态 n 的长程比例, 也即为 $M/M/s$ 系统的极限分布.

Exercise 2.13 (Ex 5.28)

N 个顾客移动在 r 条服务线之间. 服务线 i 的服务时间是速率为 μ_i 的指数随机变量. 而在顾客离开服务线 i 时, 他以概率 $1/(r-1)$ 加入服务线 $j (j \neq i)$ 的队列 (如果队列有人, 不然就

进入服务)。当在服务线 i ($i = 1, \dots, r$) 有 n_i 个顾客时, 令系统的状态为 $(n_1, \dots, n_r)$. 证明对应的连续时间 Markov 链是时间可逆的, 并求极限概率。

证明. 设系统状态为 $\underline{n} = (n_1, \dots, n_r)$, 由题有 $n_1 + \dots + n_r = N$. 若 $n_i > 0$, 则服务线 i 完成服务的速率为 μ_i , 且完成服务后顾客以概率 $1/(r-1)$ 转入服务线 j ($j \neq i$), 故 $q(\underline{n}, \underline{n} - e_i + e_j) = \mu_i/(r-1)$, $n_i > 0, j \neq i$. 其余非对角转移速率为 0, 对角元通过行和为 0 确定。而为了证明时间可逆, 我们希望等式 $P(\underline{n})q(\underline{n}, \underline{m}) = P(\underline{m})q(\underline{m}, \underline{n})$ 成立, 其中 $\underline{m} = \underline{n} - e_i + e_j$. 代入转移速率:

$$P(\underline{n}) \frac{\mu_i}{r-1} = P(\underline{m}) \frac{\mu_j}{r-1} \Rightarrow \frac{P(\underline{m})}{P(\underline{n})} = \frac{\mu_i}{\mu_j}.$$

于是令 $P(\underline{k}) = C \prod_{i=1}^r \mu_i^{-k_i}$, 其中 $\underline{k} = (k_1, \dots, k_r)$, $k_1 + \dots + k_r = N, k_i \geq 0$, 归一化得到

$$C^{-1} = \sum_{k_1 + \dots + k_r = N, k_i \geq 0} \prod_{i=1}^r \mu_i^{-k_i}.$$

容易验证 $P(\underline{n})q(\underline{n}, \underline{m}) = P(\underline{m})q(\underline{m}, \underline{n})$. 以及 $\sum_{\underline{k}} P(\underline{k}) = 1$. 于是该连续时间 Markov 链是时间可逆的, 又由该链状态空间有限且不可约知极限概率存在并等于上述 $P(\underline{k})$. $\square$

Exercise 2.14 (Ex 6.1)

若 $\{Z_n, n \geq 1\}$ 是鞅, 证明对 $1 \leq k < n$ 有

$$\mathbb{E}[Z_n | Z_1, \dots, Z_k] = Z_k.$$

解. 记 $\mathcal{F}_n = \sigma(Z_1, \dots, Z_n)$. 由于 $\{Z_n, n \geq 1\}$ 是鞅, 故对任意 $m \geq 2$ 有

$$\mathbb{E}[Z_m | \mathcal{F}_{m-1}] = Z_{m-1}.$$

于是由条件期望的塔式性质, 当 $1 \leq k < n$ 时,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z_n | Z_1, \dots, Z_k] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[Z_n | Z_1, \dots, Z_{n-1}] | Z_1, \dots, Z_k] \\ &= \mathbb{E}[Z_{n-1} | Z_1, \dots, Z_k] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[Z_{n-1} | Z_1, \dots, Z_{n-2}] | Z_1, \dots, Z_k] \\ &= \mathbb{E}[Z_{n-2} | Z_1, \dots, Z_k] \\ &= \dots \\ &= \mathbb{E}[Z_{k+1} | Z_1, \dots, Z_k] \\ &= Z_k. \end{aligned}$$

因此

$$\mathbb{E}[Z_n | Z_1, \dots, Z_k] = Z_k, 1 \leq k < n.$$

Exercise 2.15 (Ex 6.7)

令 $X_1, \dots$ 是均值为 0 和方差为 σ^2 的独立同分布的随机变量序列。再令 $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. 证明当 $Z_n = S_n^2 - n\sigma^2$ 时 $\{Z_n, n \geq 1\}$ 是一个鞅。

解. 令

$$\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n), S_n = \sum_{i=1}^n X_i.$$

由于 $X_1, X_2, \dots$ 独立同分布, 且

$$\mathbb{E}[X_n] = 0, \text{Var}(X_n) = \sigma^2,$$

故

$$\mathbb{E}[X_n^2] = \sigma^2.$$

令

$$Z_n = S_n^2 - n\sigma^2.$$

因为

$$S_n = S_{n-1} + X_n,$$

所以

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z_n | \mathcal{F}_{n-1}] &= \mathbb{E}[S_n^2 - n\sigma^2 | \mathcal{F}_{n-1}] \\ &= \mathbb{E}[(S_{n-1} + X_n)^2 - n\sigma^2 | \mathcal{F}_{n-1}] \\ &= \mathbb{E}[S_{n-1}^2 + 2S_{n-1}X_n + X_n^2 - n\sigma^2 | \mathcal{F}_{n-1}] \\ &= S_{n-1}^2 + 2S_{n-1}\mathbb{E}[X_n | \mathcal{F}_{n-1}] + \mathbb{E}[X_n^2 | \mathcal{F}_{n-1}] - n\sigma^2. \end{aligned}$$

又 X_n 与 $\mathcal{F}_{n-1}$ 独立, 故

$$\mathbb{E}[X_n | \mathcal{F}_{n-1}] = \mathbb{E}[X_n] = 0,$$

并且

$$\mathbb{E}[X_n^2 | \mathcal{F}_{n-1}] = \mathbb{E}[X_n^2] = \sigma^2.$$

于是

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z_n | \mathcal{F}_{n-1}] &= S_{n-1}^2 + \sigma^2 - n\sigma^2 \\ &= S_{n-1}^2 - (n-1)\sigma^2 \\ &= Z_{n-1}. \end{aligned}$$

因此

$$\{Z_n, n \geq 1\}$$

是一个鞅。

Exercise 2.16 (Ex 6.10)

连续掷一个以概率 p 出现正面的硬币。利用鞅论推理计算直至下述序列出现时的期望投掷数

(a) HHTTHHT

(b) HTHTHTH

解. (a) 以 N_1 记直至 HHTTHHT 出现的时间。

如设想有一系列赌徒, 每人开始以 1 个单位赌资在一个公平的赌博中参与赌博, 按照 HHTTHHT 的顺序依次下注 (因为赌局公平, 所以 H 和 T 的赔率分别为 p^{-1} 和 $(1-p)^{-1}$), 每次都赌上手上所有赌资, 直至赌资归 0。

设 $\{X_n, n \geq 1\}$ 为第 n 次后赌场现有的总赢利, 则有 $\{X_n, n \geq 1\}$ 为均值始终为 0 的鞅。因此

$$X_{N_1} = N_1 - p^{-4}(1-p)^{-3} - p^{-2}(1-p)^{-1}.$$

由于 $\mathbb{E}X_{N_1} = 0$, 所以

$$\mathbb{E}N_1 = p^{-4}(1-p)^{-3} + p^{-2}(1-p)^{-1}.$$

(b) 以 N_2 记直至 HTHTHTH 出现的时间。

同理于 (a) 时设想, 则有

$$X_{N_2} = N_2 - p^{-4}(1-p)^{-3} - p^{-3}(1-p)^{-2} - p^{-2}(1-p)^{-1} - p^{-1}.$$

由于 $\mathbb{E}X_{N_2} = 0$, 所以

$$\mathbb{E}N_2 = p^{-4}(1-p)^{-3} + p^{-3}(1-p)^{-2} + p^{-2}(1-p)^{-1} + p^{-1}.$$

Exercise 2.17 (Ex 6.11)

考虑在每次参赌时以等可能地赢 1 个单位或输 1 个单位的一个赌徒。假定该赌徒在当他或者赢 A , 或者输 B 时离开博弈, $A > 0, B > 0$. 用一个合适的鞅证明期望赌资数是 AB .

解. 设每次赌博的输赢为

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{以概率 } 1/2, \\ -1, & \text{以概率 } 1/2, \end{cases}$$

且 $X_1, X_2, \dots$ 相互独立。令

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i, S_0 = 0,$$

表示第 n 次赌博后的累计赢利。设停止时刻为

$$T = \min\{n : S_n = A \text{ 或 } S_n = -B\}.$$

这里默认 A, B 为正整数, 则需证明

$$\mathbb{E}[T] = AB.$$

由于 $\{S_n, n \geq 0\}$ 是鞅, 并且

$$Z_n = S_n^2 - n$$

也是鞅。事实上,

$$\mathbb{E}[Z_{n+1} | X_1, \dots, X_n] = \mathbb{E}[S_{n+1}^2 - (n+1) | X_1, \dots, X_n],$$

而

$$S_{n+1} = S_n + X_{n+1}.$$

故

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S_{n+1}^2 | X_1, \dots, X_n] &= \mathbb{E}[(S_n + X_{n+1})^2 | X_1, \dots, X_n] \\ &= S_n^2 + 2S_n\mathbb{E}[X_{n+1} | X_1, \dots, X_n] + \mathbb{E}[X_{n+1}^2 | X_1, \dots, X_n] \\ &= S_n^2 + 1. \end{aligned}$$

因此

$$\mathbb{E}[Z_{n+1} | X_1, \dots, X_n] = S_n^2 + 1 - (n+1) = S_n^2 - n = Z_n,$$

所以 $\{S_n^2 - n, n \geq 0\}$ 是鞅。

对有界停止时刻 $T \wedge n = \max\{T, n\}$ 应用停止定理, 有

$$\mathbb{E}[S_{T \wedge n}^2 - (T \wedge n)] = \mathbb{E}[S_0^2] = 0.$$

于是

$$\mathbb{E}[T \wedge n] = \mathbb{E}[S_{T \wedge n}^2].$$

注意到

$$-B \leq S_{T \wedge n} \leq A,$$

故

$$S_{T \wedge n}^2 \leq \max\{A^2, B^2\}.$$

所以

$$\mathbb{E}[T \wedge n] \leq \max\{A^2, B^2\}.$$

令 $n \rightarrow \infty$, 由单调收敛定理可知 $\mathbb{E}[T] < \infty$, 且 $T < \infty$ 几乎必然成立。

下面计算到达 A 和 $-B$ 的概率。设

$$p = P(S_T = A).$$

由于 $\{S_n\}$ 是鞅, 对 $T \wedge n$ 用停止定理得

$$\mathbb{E}[S_{T \wedge n}] = \mathbb{E}[S_0] = 0.$$

令 $n \rightarrow \infty$, 由有界收敛定理得

$$\mathbb{E}[S_T] = 0.$$

因此

$$Ap + (-B)(1 - p) = 0.$$

解得

$$p = \frac{B}{A+B}, \quad 1-p = \frac{A}{A+B}.$$

再由 $\mathbb{E}[T] = \mathbb{E}[S_T^2]$ 可得

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[T] &= A^2 P(S_T = A) + B^2 P(S_T = -B) \\ &= A^2 \frac{B}{A+B} + B^2 \frac{A}{A+B} \\ &= \frac{A^2 B + AB^2}{A+B} \\ &= AB. \end{aligned}$$

因此该赌徒离开博弈前的期望赌博次数为

$$\mathbb{E}[T] = AB.$$

Exercise 2.18 (Ex 6.24)

考虑独立地投掷硬币的序列, 而令 $P\{\text{正面}\}$ 是每次投掷出正面的概率。令 A 为假设 $P\{\text{正面}\} = a$, 而 B 为假设 $P\{\text{正面}\} = b$, $0 < a, b < 1$. 以 X_i 记第 i 次投掷的结果, 并令

$$Z_n = \frac{P\{X_1, \dots, X_n \mid A\}}{P\{X_1, \dots, X_n \mid B\}}.$$

证明若 B 正确, 则

(a) $\{Z_n\}$ 是一个鞅, 而且

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n$ 以概率为 1 地存在。

(c) 若 $b \neq a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n$ 是什么?

证明. (a) 不妨令 $X_i = \mathbf{1}_{\{\text{第 } i \text{ 次投掷出正面}\}}$, 由投掷硬币序列独立, 我们有

$$\mathbb{E}[Z_{n+1} | Z_1, \dots, Z_n] = Z_n \mathbb{E} \left[\frac{P(X_{n+1} | A)}{P(X_{n+1} | B)} \right].$$

且由于 B 正确, 得

$$\mathbb{E}[Z_{n+1} | Z_1, \dots, Z_n] = Z_n \mathbb{E} \left[\frac{a^{X_{n+1}}(1-a)^{1-X_{n+1}}}{b^{X_{n+1}}(1-b)^{1-X_{n+1}}} \right] = Z_n \left(\frac{a}{b} \cdot b + \frac{1-a}{1-b} \cdot (1-b) \right) = Z_n.$$

并且有

$$\mathbb{E}[|Z_n|] = \mathbb{E}[Z_n] = \mathbb{E}[Z_1] = \mathbb{E} \left[\frac{a^{X_1}(1-a)^{1-X_1}}{b^{X_1}(1-b)^{1-X_1}} \right] = 1 < \infty, \forall n \in \mathbb{N}^+.$$

故 $\{Z_n, n \geq 1\}$ 是一个鞅。

(b) 由 (a) 知 $\mathbb{E}[|Z_n|] = 1$ 对 $\forall n \in \mathbb{N}^+$ 成立, 由鞅收敛定理, $\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n$ 以概率为 1 地存在且有限。

(c) 取 $h(X)$ 满足 $h(1) = a/b$, $h(0) = (1-a)/(1-b)$, 则 $P(h(X_{n+1}) = a/b) = b$, $P(h(X_{n+1}) = (1-a)/(1-b)) = 1-b$. 于是 $Z_{n+1} = h(X_{n+1})Z_n$, $\ln Z_{n+1} = \ln Z_n + \ln h(X_{n+1})$, 并且有

$$Z_1 = \frac{a^{X_1}(1-a)^{1-X_1}}{b^{X_1}(1-b)^{1-X_1}} = h(X_1) \Rightarrow \ln Z_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \ln h(X_k).$$

而由强大数律, 我们有

$$\frac{\ln Z_{n+1}}{n+1} \rightarrow \mathbb{E}[\ln h(X_k)] = \mathbb{E}[\ln h(X_1)] = b \ln \left(\frac{a}{b} \right) + (1-b) \ln \left(\frac{1-a}{1-b} \right) \triangleq t.$$

而 $f(x) = \ln x$ 为严格凹函数, 且 $b \neq a$, 故

$$t < \ln \left(b \cdot \frac{a}{b} + (1-b) \cdot \frac{1-a}{1-b} \right) = \ln 1 = 0.$$

而 $\ln Z_n = nt + o(n)$, 则 $Z_n = e^{nt+o(n)}$. 由于 $t < 0$, 故 $n \rightarrow \infty$ 时 $Z_n \rightarrow 0$. 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n = 0$. $\square$

Exercise 2.19 (Ex 8.1)

令 $Y(t) = tX(1/t)$.

(a) $Y(t)$ 的分布是什么?

(b) 计算 $\text{Cov}(Y(s), Y(t))$.

(c) 论证 $\{Y(t), t \geq 0\}$ 也是 Brown 运动。

(d) 令

$$T = \inf\{t > 0 : X(t) = 0\}.$$

利用 (c) 证明

$$P(T = 0) = 1.$$

证明. (a) 首先, 由于 $\{X(t), t \geq 0\}$ 为 Brown 运动过程, 则它也是 Gauss 过程, 故对一切 $t_1, \dots, t_n$, $(X(1/t_1), \dots, X(1/t_n))$ 具有多元正态分布, 故 $(Y(t_1), \dots, Y(t_n)) = (t_1 X(1/t_1), \dots, t_n X(1/t_n))$ 也具有多元正态分布, 故 $\{Y(t), t \geq 0\}$ 为 Gauss 过程。又 $\mathbb{E}[Y(t)] = t\mathbb{E}[X(1/t)] = 0$, 且 $0 < s \leq t$ 时, 有 $1/t \leq 1/s$, 此时 $\text{Cov}(Y(s), Y(t)) = st \text{Cov}(X(1/s), X(1/t)) = st \cdot 1/t = s$. 故 $\{Y(t), t \geq 0\}$ 是一个 Brown 运动过程, 故 $Y(t) \sim N(0, t)$.

(b)(c) 由 (a) 可知 $\text{Cov}(Y(s), Y(t)) = \min(s, t)$, 并且 $\{Y(t), t \geq 0\}$ 为 Brown 运动过程。

(d) 任取 $\varepsilon > 0$, 则有 $T > \varepsilon$ 等价于对任意 $t \in (0, \varepsilon]$ 有 $X(t) \neq 0$, 则等价于对任意 $u \in [1/\varepsilon, +\infty)$ 有 $uX(1/u) = Y(u) \neq 0$. 而 $\{Y(t), t \geq 0\}$ 为 Brown 运动, 结合教材 8.2 节结论可知 $P(T_a < \infty) = 1, \forall a \in \mathbb{R}$. 其中 T_a 为 Brown 运动 $\{Y(t)\}$ 首次击中 a 的时刻. 取 $a = 0$ 可知从任意时刻以后 $\{Y(t)\}$ 几乎必然在有限时间内击中 0. 于是 $P(T > \varepsilon) = P(Y(u) \neq 0, \forall u \in [1/\varepsilon, +\infty)) = 0$. 而 $T \geq 0$, 由 ε 的任意性可知 $P(T = 0) = 1$. $\square$

Exercise 2.20 (Ex 8.3)

给定 $X(t_1) = A, X(t_2) = B$, 其中 $t_1 < s < t_2$, 计算 $X(s)$ 的条件分布.

解. 首先我们有

$$P(X(t+s) - X(s) = x) = f_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-x^2/(2t)}.$$

由 Brown 运动有独立增量和平稳增量, 可得 $X(s)$ 的条件密度为

$$\begin{aligned} p_{X(s)|(X(t_1), X(t_2))}(x | (A, B)) &= \frac{p_{(X(s), X(t_2))|X(t_1)}((x, B) | A)}{p_{X(t_2)|X(t_1)}(B | A)} = \frac{f_{s-t_1}(x-A)f_{t_2-s}(B-x)}{f_{t_2-t_1}(B-A)} \\ &= C \exp \left(-\frac{t_2-t_1}{2(t_2-s)(s-t_1)} \left(x - \frac{A(t_2-s) + B(s-t_1)}{t_2-t_1} \right)^2 \right). \end{aligned}$$

这说明其条件分布是正态分布

$$N \left(\frac{A(t_2-s) + B(s-t_1)}{t_2-t_1}, \frac{(t_2-s)(s-t_1)}{t_2-t_1} \right).$$

Exercise 2.21 (Ex 8.7)

求下列情形的分布:

(a) $|X(t)|$. (b) $\left| \min_{0 \leq s \leq t} X(s) \right|$. (c) $\max_{0 \leq s \leq t} X(s) - X(t)$.

解. 记

$$M(t) = \max_{0 \leq s \leq t} X(s), m(t) = \min_{0 \leq s \leq t} X(s).$$

(a) 由于 $X(t) \sim N(0, t)$, 故当 $x < 0$ 时,

$$P\{|X(t)| \leq x\} = 0.$$

当 $x \geq 0$ 时,

$$P\{|X(t)| \leq x\} = P\{-x \leq X(t) \leq x\} = 2P\{0 \leq X(t) \leq x\}.$$

因此

$$P\{|X(t)| \leq x\} = \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} \int_0^x e^{-y^2/2t} dy = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x/\sqrt{t}} e^{-u^2/2} du, x \geq 0.$$

故 $|X(t)|$ 服从参数为 t 的半正态分布, 其密度为

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} e^{-x^2/2t}, x > 0.$$

(b) 由 Brown 运动的对称性, $\{-X(s), 0 \leq s \leq t\}$ 仍为 Brown 运动, 故

$$|m(t)| = -m(t) = \max_{0 \leq s \leq t} [-X(s)]$$

与 $M(t)$ 同分布. 由 8.2 节中关于最大随机变量的结果, 对 $x \geq 0$,

$$P\{M(t) > x\} = P\{T_x \leq t\} = 2P\{X(t) \geq x\}.$$

于是

$$P\{M(t) \leq x\} = 1 - 2P\{X(t) \geq x\} = 2P\{X(t) \leq x\} - 1.$$

因此当 $x \geq 0$ 时,

$$P\{|m(t)| \leq x\} = P\{M(t) \leq x\} = \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} \int_0^x e^{-y^2/2t} dy.$$

当 $x < 0$ 时, $P\{|m(t)| \leq x\} = 0$. 故 $|m(t)|$ 与 $|X(t)|$ 同分布, 密度为

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} e^{-x^2/2t}, x > 0.$$

(c) 令

$$Y(s) = X(t) - X(t-s), 0 \leq s \leq t.$$

由 Brown 运动的平稳独立增量性, $\{Y(s), 0 \leq s \leq t\}$ 仍为 Brown 运动。于是

$$M(t) - X(t) = \max_{0 \leq s \leq t} \{X(s) - X(t)\} = \max_{0 \leq u \leq t} \{X(t-u) - X(t)\} = \max_{0 \leq u \leq t} \{-Y(u)\}.$$

因此

$$M(t) - X(t) = -\min_{0 \leq u \leq t} Y(u)$$

与 $|m(t)|$ 同分布。由 (b) 知, 当 $x \geq 0$ 时,

$$P\{M(t) - X(t) \leq x\} = \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} \int_0^x e^{-y^2/2t} dy,$$

当 $x < 0$ 时,

$$P\{M(t) - X(t) \leq x\} = 0.$$

故 $M(t) - X(t)$ 也与 $|X(t)|$ 同分布, 其密度为

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} e^{-x^2/2t}, x > 0.$$

Exercise 2.22 (Ex 8.9)

令 $M(t) = \max_{0 \leq s \leq t} X(s)$, 证明

$$P\{M(t) > a \mid M(t) = X(t)\} = e^{-a^2/2t}, a > 0$$

解. 记

$$M = M(t) = \max_{0 \leq s \leq t} X(s).$$

注意事件 $\{M(t) = X(t)\}$ 本身概率为 0, 故下面在连续型条件分布的意义下理解该条件概率。

先推导 $(M, X(t))$ 的联合密度。对 $m > 0, x < m$, 有

$$P\{M \leq m, X(t) \leq x\} = P\{X(t) \leq x\} - P\{M > m, X(t) \leq x\}.$$

由 8.2 节中击中时刻后的对称性论证可知, 若过程在时刻 t 以前曾击中 m , 则其后相对于 m 的运动具有对称性, 因此

$$P\{M > m, X(t) \leq x\} = P\{X(t) \geq 2m - x\}.$$

于是

$$P\{M \leq m, X(t) \leq x\} = P\{X(t) \leq x\} - P\{X(t) \geq 2m - x\}.$$

由于 $X(t) \sim N(0, t)$, 令

$$\varphi_t(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-z^2/2t},$$

则对上式关于 m 和 x 求偏导, 得

$$f_{M,X(t)}(m, x) = \frac{2(2m - x)}{t} \varphi_t(2m - x), m > 0, x < m.$$

令

$$Y = M - X(t).$$

作变量变换

$$x = m - y,$$

则 $y \geq 0, m \geq 0$, 且 $2m - x = m + y$ 。因此

$$f_{M,Y}(m, y) = \frac{2(m + y)}{t} \varphi_t(m + y), m > 0, y > 0.$$

先求 Y 的边缘密度:

$$f_Y(y) = \int_0^\infty \frac{2(m + y)}{t} \varphi_t(m + y) dm.$$

令 $z = m + y$, 则

$$f_Y(y) = \int_y^\infty \frac{2z}{t} \varphi_t(z) dz = 2\varphi_t(y), y \geq 0.$$

故在 $Y = 0$ 的条件下,

$$f_{M|Y=0}(m) = \frac{f_{M,Y}(m, 0)}{f_Y(0)} = \frac{\frac{2m}{t} \varphi_t(m)}{2\varphi_t(0)} = \frac{m}{t} e^{-m^2/2t}, m > 0.$$

由于 $Y = 0$ 即 $M(t) = X(t)$, 所以对 $a > 0$,

$$P\{M(t) > a \mid M(t) = X(t)\} = \int_a^\infty \frac{m}{t} e^{-m^2/2t} dm = e^{-a^2/2t}.$$

2.2.2 往年考题

Exercise 2.23 (2024 春期末 T2)

(每小题 7 分, 总 21 分) 考察一个出租车的车站, 出租车与顾客分别按速率为每分钟 1 辆和每分钟 2 人的 Poisson 过程到达. 无论有多少辆出租车在那里, 新来的出租车都会等待; 然而, 若顾客到来发现没有出租车就会离去.

- (1) 求在等待的出租车的平均数;
- (2) 问到达的顾客中有多少比例的人能搭到出租车?
- (3) 求该出租车的车站从出现没有出租车在等待的时刻开始到再次出现没有出租车在等待时的期望间隔时间.

解. 构建一个连续时间马氏链 $X(t)$ 表示在 t 时刻出租车数, 则 $X(t) \in \mathbb{N}$, 该马氏链可视为生灭过程, 列出其增长率 $\lambda_i = 1 (i \geq 0)$, 其死亡率为 $\mu_i = 2 (i \geq 1)$. 首先求解其平稳分布 P_i , 解方程

$$\lambda_0 P_0 = \mu_1 P_1$$

$$\lambda_1 P_1 + \mu_1 P_1 = \mu_2 P_2 + \lambda_0 P_0$$

$$\lambda_2 P_2 + \mu_2 P_2 = \mu_3 P_3 + \lambda_1 P_1$$

...

可以解出平稳概率为 $P_i = 2^{-i-1} (i \geq 0)$.

(1) 平均数为

$$\sum_{i=1}^{\infty} iP_i = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{2^{i+1}} = 1$$

(2) 比例为 $1 - P_0 = 1/2$.

(3) 把没有出租车开始视为一次更新, 则没有出租车与有出租车构成交替更新过程, 从而

$$P_0 = \frac{\mathbb{E}[\text{没有出租车持续的时间}]}{\mathbb{E}[\text{没有出租车持续的时间}] + \mathbb{E}[\text{有出租车持续的时间}]},$$

由 $\mathbb{E}[\text{没有出租车持续的时间}] = \frac{1}{\lambda_0} = 1$ 可知

$$\mathbb{E}[\text{没有出租车持续的时间}] + \mathbb{E}[\text{有出租车持续的时间}] = 2.$$

注记 2.3. 对于 $M/M/1$ 排队系统 ($\lambda_i = \lambda (i \geq 0)$ $\mu_i = \mu (i \geq 1)$), 利用生灭过程的极限概率:

$$P_0 = \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \cdots \mu_n} \right]^{-1}$$

$$P_n = \frac{\lambda_0 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \cdots \mu_n \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \cdots \mu_n} \right)}$$

设 $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$, 则平稳概率为:

$$\pi_n = (1 - \rho)\rho^n$$

在等待的总人数为:

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n = \frac{\rho}{1 - \rho}$$

又两次回到状态 0 的平均时间

$$\mu_{00} = \frac{1}{v_0 P_0} = \frac{1}{\lambda(1 - \rho)}$$

则关于忙期 B 有:

$$\mathbb{E}[B] = \mu_{00} - \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

这是 22 期末第三题下的 RK 的直接推论

Exercise 2.24 (2024 春期末 T4)

(第 1 小题 7 分, 第 2 小题 12 分, 总 19 分). 设 $\{B(t), t \geq 0\}$ 为标准 Brown 运动.

(1) 对于人员 $0 < s < t$, 证明 $B(s) - \frac{s}{t}B(t)$ 与 $B(t)$ 相互独立.

(2) 给定 $B(1) = 0, B(3) = u \in \mathbb{R}$, 求事件 $\{B(2) > u, B(4) > u\}$ 发生的概率.

解. (1) Brown 运动为 Gauss 过程, 则 $(B(s) - \frac{s}{t}B(t), B(t))$ 为二元正态分布, 由多元正态分布的性质只需要证明 $\text{Cov}(B(s) - \frac{s}{t}B(t), B(t)) = 0$ 即可

$$\text{Cov}\left(B(s) - \frac{s}{t}B(t), B(t)\right) = \text{Cov}(B(s), B(t)) - \frac{s}{t} \text{Var}(B(t)) = s - \frac{s}{t}t = 0.$$

这就说明了独立性

(2) 给定 $B(t_1) = A, B(t_2) = B$ 的条件下, 对 $t_1 < s < t_2$, $B(s)$ 的条件分布为

$$N\left(A + \frac{(B - A)(s - t_1)}{t_2 - t_1}, \frac{(s - t_1)(t_2 - s)}{t_2 - t_1}\right)$$

则

$$B(2)|B(1) = 0, B(3) = u \sim N\left(\frac{u}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$B(4)|B(1)=0, B(3)=u \sim B(3) + (B(4) - B(3))|B(1)=0, B(3)=u \sim u + N(0, 1) \sim N(u, 1)$
则由独立增量性:

$$\begin{aligned} & P(B(2) > u, B(4) > u | B(1) = 0, B(3) = u) \\ &= P(B(2) > u | B(1) = 0, B(3) = u) P(B(4) > u | B(1) = 0, B(3) = u) \\ &= P\left(\frac{N\left(\frac{u}{2}, \frac{1}{2}\right) - \frac{u}{2}}{\sqrt{\frac{1}{2}}} > \frac{u - \frac{u}{2}}{\sqrt{\frac{1}{2}}}\right) P(N(u, 1) - u > u - u) \\ &= P\left(N(0, 1) > \frac{\sqrt{2}u}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left(1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{2}u}{2}\right)\right). \end{aligned}$$

其中 $\Phi(x)$ 为 $N(0, 1)$ 的分布函数

Exercise 2.25 (2024 春期末 T5)

(每小题 6 分, 总 18 分) 设 $\{Y_n, n \geq 1\}$ 为独立同分布的随机变量序列, f_0 和 f_1 是两个概率密度函数, 且满足对任意 $x \in \mathbb{R}$, 有 $f_0(x) > 0, f_1(x) > 0$. 定义

$$X_n = \prod_{i=1}^n \frac{f_1(Y_i)}{f_0(Y_i)}$$

- (1) 证明: 如果 f_0 为 Y_1 的概率密度函数, 则 $\{X_n, n \geq 1\}$ 为一个鞅序列.
- (2) 证明: 如果 f_1 为 Y_1 的概率密度函数, 则 $\{X_n, n \geq 1\}$ 为一个下鞅序列.
- (3) 证明: 如果 f_0 为 Y_1 的概率密度函数, 则对任意 $a > 0$,

$$P(\max\{X_1, X_2, \dots, X_n\} \leq \frac{1}{a}, n > 1).$$

解. (1) 我们有

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_{n+1} | X_1, \dots, X_n] &= X_n \mathbb{E}\left[\frac{f_1(Y_{n+1})}{f_0(Y_{n+1})} \middle| X_1, \dots, X_n\right] \\ &= X_n \int_{\mathbb{R}} \frac{f_1(x)}{f_0(x)} f_0(x) dx \\ &= X_n \int_{\mathbb{R}} f_1(x) dx = X_n \end{aligned}$$

另外注意 X_n 非负

$$\mathbb{E}[|X_n|] = \mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[X_1] = 1 < \infty$$

则 $\{X_n, n \geq 1\}$ 为鞅

(2) 我们有

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_{n+1} | X_1, \dots, X_n] &= X_n \mathbb{E}\left[\frac{f_1(Y_{n+1})}{f_0(Y_{n+1})} \middle| X_1, \dots, X_n\right] \\ &= X_n \int_{\mathbb{R}} \frac{f_1(x)}{f_0(x)} f_1(x) dx \end{aligned}$$

利用 Cauchy-Schwarz 积分不等式

$$\left(\int fg\right)^2 \leq \int f^2 \int g^2$$

可以得到

$$\left(\int_{\mathbb{R}} f_1(x) dx\right)^2 \leq \left(\int_{\mathbb{R}} f_0(x) dx\right) \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{f_1^2(x)}{f_0(x)} dx\right)$$

注意到密度的积分为 1, 即:

$$\int_{\mathbb{R}} f_1(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f_0(x) dx = 1$$

则

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{f_1^2(x)}{f_0(x)} dx \geq 1$$

$$\mathbb{E} \left[\frac{f_1(Y_{n+1})}{f_0(Y_{n+1})} \middle| X_1, \dots, X_n \right] \geq 1$$

另外 $\mathbb{E}[|X_n|] < \infty$, 则 $\{X_n, n \geq 1\}$ 为下鞅

(3) X_n 恒正, 由下鞅的 Kolmogorov 不等式就有

$$P(\max\{X_1, \dots, X_n\} > a) \leq \frac{\mathbb{E}[X_n]}{a} = \frac{\mathbb{E}[X_1]}{a} = \frac{1}{a}.$$

Exercise 2.26 (2025 春期末 T4)

(10 分) 设 $\{X(t), t \geq 0\}$ 为一个线性生灭过程, 且生长率和死亡率分别为 $\lambda_n = n\lambda$ 和 $\mu_n = n\mu, n \geq 0$, 其中 $\lambda, \mu > 0$ 为给定常数。如果初始状态 $X(0) = 1$, 试求灭绝概率

$$q = \lim_{t \rightarrow \infty} P(X(t) = 0 | X(0) = 1).$$

解. 考虑分支过程, 但要注意分支过程是 Markov 链而非连续链, 设此连续链的嵌入链为 $\{Y(t), t \geq 0\}$, 有转移概率:

$$P_{i,i+1} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} P_{i,i-1} = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$$

同时

从一个个体开始的连续链最终灭绝 $\iff$ 从一个个体开始的嵌入链最终灭绝

因此只要求嵌入链的灭绝概率即可; 注意分支过程的定义为第 $t-1$ 代的每个父代独立产生的第 t 代子代的总数量 (相当于父代产生子代之后死亡), 而本题父代在产生子代之后还存活, 把本题存活的父代看成他自己产生的子代, 同时认为父代产生子代之后死亡, 记一个父代产生 i 个子代的概率为 P_i , 同时定义:

$$\{\tilde{Y}(t) : \tilde{Y}(0) = 1, \tilde{Y}(t) = Y \left(\sum_{i=0}^{t-1} \tilde{Y}(i) \right), t \geq 0\}$$

则 $\{\tilde{Y}(t)\}$ 为分支过程 (相当于分支过程的父代为 $Y(t) = n$ 时, 我们认为下一代为 $Y(t+n)$) 且有:

$$q = \lim_{t \rightarrow \infty} P(Y(t) = 0 | Y(0) = 1) = \lim_{t \rightarrow \infty} P(\tilde{Y}(t) = 0 | \tilde{Y}(0) = 1)$$

$$P_0 = \frac{\mu}{\lambda + \mu} P_2 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$$

利用分支过程定理有 $q = P_0 + P_2 q^2$. 注意 q 是满足上面方程的最小解:

$$q = \begin{cases} \frac{\mu}{\lambda}, & \frac{\mu}{\lambda} < 1, \\ 1, & \frac{\mu}{\lambda} \geq 1. \end{cases}$$

另解: 记 $q_2 = \lim_{t \rightarrow \infty} P(X(t) = 0 | X(0) = 2)$, 对第一次转移取条件

$$q = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} q_2$$

而从状态 2 开始的嵌入链如果想灭绝的话, 必须先到达 1, 再从 1 到达 0; 在到达 1 之前可以视 1 为一个“暂时的”吸收壁, 那么可以看到这时从 2 开始的嵌入链 (带有吸收壁 1) 和从 1 开始的嵌入链具有相同的性质 (它们的转移概率矩阵一样), 所以从 2 “灭绝到” 1 的概率也是 q , 当到达状态 1 之后我们认为这个吸收壁被取消了, 此时从状态 1 到达状态 0 的概率就是 q , 即 $q_2 = q^2$, 得到相同的方程 (写到这里也不难发现这其实就是分支过程的方程了)

Exercise 2.27 (2025 春期末 T6)

(18 分) 考虑一质点在直线上从正整数 a 出发的简单对称随机游走, 其中 0 和 $K(K > a)$ 为两个吸收态。设 S_n 表示时刻 n 该质点的位置, $S_0 = a$, 而 $T = \min\{n : S_n = 0 \text{ 或 } K\}$, 记

$$M_n = \sum_{k=0}^n S_k - \frac{1}{3} S_n^3$$

(1) 证明 $\{M_n, n \geq 0\}$ 为鞅。

(2) 试利用停时定理来求解 $\mathbb{E}[\sum_{k=0}^T S_k]$ 。

解. (1) 利用 $\mathbb{E}[X|U] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|U, V]|U]$, 并注意 $S_1, \dots, S_n$ 实际上包含了 $M_1, \dots, M_n$ 的所有信息

$$\mathbb{E}[M_{n+1}|M_1, \dots, M_n] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[M_{n+1}|S_1, \dots, S_n]|M_1, \dots, M_n]$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[M_{n+1}|S_1, \dots, S_n] &= \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^n S_k + S_{n+1} - \frac{1}{3}(S_n + X_{n+1})^3 \middle| S_1, \dots, S_n\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^n S_k + S_n + X_{n+1} - \frac{1}{3}(S_n + X_{n+1})^3 \middle| S_1, \dots, S_n\right] \\ &\stackrel{X_{n+1} \text{ 与 } S_1, \dots, S_n \text{ 独立}}{=} \sum_{k=0}^n S_k + S_n + \mathbb{E}[X_{n+1}] - \frac{1}{3}S_n^3 - \frac{1}{3}\mathbb{E}[X_{n+1}^3] - S_n^2\mathbb{E}[X_{n+1}] - \mathbb{E}[X_{n+1}^2]S_n \\ &= \sum_{k=0}^n S_k - \frac{1}{3}S_n^3 = M_n \end{aligned}$$

这就说明了

$$\mathbb{E}[M_{n+1}|M_1, \dots, M_n] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[M_{n+1}|S_1, \dots, S_n]|M_1, \dots, M_n] = \mathbb{E}[M_n|M_1, \dots, M_n] = M_n$$

另外

$$\mathbb{E}[|M_n|] \leq \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^n S_k\right] + \frac{1}{3}\mathbb{E}[S_n^3] < \infty$$

即 $\{M_n, n \geq 0\}$ 为鞅

(2) 先验证一下鞅停止定理的条件

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|M_{n+1} - M_n| | M_1, \dots, M_n] &= \mathbb{E}\left[\left|S_{n+1} - \frac{1}{3}(S_{n+1}^3 - S_n^3)\right| \middle| M_1, \dots, M_n\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\left|S_{n+1} - \frac{1}{3}(X_{n+1}^3 + 3S_n^2X_{n+1} + 3S_nX_{n+1}^2)\right| \middle| M_1, \dots, M_n\right] \stackrel{\text{三角不等式}}{\leq} M \end{aligned}$$

则

$$\mathbb{E}[M_T] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^T S_k - \frac{1}{3}S_T^3\right] = \mathbb{E}[M_0] = a - \frac{1}{3}a^3$$

由赌徒破产模型（开始财富为 a ，公平赌模型下，财富先到达 K 而不是 0 的概率）：

$$P(S_T = K) = \frac{a}{K}$$

$$\mathbb{E}[S_T^3] = P(S_T = K)K^3 = aK^2$$

最后

$$\mathbb{E} \left[\sum_{k=0}^T S_k \right] = \frac{1}{3}aK^2 + a - \frac{1}{3}a^3$$

Exercise 2.28 (2025 春期末附加题)

(附加题, 10 分) 证明标准 Brown 运动 $\{B(t), t \geq 0\}$ 在任一区间 $[0, t]$ 上的二次变差为 t ，即对区间 $[0, t]$ 上的任意分割 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n < t_{n+1} = t$ ，当 $n \rightarrow \infty$ 时，若最大间隔

$$\max_{0 \leq i \leq n} (t_{i+1} - t_i) \rightarrow 0,$$

则有

$$Q_n = \sum_{k=0}^n [B(t_{k+1}) - B(t_k)]^2$$

依概率收敛到 t 。

解. 证明依概率收敛 $P(|Q_n - t| \geq \epsilon) \rightarrow 0$ 考虑 Markov 不等式或者 Chebyshev 不等式

$$\mathbb{E}[Q_n] = \mathbb{E} \left[\sum_{k=0}^n [B(t_{k+1}) - B(t_k)]^2 \right] = \sum_{k=0}^n \mathbb{E} [[B(t_{k+1}) - B(t_k)]^2]$$

另外

$$B(t_{k+1}) - B(t_k) \sim N(0, t_{k+1} - t_k), \mathbb{E} [[B(t_{k+1}) - B(t_k)]^2] = t_{k+1} - t_k$$

则

$$\mathbb{E}[Q_n] = \sum_{k=0}^n \mathbb{E} [[B(t_{k+1}) - B(t_k)]^2] = t$$

由独立增量性：

$$\begin{aligned} \text{Var}(Q_n) &= \text{Var} \left(\sum_{k=0}^n [B(t_{k+1}) - B(t_k)]^2 \right) \\ &= \sum_{k=0}^n \text{Var} ([B(t_{k+1}) - B(t_k)]^2) \end{aligned}$$

记 $N_k = B(t_{k+1}) - B(t_k) \sim N(0, t_{k+1} - t_k)$

$$\text{Var}(N_k) = \mathbb{E}[N_k^4] - (\mathbb{E}[N_k^2])^2 = 3(t_{k+1} - t_k)^2 - (t_{k+1} - t_k)^2 = 2(t_{k+1} - t_k)^2$$

利用 Chebyshev 不等式

$$\begin{aligned} P(|Q_n - t| \geq \epsilon) &\leq \frac{\text{Var}(Q_n)}{\epsilon^2} \leq \frac{2 \sum_{k=0}^n (t_{k+1} - t_k)^2}{\epsilon^2} \\ &\leq \frac{2 (\sum_{k=0}^n (t_{k+1} - t_k)) \max\{t_{k+1} - t_k\}}{\epsilon^2} \leq \frac{2t \max\{t_{k+1} - t_k\}}{\epsilon^2} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

这就说明了依概率收敛

注记 2.4. 对正态分布的高阶矩有 $X \sim N(0, 1)$, $\forall k = 2m > 0$, $\mathbb{E}[X^k] = (2m-1)!!$. 也可以通过 $N(\mu, \sigma^2)$ 的矩母函数 $M(t) = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$ 或者特征函数 $\phi(t) = e^{i\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$ 来获得高阶矩的信息