

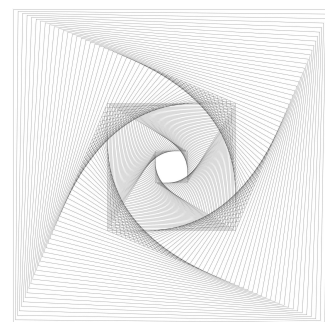


同调代数讲义与作业

作者：Mirage

时间：2026 年春季学期

版本：2026 年 7 月 15 日



我来问道无馀说，云在青霄水在瓶

目录

第一部分 2026 春课程讲义	1
Lecture 1	2
Lecture 2	6
Lecture 3	12
Lecture 4	16
Lecture 5	21
Lecture 6	25
Lecture 7	30
Lecture 8	35
Lecture 9	39
Lecture 10	43
Lecture 11	49
Lecture 12	53
Lecture 13	58
Lecture 14	63
Lecture 15	68
第二部分 2026 春作业解答	71
Homework 1	72
Homework 2	75
Homework 3	78
Homework 4	82

第一部分

2026 春课程讲义

Lecture 1

本课程的一些参考书如下：

1. J. J. Rotman, *An Introduction to Homological Algebra*;
2. Cartan, Eilenberg, *Homological Algebra*;
3. Anderson, Fuller, *Rings and Categories of Modules*.
4. 章璞, 吴泉水, 代数学选讲.

Introduction

Homological Algebra, 译为同调代数。从词源上看 homology: homo 表示相似, logy 表示关系。“同调”一词由江泽涵翻译, 同调代数大致可以理解为: “用代数的方法研究同调”。

课程的几个核心主题大致包括:

1. Rings and categories of modules
2. Homology, derived functors
3. Derived categories

同调代数的特点:

1. 提供了统一的语言与统一的工具
2. 建立了桥梁, 发现不同分支之间的联系
3. 用代数的角度 (关系、结构) 理解不同的数学对象

同调代数与其他数学分支有着密切联系: 如代数拓扑、(非交换) 代数几何、代数表示论、数学物理等等。

发展历史 (History of homological algebra, C.A. Weibel)

I. 萌芽: 从拓扑到代数 (1850s-1940s)

同调代数起源于代数拓扑, 是在拓扑学、几何学的发展中逐渐孕育出来的。

1. **Riemann (1857)** 对曲线积分等的研究, 为后来的同调理论提供了动机。
2. **Betti (1871)** 引入了 **Betti 数 (Betti number)**, 可以看作是同调理论最早的雏形之一。
3. **Poincaré (1875)** 系统地发展了代数拓扑中的基本思想, 尤其是同调群与基本群等概念。
4. **Noether (1925)**, “homology is an Abelian group”
5. **de Rham (1931)**, de Rham homology
6. **Hurewicz (1935)**, Hurewicz map

Hurewicz 构造的 Hurewicz 映射 $h: \pi_n(X) \rightarrow H_n(X; \mathbb{Z})$, 将同伦群与同调群联系起来。

7. **Pontryagin, Brauer 1935**, homology of classical Lie groups

-
8. Alexander 1926, Čech 1935, universal coefficient groups for homology
 9. de Rham, Hurewicz, Eilenberg, Mac Lane, etc
开始用代数的方法研究 homology.
 10. Eilenberg 1944, singular (co)homology
 11. Eilenberg, Steenrod 1945, axiomatic treatment of homology theory

II. 成为一门学科 (1940s–1950s)

“Homology theory of topological spaces gave invariants of algebraic systems.”

1. (co)homology of (Abelian) groups, Lie algebra, associative algebras
 - Baer, Mac Lane, Ext of Abelian groups
 - Hopf, Eilenberg, Mac Lane, Hochschild, Tate, Cartan, cohomology of groups
 - Hochschild, associative algebras
2. Leray, 1946, sheaf, sheaf cohomology, spectral sequences
3. 1956, Book by Cartan, Eilenberg: Homological Algebra
这本书的主要内容包括: projective modules, injective modules, resolutions, derived functors, Tor_n 与 Ext, hyperhomology, projective (injective) resolutions 等等。
Hochschild: “The appearance of this book must mean that the experimental phase of homological algebra is surpassed.”

III. Grothendieck (1950s-1960s)

1. Abelian cat, derived cat, triangulated cat.
2. Grothendieck ring, local duality, sheaf cohomology

IV. 进一步的探索和研究 (1970s-至今)

1. A_∞ -category (代数拓扑、数学物理) J.Stasheff, K.Fukaya, M.Kontsevich
2. τ -tilting theory (代数表示论、cluster 代数)
 - T.Adachi, O.Iyama, L.Peitav (arXiv 12, Compos. Math 14)
 - H.Derksen, Jiarui Fei, General presentation of algebras (arXiv 09, Adv. Math 15)
3. Perverse sheaves (an object in the bounded derived cat of sheaves, 代数几何)
J.Bernstein, A.Beilinson, P.Deligne, O.Gabber
4. 奇点范畴等等

Rings and algebras (环与代数)

首先我们给出环的定义, 这里的环指的是非零含幺结合环。

定义 1.1 (associative nonzero ring with identity)

一个环指的是一组资料 $(R, +, \cdot, 1, 0)$, 其中 $+$ 和 $\cdot$ 是二元运算 $R \times R \rightarrow R$, 且满足:

- $(R, +, 0)$ 是 Abelian 群, 其中零元为 0 .
- $(R, \cdot, 1)$ 是么半群且单位元为 1 , 即 $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c), 1 \cdot a = a \cdot 1 = a, \forall a, b, c \in R$.
- 乘法对加法满足分配律, 即 $a(b+c) = a \cdot b + a \cdot c, (a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c, \forall a, b, c \in R$.
- $0 \neq 1$.



今后为方便起见, 我们给出一些默认约定:

- 我们简写 R 来表示一个环。
- 我们把 $a \cdot b$ 简记为 ab .
- 我们使用表述 additive group (加法群), 而不再特意说 Abelian group.

定义 1.2

对于一个环 R , 它的 center 定义为 $\text{Cen}(R) = \{z \in R \mid za = az, \forall a \in R\}$.

若 $R = \text{Cen}(R)$, 则称 R 是 commutative (交换) 的。

若对任意 $0 \neq a \in R$, 存在 $b \in R$ 使得 $ab = ba = 1$, 则称 R 为 division ring (可除环)。

若 R 是 commutative division ring (交换可除环), 则称 R 为 field (域)。



例 1.1

$\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ 分别是整数、有理数、实数、复数集, 它们都是交换环, 其中 $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ 还是域。♠

例 1.2

对环 R , $n \times n$ 矩阵构成的集合 $M_n(R)$ 是一个环。当 $n > 1$ 时, 它通常不是交换环。♠

例 1.3

G 是一个 Abelian 群, 则 $\text{End}(G) = \{f: G \rightarrow G \mid f \text{ 是群同态}\}$ 在如下运算下构成一个环:
加法定义为 $(f+g)(a) = f(a) + g(a)$, 乘法定义为复合: $(fg)(a) = f(g(a))$ 。♠

例 1.4

若 R 是一个环, 则 R 上的多项式环 $R[x]$ 定义为 $R[x] = \{r_0 + r_1x + \cdots + r_nx^n \mid r_i \in R\}$ 。♠

定义 1.3 (ideal and subring)

设 R 为一个环。

- 若加法子群 $I \subseteq R$ 满足 $axb \in I, \forall x \in I, a, b \in R$, 则称 I 为 R 的一个理想。
- 若加法子群 $S \subseteq R$ 满足 $(S, +_R, \cdot_R, 1_R, 0_R)$ 构成一个环, 则称 S 为 R 的一个子环。♣

定义 1.4 (quotient ring)

I 是 R 的理想, 则可定义商环 R/I , 其中 $a \sim b$ 当且仅当 $a-b \in I$, 等价类记为 $a+I$ 或 $\bar{a}$ 。♣

定义 1.5 (ring homomorphism)

设 R, S 为两个环, 映射 $f: R \rightarrow S$ 称为一个 ring homomorphism (环同态), 如果满足:

- $f(a + b) = f(a) + f(b)$
- $f(ab) = f(a)f(b)$
- $f(1_R) = 1_S$

对 $\forall a, b \in R$ 成立, 且 $1_R, 1_S$ 分别为 R, S 的幺元。

若存在环同态 $f: R \rightarrow S$ 以及 $g: S \rightarrow R$, 使得 $f \circ g = \text{id}_S, g \circ f = \text{id}_R$, 则称 R, S 同构。♣

定理 1.1 (First Isomorphism Theorem)

设 $f: R \rightarrow S$ 为环同态, 则

- $\text{Ker}(f) = \{r \in R | f(r) = 0\}$ 是 R 的理想。
- $\text{Im}(f) = \{s \in S | \exists r \in R, \text{ s.t. } f(r) = s\}$ 是 S 的子环。
- 有环同构 $R/\text{Ker}f \cong \text{Im}f, a + \text{Ker}f \mapsto f(a)$.



定义 1.6 (k -algebra)

设 k 为一个域, 一个 k -algebra 是一个环 A , 满足 $(A, +)$ 构成一个 k -向量空间, 且 $\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b), \forall \lambda \in k, a, b \in A$.

一个等价定义是: A 是一个 k -algebra $\Leftrightarrow A$ 是一个环并带有一个环同态 $\eta: k \rightarrow \text{Cen}(A)$. ♣

定义 1.7 (alg homomorphism)

A, B 是两个 k -algebras, 一个映射 $f: A \rightarrow B$ 被称为一个 alg homomorphism (代数同态), 若 f 是一个 k -线性映射且为环同态。♣

例 1.5

对一个域 $k, n \times n$ 矩阵构成的集合 $M_n(k)$ 是一个 k -algebra. ♠

例 1.6

域 k 上的多项式环 $k[x]$ 是一个 k -algebra. ♠

例 1.7

一个 k -向量空间 V 上的 k -线性映射全体构成的集合 $\text{End}_k(V)$ 是一个 k -algebra. ♠

Lecture 2

定义 2.1 (left R -module)

设 R 为环, 一个加法群 M 称为一个 left R -module (左 R -模), 如果存在一个左 R -作用 $R \times M \rightarrow M, (r, m) \mapsto rm$ 满足下列条件:

- $1x = x$
- $a(x + y) = ax + ay$
- $(a + b)x = ax + bx$
- $(ab)x = a(bx)$

对任意 $a, b \in R, x, y \in M$ 都成立。记这样的左 R -模为 ${}_R M$.



注 M 是一个左 R -模当且仅当 M 是一个加法群, 并且带有一个环同态 $\rho: R \rightarrow \text{End } M$, 也就是说, (M, ρ) 是 R 的一个 representation (表示)。

类似地, 我们可以定义 right R -module (右 R -模)。设 R^{op} 是 R 的 opposite ring (反环), 则 M 是一个右 R -模当且仅当 M 是一个左 R^{op} -模。

注 对于一个 k -algebra A , 我们也可以类似地定义左或右 A -模。

例 2.1

- R 本身是一个 regular left R -module (正则左 R -模)。
- $\mathbb{Z}$ -modules 就是 Abelian groups.
- 若 k 是一个域, 则 k -模就是 k -向量空间。



例 2.2

设 V 是一个 k -向量空间, $T \in \text{End}_k(V)$, 定义一个左 $k[x]$ -作用 $k[x] \times V \rightarrow V$, 其中

$$(f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n, v) \mapsto a_0v + a_1T(v) + \cdots + a_nT^n(v).$$

于是 V 是一个左 $k[x]$ -模。



定义 2.2 ((left R -) homomorphism)

设 M, N 是左 R -模, 一个群同态 $f: M \rightarrow N$ 称为一个左 R -模同态, 若

$$f(ax) = af(x), \forall a \in R, x \in M.$$

并且记 $\text{Hom}_R(M, N) = \{f: M \rightarrow N \text{ 为 (左 } R\text{-) 模同态}\}.$



定义 2.3 (change of rings)

设 $f: R \rightarrow S$ 是一个环同态, 若 M 是一个左 S -模, 则 M 也是一个左 R -模, 其左 R -作用定义为 $R \times M \rightarrow M, (a, x) \mapsto f(a)x$.



定义 2.4 (direct sum)

设 $\{M_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 是一族左 R -模, 则它们的 direct sum (直和) 定义为

$$\bigoplus_{\alpha \in I} M_\alpha = \{(m_\alpha)_{\alpha \in I} \mid m_\alpha \in M_\alpha, \forall \alpha \in I, \text{且除有限个外全为零}\}.$$

它是一个左 R -模, 其运算定义为

- $(m_\alpha)_{\alpha \in I} + (m'_\alpha)_{\alpha \in I} = (m_\alpha + m'_\alpha)_{\alpha \in I}$
- $r(m_\alpha)_{\alpha \in I} = (rm_\alpha)_{\alpha \in I}$



定义 2.5 (direct product)

设 $\{M_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 是一族左 R -模, 则它们的 direct product (直积) 定义为

$$\prod_{\alpha \in I} M_\alpha = \{(m_\alpha)_{\alpha \in I} \mid m_\alpha \in M_\alpha, \forall \alpha \in I\}.$$



注 我们有如下的结论: $\bigoplus_{\alpha \in I} M_\alpha \cong \prod_{\alpha \in I} M_\alpha \iff I$ 是有限集

命题 2.1

设 $\{M_i\}_{i \in I}$ 是一族左 R -模, 则有

$$\text{Hom}_R\left(\bigoplus_i M_i, N\right) \cong \prod_i \text{Hom}_R(M_i, N), \quad \text{Hom}_R\left(M, \prod_i M_i\right) \cong \prod_i \text{Hom}_R(M, M_i).$$



定义 2.6 (category)

一个 category (范畴) 是一个资料 $\mathcal{C} = (\text{Ob } \mathcal{C}, \text{Hom}_{\mathcal{C}}, \circ)$, 其中:

- $\text{Ob } \mathcal{C}$ 是对象类
- 对任意 $X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$, $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ 是从 X 到 Y 的态射集合, 这里 X, Y 分别称为 f 的 domain (定义域) 和 codomain (陪域)
- 有复合 $\circ: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z), (g, f) \mapsto g \circ f$. 并且满足:
 - 对任意 $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, f 有唯一的定义域 X 和唯一的陪域 Y
 - 对任意 $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$, 存在 $\text{Id}_X \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$, 使得对任意 $f: X \rightarrow Y$ 有

$$f \circ \text{Id}_X = f, \text{Id}_Y \circ f = f$$

- 结合律: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ 对任意 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} W$ 成立



注 若 $\text{Ob } \mathcal{C}$ 是一个集合, 则称 $\mathcal{C}$ 为 small (小) 范畴。

定义 2.7

对一个范畴 $\mathcal{C}$ 以及 $X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$, 设 $f: X \rightarrow Y$ 是范畴 $\mathcal{C}$ 中的一个态射。

- 若对任意 $Z \in \text{Ob } \mathcal{C}$ 及任意 $g_1, g_2: Y \rightarrow Z$ 都有 $g_1 \circ f = g_2 \circ f \Rightarrow g_1 = g_2$, 则称 f 为 epimorphism (满态射)。
- 若对任意 $Z \in \text{Ob } \mathcal{C}$ 及任意 $g_1, g_2: Z \rightarrow X$ 都有 $f \circ g_1 = f \circ g_2 \Rightarrow g_1 = g_2$, 则称 f

为 monomorphism (单态射)。

- 若存在 $g: Y \rightarrow X$ 使得 $g \circ f = \text{Id}_X, f \circ g = \text{Id}_Y$, 则称 f 为 isomorphism (同构)。



定义 2.8 (subcategory)

若一个范畴 $\mathcal{D}$ 满足:

- $\text{Ob } \mathcal{D} \subseteq \text{Ob } \mathcal{C}$
- 对任意 $X, Y \in \text{Ob } \mathcal{D}$, 有 $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y) \subseteq \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$
- $\mathcal{D}$ 中的复合是 $\mathcal{C}$ 中复合的限制

则称 $\mathcal{D}$ 为 $\mathcal{C}$ 的一个 subcategory (子范畴)。

进一步, 子范畴 $\mathcal{D}$ 称为 full (满的), 若 $\forall X, Y \in \text{Ob } \mathcal{D}$ 都有 $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ 。



例 2.3

- **Set**: 集合范畴, 态射是函数
- **Grp**: 群范畴, 态射是群同态
- **Ab**: Abelian 群范畴
- **Ring**: 环范畴, 态射是环同态
- **$R\text{-Mod}$** : 左 R -模范畴, 态射是 (左 R -) 模同态
- 对任意范畴 $\mathcal{C}$, 其 opposite category (逆范畴) $\mathcal{C}^{\text{op}}$ 满足态射反向, 即 $f \circ_{\text{op}} g = g \circ f$



定义 2.9 (null object)

范畴 $\mathcal{C}$ 中的一个对象 0 称为 null object (零对象), 如果对任意 $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$, 在 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, 0)$ 和 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(0, X)$ 中都恰有一个态射。



引理 2.1

若 f 是同构, 则 f 既是单态射又是满态射。



证明 设 $f: X \rightarrow Y$ 是同构, 则存在 $g: Y \rightarrow X$ 使 $f \circ g = \text{Id}_Y, g \circ f = \text{Id}_X$. 若 $g_1, g_2: Y \rightarrow X$ 满足 $g_1 \circ f = g_2 \circ f$, 则 $g_1 \circ f \circ g = g_2 \circ f \circ g \Rightarrow g_1 = g_2$. 故 f 为满态射。同理可证 f 是单态射。

注 单射一定是单态射, 满射一定是满态射。但满态射不一定是满射, 单态射也不一定是单射。同构一定是双射, 双射一定是单态射和满态射, 但双射不一定是同构。下面给出一些例子:

- 在 **Ring** 中, 映射 $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ 是满态射但不是满射。
- 在 divisible groups (可除群) 范畴中, 映射 $\pi: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 是单态射但不是单射。
- 在 $R\text{-Mod}$ 中有 满态射 $\iff$ 满射, 单态射 $\iff$ 单射, 同构 $\iff$ 双射。

定义 2.10 (functor)

设 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ 是两个范畴。一个 (covariant) functor ((协变) 函子) $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 是指:

- $F: \text{Ob } \mathcal{C} \rightarrow \text{Ob } \mathcal{D}$ 是一个映射
- 对任意 $X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$, 有 $F: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FX, FY), f \mapsto Ff$

- 对任意 $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$, 有 $F(\text{Id}_X) = \text{Id}_{FX}$
- 对任意可复合态射 f, g , 有 $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$



定义 2.11 (contravariant functor)

contravariant functor (反变函子) $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 定义与上面类似, 但是 $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$.



注 一个反变函子 $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 也可看成一个协变函子 $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}^{\text{op}}$ 或 $F : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{D}$.

例 2.4

sheaf (层) 是一个反变函子: $\{X \text{ 的开集}\} \rightarrow \mathbf{Ab}$.



例 2.5

$\text{Hom}_R(-, -)$ 是一个函子。



定义 2.12

两个范畴 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ 称为 isomorphic (同构) 的, 如果存在函子 $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}, G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ 使得 $F \circ G = \text{Id}_{\mathcal{D}}, G \circ F = \text{Id}_{\mathcal{C}}$.



注 范畴同构这个条件通常太强。

定义 2.13 (natural transformation)

(1) 设 $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 是两个函子。一个 natural transformation (自然变换) $\eta : F \rightarrow G$ 是指, 对每个 $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$, 给定一个态射 $\eta_X : FX \rightarrow GX$, 并且对任意 $f : X \rightarrow Y$, 下图交换:

$$\begin{array}{ccc} FX & \xrightarrow{\eta_X} & GX \\ Ff \downarrow & & \downarrow Gf \\ FY & \xrightarrow{\eta_Y} & GY \end{array}$$

也即为 $Gf \circ \eta_X = \eta_Y \circ Ff$.

(2) 若自然变换 $\eta : F \rightarrow G$ 满足对任意 $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$, $\eta_X : FX \rightarrow GX$ 都是同构, 则称 η 为 natural isomorphism (自然同构), 记作 $F \cong G$.



定义 2.14 (equivalence)

设 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ 是两个范畴。一个函子 $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 称为一个 equivalence (等价), 如果存在函子 $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ 使得 $G \circ F \cong \text{Id}_{\mathcal{C}}, F \circ G \cong \text{Id}_{\mathcal{D}}$. 记作 $\mathcal{C} \simeq \mathcal{D}$.



定义 2.15

设 $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 是一个函子。

(1) 若对任意 $X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$, 映射 $F : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FX, FY)$ 是满射, 则称 F 为 full (满的)。

(2) 若上述映射均为单射, 则称 F 为 faithful (忠实的)。

(3) 若 F 既是满的又是忠实的, 则称 F 为 **fully faithful** (全忠实的)。

(4) 若对任意 $Z \in \mathcal{D}$, 存在 $X \in \mathcal{C}$ 使得 $Z \cong FX$, 则称 F 为 **dense** (稠密的)。



定理 2.1

设 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ 是两个范畴, 则 $\mathcal{C} \simeq \mathcal{D}$ 当且仅当存在函子 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, 使得 F 全忠实且稠密。



证明 $(\Rightarrow)$ 是显然的, 用定义验证即可 (注意到函子保持同构)。

$(\Leftarrow)$ 设 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 是全忠实且稠密的。构造函数子 $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$. 对每个 $X' \in \mathcal{D}$, 由于 F 稠密, 存在 $X \in \mathcal{C}$ 使得 $X' \cong FX$. 定义 $GX' = X$. 对态射 $g: X' \rightarrow Y'$, 取同构

$$\xi_{X'}: X' \xrightarrow{\sim} FGX', \xi_{Y'}: Y' \xrightarrow{\sim} FGY'.$$

则 $\xi_{Y'} \circ g \circ \xi_{X'}^{-1}: FGX' \rightarrow FGY'$ 是 $\mathcal{D}$ 中的态射。由于 F 全忠实, 存在唯一的 $f: GX' \rightarrow GY'$ 使得 $Ff = \xi_{Y'} \circ g \circ \xi_{X'}^{-1}$. 定义 $Gg = f$. 于是可得 G 是函子, 且容易验证 $G \circ F \cong \text{Id}_{\mathcal{C}}, F \circ G \cong \text{Id}_{\mathcal{D}}$. 从而有 $\mathcal{C} \simeq \mathcal{D}$. (注意到 G 的定义依赖于 X 的选取, 我们可以令 $G(FX) = X$ 来简化证明)

例 2.6

设 R 是一个环, 则有范畴等价 $R\text{-Mod} \simeq M_n(R)\text{-Mod}$.



证明 定义函子 $F: R\text{-Mod} \rightarrow M_n(R)\text{-Mod}$ 如下: 对任意左 R -模 M , 令

$$FM = M^{\oplus n} = \{(m_1, \dots, m_n)^{\top} \mid m_i \in M\}.$$

它自然带有左 $M_n(R)$ -模结构。对任意 $f: M_1 \rightarrow M_2$, 定义

$$Ff: M_1^{\oplus n} \rightarrow M_2^{\oplus n}, (m_1, \dots, m_n)^{\top} \mapsto (f(m_1), \dots, f(m_n))^{\top}$$

下面说明 F 是全忠实且稠密的。首先, 若 $Ff = 0$, 则 $(f(m_1), \dots, f(m_n))^{\top} = 0, \forall m_i \in M_1$. 故 $f(m) = 0, \forall m \in M_1$ 成立, 从而 $f = 0$. 故 F 是忠实的。其次, 设 $g \in \text{Hom}_{M_n(R)}(FM_1, FM_2)$. 令 e_{ij} 为仅 (i, j) 元为 1 其余为 0 的矩阵。定义 $f: M_1 \rightarrow M_2$ 为 $f(m) = x$, 其中 x 满足

$$(f(m), 0, \dots, 0)^{\top} = e_{11}g((m, 0, \dots, 0)^{\top}) = g((m, 0, \dots, 0)^{\top}) = (x, 0, \dots, 0)^{\top}.$$

则 f 是一个 R -模同态, 并且对任意 $(m_1, \dots, m_n)^{\top} \in FM_1$, 有

$$\begin{aligned} g((m_1, \dots, m_n)^{\top}) &= \sum_{i=1}^n g((0, \dots, 0, m_i, 0, \dots, 0)^{\top}) \\ &= \sum_{i=1}^n e_{i1}g((m_i, 0, \dots, 0)^{\top}) = (f(m_1), \dots, f(m_n))^{\top} = Ff((m_1, \dots, m_n)^{\top}) \end{aligned}$$

故 $g = Ff$, 所以 F 是满的。最后说明稠密性, 设 M 是一个左 $M_n(R)$ -模, 考虑环同态 $\varphi: R \rightarrow M_n(R), r \mapsto rI_n$. 令 $M' = e_{11}M$. 则 M' 是一个左 R -模。且 $\forall m \in M, e_{1i}m = e_{11}(e_{1i}m) \in M', 1 \leq i \leq n$. 定义 $\eta: M \rightarrow FM', m \mapsto (e_{11}m, e_{12}m, \dots, e_{1n}m)^{\top}$. 则 η 是一个 $M_n(R)$ -模同构, 其逆映射为 $(e_{11}x_1, \dots, e_{1n}x_n)^{\top} \mapsto e_{11}x_1 + \dots + e_{1n}x_n$. 故 F 是稠密的, 综上即得范畴等价 $R\text{-Mod} \simeq M_n(R)\text{-Mod}$.

定义 2.16 (exact sequence)

设 R 是一个环。一个左 R -模的序列 $M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} M_n$ 称为 **exact (正合)** 的, 如果对任意 $i = 2, 3, \dots, n-1$, 都有 $\text{Ker } f_i = \text{Im } f_{i-1}$.



我们有如下的容易验证的结论:

- $0 \rightarrow M \rightarrow 0$ 正合当且仅当 $M = 0$
- $0 \rightarrow M \xrightarrow{f} N$ 正合当且仅当 f 是单射
- $M \xrightarrow{f} N \rightarrow 0$ 正合当且仅当 f 是满射
- 对任意 $f: M \rightarrow N$, $0 \rightarrow \text{Ker } f \rightarrow M \rightarrow N$ 是正合列
- 对任意 $f: M \rightarrow N$, $M \rightarrow N \rightarrow \text{Coker } f \rightarrow 0$ 是正合列, 其中 $\text{Coker } f = N / \text{Im } f$
- 对任意 $f: M \rightarrow N$, $0 \rightarrow \text{Ker } f \rightarrow M \rightarrow \text{Im } f \rightarrow 0$ 是正合列
- 对任意 $f: M \rightarrow N$, $0 \rightarrow \text{Im } f \rightarrow N \rightarrow \text{Coker } f \rightarrow 0$ 是正合列

Lecture 3

首先我们回顾正合列的定义。

定义 3.1 (exact sequence)

设 R 是一个环。一个左 R -模的序列 $M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} M_n$ 称为正合的，如果对任意 $i = 2, 3, \dots, n-1$ ，都有 $\text{Ker } f_i = \text{Im } f_{i-1}$ 。



我们有：

- $0 \rightarrow M \rightarrow 0$ 正合当且仅当 $M = 0$
- $0 \rightarrow M \xrightarrow{f} N$ 正合当且仅当 f 是单射
- $M \xrightarrow{f} N \rightarrow 0$ 正合当且仅当 f 是满射
- 对任意 $f: M \rightarrow N$ ，序列 $0 \rightarrow \text{Ker } f \rightarrow M \rightarrow N, M \rightarrow N \rightarrow \text{Coker } f \rightarrow 0, 0 \rightarrow \text{Ker } f \rightarrow M \rightarrow \text{Im } f \rightarrow 0, 0 \rightarrow \text{Im } f \rightarrow N \rightarrow \text{Coker } f \rightarrow 0$ 都是正合的

一个 short exact sequence (短正合列) 是一个正合列 $0 \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$ 。

引理 3.1 (The five lemma)

若有一个 R -模交换图

$$\begin{array}{ccccccccc} U & \xrightarrow{a} & X & \xrightarrow{b} & Y & \xrightarrow{c} & Z & \xrightarrow{d} & W \\ f_1 \downarrow & & f_2 \downarrow & & f_3 \downarrow & & f_4 \downarrow & & f_5 \downarrow \\ U' & \xrightarrow{a'} & X' & \xrightarrow{b'} & Y' & \xrightarrow{c'} & Z' & \xrightarrow{d'} & W' \end{array}$$

其中两行都正合，则：

- (1) 若 f_1 满， f_2, f_4 单，则 f_3 单。
- (2) 若 f_5 单， f_2, f_4 满，则 f_3 满。
- (3) 若 f_1, f_2, f_4, f_5 都是同构，则 f_3 也是同构。



证明 我们证明先第一条。 f_3 单当且仅当对任意 $y \in Y$ ，若 $f_3(y) = 0$ ，则 $y = 0$ 。Chasing the diagram (追图) 即可。第二条同理。第三条由前两条立得。

引理 3.2 (The snake lemma)

若有交换图

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{b} & Y & \xrightarrow{c} & Z & \longrightarrow & 0 \\ f \downarrow & & g \downarrow & & h \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & X' & \xrightarrow{b'} & Y' & \xrightarrow{c'} & Z' \end{array}$$

其中两行都正合，则存在一个正合列

$$\text{Ker } f \xrightarrow{\bar{b}} \text{Ker } g \xrightarrow{\bar{c}} \text{Ker } h \xrightarrow{\bar{d}} \text{Coker } f \xrightarrow{\bar{b}'} \text{Coker } g \xrightarrow{\bar{c}'} \text{Coker } h.$$

其中 $\tilde{b}(x) = b(x)$, $\tilde{c}(y) = c(y)$, $\bar{b}'(x' + \text{Im } f) = b'(x') + \text{Im } g$, $\bar{c}'(y' + \text{Im } g) = c'(y') + \text{Im } h$. 

证明 先证 $\text{Ker } f \xrightarrow{\tilde{b}} \text{Ker } g \xrightarrow{\tilde{c}} \text{Ker } h$ 正合。若 $x \in \text{Ker } f$, 则 $f(x) = 0$, 于是 $g(b(x)) = b'(f(x)) = 0$, 故 $b(x) \in \text{Ker } g$, 所以 $\tilde{b}$ 良定义。类似可知 $\tilde{c}$ 良定义。若 $y \in \text{Im } \tilde{b}$, 设 $y = b(x)$, 其中 $x \in \text{Ker } f$, 则 $\tilde{c}(y) = c(b(x)) = 0$, 故 $\text{Im } \tilde{b} \subseteq \text{Ker } \tilde{c}$ 。反过来, 若 $y \in \text{Ker } \tilde{c}$, 则 $y \in \text{Ker } g$ 且 $c(y) = 0$ 。由上行正合, 存在 $x \in X$ 使得 $b(x) = y$ 。又因为 $g(y) = 0$, 故 $0 = g(b(x)) = b'(f(x))$ 。由于 b' 单, 得 $f(x) = 0$, 即 $x \in \text{Ker } f$ 。于是 $y = b(x) \in \text{Im } \tilde{b}$ 。故 $\text{Im } \tilde{b} = \text{Ker } \tilde{c}$ 。

类似地可证 $\text{Coker } f \xrightarrow{\bar{b}'} \text{Coker } g \xrightarrow{\bar{c}'} \text{Coker } h$ 正合。

下面构造 $\partial : \text{Ker } h \rightarrow \text{Coker } f$ 。任取 $z \in \text{Ker } h \subseteq Z$ 。由于 c 满, 存在 $y \in Y$ 使得 $c(y) = z$ 。又因为 $h(z) = 0$, 故 $c'(g(y)) = h(c(y)) = 0$, 于是 $g(y) \in \text{Ker } c' = \text{Im } b'$ 。所以存在 $x' \in X'$ 使得 $b'(x') = g(y)$ 。定义 $\partial(z) = x' + \text{Im } f$ 。我们证明它是良定义的。若 $\tilde{y} \in Y$ 也满足 $c(\tilde{y}) = z$, 且 $\tilde{x}' \in X'$ 满足 $b'(\tilde{x}') = g(\tilde{y})$, 则 $c(y - \tilde{y}) = 0$, 由上行正合, 存在 $x \in X$ 使得 $y - \tilde{y} = b(x)$ 。于是 $b'(x' - \tilde{x}') = g(y) - g(\tilde{y}) = g(y - \tilde{y}) = g(b(x)) = b'(f(x))$ 。由于 b' 单, 得 $x' - \tilde{x}' = f(x)$, 故 $x' + \text{Im } f = \tilde{x}' + \text{Im } f$ 。所以 ∂ 良定义。

下面证明 $\text{Ker } g \xrightarrow{\tilde{c}} \text{Ker } h \xrightarrow{\partial} \text{Coker } f \xrightarrow{\bar{b}'} \text{Coker } g$ 在 $\text{Ker } h$ 和 $\text{Coker } f$ 处正合。若 $z \in \text{Im } \tilde{c}$, 设 $z = c(y)$, 其中 $y \in \text{Ker } g$, 则构造 $\partial(z)$ 时可取 $x' = 0$, 因为 $b'(0) = 0 = g(y)$, 故 $\partial(z) = 0$ 。于是 $\text{Im } \tilde{c} \subseteq \text{Ker } \partial$ 。反过来, 若 $z \in \text{Ker } \partial$, 则可取 $x' \in \text{Im } f$, 设 $x' = f(x)$, 则 $b'(x') = g(y) = g(b(x))$, 故 $g(y - b(x)) = 0$ 。又因为 $c(y - b(x)) = c(y) = z$, 从而 $z \in \text{Im } \tilde{c}$ 。故 $\text{Im } \tilde{c} = \text{Ker } \partial$ 。再看 $\text{Im } \partial$ 与 $\text{Ker } \bar{b}'$ 。由构造知, 对任意 $z \in \text{Ker } h$, 若 $\partial(z) = x' + \text{Im } f$, 则 $\bar{b}'(\partial(z)) = b'(x') + \text{Im } g = g(y) + \text{Im } g = 0$, 故 $\text{Im } \partial \subseteq \text{Ker } \bar{b}'$ 。反过来, 若 $x' + \text{Im } f \in \text{Ker } \bar{b}'$, 则 $b'(x') \in \text{Im } g$ 。于是存在 $y \in Y$ 使得 $g(y) = b'(x')$ 。令 $z = c(y)$, 则 $h(z) = h(c(y)) = c'(g(y)) = c'(b'(x')) = 0$, 故 $z \in \text{Ker } h$ 。由 ∂ 的构造, $\partial(z) = x' + \text{Im } f$ 。于是 $\text{Ker } \bar{b}' \subseteq \text{Im } \partial$ 。故 $\text{Im } \partial = \text{Ker } \bar{b}'$ 。综上即证。

定义 3.2

设 R, S 是两个环。

(1) 设 $F : R\text{-Mod} \rightarrow S\text{-Mod}$ 是一个函子, 若对任意短正合列 $0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \rightarrow 0$, 都有 $0 \rightarrow FX \xrightarrow{Ff} FY \xrightarrow{Fg} FZ \rightarrow 0$ 也是短正合列, 则称 F 是 exact functor (正合函子)。若对任意正合列 $0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \rightarrow 0$, 都有 $0 \rightarrow FX \xrightarrow{Ff} FY \xrightarrow{Fg} FZ$ 正合, 则称 F 是左正合的。

若对任意正合列 $0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \rightarrow 0$, 都有 $FX \xrightarrow{Ff} FY \xrightarrow{Fg} FZ \rightarrow 0$ 正合, 则称 F 是右正合的。

(2) 设 $F : R\text{-Mod} \rightarrow S\text{-Mod}$ 是一个反变函子, 若对任意正合列 $0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$, 都有 $0 \rightarrow FZ \rightarrow FY \rightarrow FX \rightarrow 0$ 正合, 则称 F 是正合的。

若对任意正合列 $X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$, 都有 $0 \rightarrow FZ \rightarrow FY \rightarrow FX$ 正合, 则称 F 是左正合的。

若对任意正合列 $0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z$, 都有 $FZ \rightarrow FY \rightarrow FX \rightarrow 0$ 正合, 则称 F 是右正合的。



引理 3.3

设 $F: R\text{-Mod} \rightarrow S\text{-Mod}$ 是一个函子, 则下列条件等价:

- (1) F 是正合的。
- (2) 对任意正合列 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$, 都有 $FX \xrightarrow{Ff} FY \xrightarrow{Fg} FZ$ 正合。
- (3) 对任意正合列 $\cdots \rightarrow X^{-1} \rightarrow X^0 \rightarrow X^1 \rightarrow X^2 \rightarrow \cdots$, 都有 $\cdots \rightarrow FX^{-1} \rightarrow FX^0 \rightarrow FX^1 \rightarrow FX^2 \rightarrow \cdots$ 正合。



证明 我们证 $(1) \Rightarrow (2)$. 设 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ 正合。考虑如下的交换图表:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & \text{Im } g \\
 & & & \nearrow \tilde{g} & \downarrow \sigma_2 \\
 X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \\
 \uparrow & \searrow \tilde{f} & \uparrow \sigma_1 & & \\
 \text{Ker } f & & \text{Im } f & &
 \end{array}$$

其中给出三个短正合列

$$0 \rightarrow \text{Ker } f \rightarrow X \xrightarrow{\tilde{f}} \text{Im } f \rightarrow 0,$$

$$0 \rightarrow \text{Im } f \xrightarrow{\sigma_1} Y \xrightarrow{\tilde{g}} \text{Im } g \rightarrow 0,$$

$$0 \rightarrow \text{Im } g \xrightarrow{\sigma_2} Z \xrightarrow{\pi} Z/\text{Im } g \rightarrow 0.$$

应用 F 后得到三个短正合列

$$0 \rightarrow F(\text{Ker } f) \rightarrow FX \xrightarrow{F\tilde{f}} F(\text{Im } f) \rightarrow 0,$$

$$0 \rightarrow F(\text{Im } f) \xrightarrow{F\sigma_1} FY \xrightarrow{F\tilde{g}} F(\text{Im } g) \rightarrow 0,$$

$$0 \rightarrow F(\text{Im } g) \xrightarrow{F\sigma_2} FZ \xrightarrow{F\pi} F(Z/\text{Im } g) \rightarrow 0.$$

由于 $F\tilde{f}$ 满, $F\sigma_2$ 单, 而 $Ff = F\sigma_1 \circ F\tilde{f}, Fg = F\sigma_2 \circ F\tilde{g}$, 于是

$$\text{Im } Ff = \text{Im}(F\sigma_1 \circ F\tilde{f}) = \text{Im } F\sigma_1 = \text{Ker } F\tilde{g} = \text{Ker}(F\sigma_2 \circ F\tilde{g}) = \text{Ker } Fg.$$

故 $FX \xrightarrow{Ff} FY \xrightarrow{Fg} FZ$ 正合。其余情形同理。

引理 3.4

设 $F: R\text{-Mod} \rightarrow S\text{-Mod}$ 是一个协变函子, 则:

- (1) F 左正合当且仅当对任意正合列 $0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z$, 有 $0 \rightarrow FX \rightarrow FY \rightarrow FZ$ 正合。
- (2) F 右正合当且仅当对任意正合列 $X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$, 有 $FX \rightarrow FY \rightarrow FZ \rightarrow 0$ 正合。



引理 3.5

设 $F: R\text{-Mod} \rightarrow S\text{-Mod}$ 是一个反变函子, 则:

- (1) F 左正合当且仅当对任意正合列 $X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$, 有 $0 \rightarrow FZ \rightarrow FY \rightarrow FX$ 正合。
- (2) F 右正合当且仅当对任意正合列 $0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z$, 有 $FZ \rightarrow FY \rightarrow FX \rightarrow 0$ 正合。



命题 3.1

设 M 是一个左 R -模, 则有

(1) $\text{Hom}_R(M, -) : R\text{-Mod} \rightarrow \mathbf{Ab}$ 是左正合协变函子。

(2) $\text{Hom}_R(-, M) : R\text{-Mod} \rightarrow \mathbf{Ab}$ 是左正合反变函子。



证明 我们证明第一条。设 $0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ 正合。我们要证

$$0 \rightarrow \text{Hom}_R(M, X) \xrightarrow{\text{Hom}_R(M, f)} \text{Hom}_R(M, Y) \xrightarrow{\text{Hom}_R(M, g)} \text{Hom}_R(M, Z)$$

正合。先证

$$0 \rightarrow \text{Hom}_R(M, X) \xrightarrow{\text{Hom}_R(M, f)} \text{Hom}_R(M, Y)$$

正合。若 $\varphi : M \rightarrow X$ 满足 $\text{Hom}_R(M, f)(\varphi) = f\varphi = 0$, 则对任意 $m \in M$ 都有 $f(\varphi(m)) = 0$. 由于 f 单, 得 $\varphi(m) = 0$, 故 $\varphi = 0$. 所以 $\text{Hom}_R(M, f)$ 单。

再证中间正合。显然 $\text{Im } \text{Hom}_R(M, f) \subseteq \text{Ker } \text{Hom}_R(M, g)$, 因为 $gf = 0$. 反过来, 若 $\varphi \in \text{Ker } \text{Hom}_R(M, g)$, 则 $g\varphi = 0$, 所以 $\text{Im } \varphi \subseteq \text{Ker } g = \text{Im } f$. 由于 $\tilde{f} : X \rightarrow \text{Im } f, x \mapsto f(x)$ 是同构, 记其逆为 $\tilde{f}^{-1} : \text{Im } f \rightarrow X$. 定义 $\psi = \tilde{f}^{-1} \circ \varphi : M \rightarrow X$. 则 $f\psi = \varphi$, 故 $\varphi \in \text{Im } \text{Hom}_R(M, f)$. 于是 $\text{Im } \text{Hom}_R(M, f) = \text{Ker } \text{Hom}_R(M, g)$. 故 $\text{Hom}_R(M, -)$ 左正合。第二条同理。

Lecture 4

定义 4.1 (free module)

一个左 R -模 F 称为 free (自由的), 如果存在一族元素 $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$, 使得对任意 $x \in F$, 都可以唯一地写成

$$x = \sum_{\alpha \in I} r_\alpha x_\alpha,$$

其中 $r_\alpha \in R$, 且除有限个外全为零。

这里的唯一性是指: 若 $x = 0$, 则 $r_\alpha = 0$ 对任意 $\alpha \in I$ 都成立。以及 $|I|$ 称为 F 的秩。



注 自由模就是“环上的线性空间”。

注 每个自由模 F 都同构于一个直和 $R^{(I)}$, 即 $|I|$ 个 R 的直和。

命题 4.1

每个左 R -模 M 都同构于某个自由模的商模, 即存在自由模 F 及其子模 $N \subseteq F$, 使得 $M \cong F/N$.



证明 考虑映射 $\varphi: R^{(M)} \rightarrow M$, 定义为

$$(r_m)_{m \in M} = \sum_{m \in M} r_m e_m \mapsto \sum_{m \in M} r_m m,$$

这里求和都是有限和。且其中 $e_m = (\cdots, 0, 1, 0, \cdots)$, 其中第 m 个位置为 1, 则 $\varphi(e_m) = m$. 故 φ 是满同态。于是由第一同构定理, $R^{(M)}/\text{Ker } \varphi \cong M$.

定义 4.2 (projective module)

一个左 R -模 P 称为 projective (投射的), 如果对任意满同态 $p: M \rightarrow N$ 及任意同态 $f: P \rightarrow N$, 存在同态 $g: P \rightarrow M$, 使得 $f = pg$, 即下图表交换:

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ g \swarrow & \downarrow f & \\ M & \xrightarrow{p} & N \longrightarrow 0 \end{array}$$



例 4.1

自由模是投射模。



证明 设 $F = R^{(I)}$ 是自由模, $p: M \rightarrow N$ 是满同态, $f: F \rightarrow N$ 是同态。对每个基元 e_α , 由 p 满可取 $m_\alpha \in M$ 使得 $p(m_\alpha) = f(e_\alpha)$. 定义 $g: F \rightarrow M$ 为

$$g\left(\sum r_\alpha e_\alpha\right) = \sum r_\alpha m_\alpha.$$

则 g 是良定义的同态, 且对每个 α 都有 $pg(e_\alpha) = f(e_\alpha)$, 故 $pg = f$.

定理 4.1

每个左 R -模 M 都可以嵌入到一个正合列 $0 \rightarrow N \rightarrow P \rightarrow M \rightarrow 0$ 中, 其中 P 是投射模。♥

证明 由上面的命题, 存在自由模 F 及满同态 $F \rightarrow M$. 由于自由模是投射模, 只需令 $P = F$, $N = \text{Ker}(F \rightarrow M)$ 即可 (定理对右 R -模也成立)。

命题 4.2

直和 $\bigoplus_{\alpha \in I} P_\alpha$ 是投射模当且仅当每个 P_α 都是投射模。♠

证明 $(\Rightarrow)$ 设 $\bigoplus_{\alpha \in I} P_\alpha$ 投射, 固定 α , 设 $p: M \rightarrow N$ 是满同态, $f: P_\alpha \rightarrow N$ 是同态。我们考虑 $\iota_\alpha: P_\alpha \rightarrow \bigoplus_{\alpha \in I} P_\alpha$ 为自然嵌入, 定义

$$h: \bigoplus_{\alpha \in I} P_\alpha \rightarrow N, h = f\pi_\alpha: \bigoplus_{\alpha \in I} P_\alpha \xrightarrow{\pi_\alpha} P_\alpha \xrightarrow{f} N$$

从而 $h\iota_\alpha = f$. 由于直和投射, 存在同态 $g: \bigoplus_{\alpha \in I} P_\alpha \rightarrow M$ 使得 $pg = h$. 于是 $p(g\iota_\alpha) = h\iota_\alpha = f$, 从而有 P_α 投射。

$(\Leftarrow)$ 设每个 P_α 都投射。给定满同态 $p: M \rightarrow N$ 及同态 $f: \bigoplus_{\alpha \in I} P_\alpha \rightarrow N$. 对每个 α , 令 $h_\alpha = f\iota_\alpha: P_\alpha \rightarrow N$. 由于 P_α 投射, 存在 $g_\alpha: P_\alpha \rightarrow M$ 使得 $pg_\alpha = h_\alpha$. 由直和的泛性质, 存在唯一同态 $g: \bigoplus_{\alpha \in I} P_\alpha \rightarrow M, (p_\alpha)_{\alpha \in I} \mapsto \sum g_\alpha(p_\alpha)$ 满足 $g\iota_\alpha = g_\alpha$. 于是 $pg\iota_\alpha = pg_\alpha = h_\alpha = f\iota_\alpha$ 对任意 α 都成立, 从而 $pg = f$. 故 $\bigoplus_{\alpha \in I} P_\alpha$ 投射。

注 直和的泛性质是指: 设 $\{P_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 是一族 R -模, N 是一个 R -模, 且有同态 $j_\alpha: P_\alpha \rightarrow N$, 则存在唯一的同态 $f: \bigoplus_{\alpha \in I} P_\alpha \rightarrow N$, 使得 $f\iota_\alpha = j_\alpha$ 对任意 α 都成立。其中 ι_α 是自然嵌入。

定义-引理 4.1

一个短正合列 $0 \rightarrow M \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} N \rightarrow 0$ 称为 **split** (分裂的), 如果下列等价条件之一成立:

- (i) f 是 **split monomorphism** (分裂单同态), 即存在 $f': L \rightarrow M$ 使得 $f'f = \text{Id}_M$.
- (ii) $\text{Im } f = \text{Ker } g$ 是 L 的直和项, 即 $L = \text{Im } f \oplus N'$, 其中 N' 是 L 的一个 R -子模。
- (iii) g 是 **split epimorphism** (分裂满同态), 即存在 $g': N \rightarrow L$ 使得 $gg' = \text{Id}_N$.
- (iv) 存在同态 $f': L \rightarrow M$ 与 $g': N \rightarrow L$ 使得 $ff' + g'g = \text{Id}_L$.
- (v) 存在同态 $f': L \rightarrow M$ 与 $g': N \rightarrow L$, 使得如下图表交换:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{f} & L & \xrightarrow{g} & N \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow (f', g)^\top & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{(1,0)^\top} & M \oplus N & \xrightarrow{(0,1)} & N \longrightarrow 0 \end{array}$$

并且 $(f', g)^\top: L \rightarrow M \oplus N$ 是同构, 其逆为 $(f, g'): M \oplus N \rightarrow L$. ♣

证明 (i) $\Rightarrow$ (ii) 设 $f': L \rightarrow M$ 满足 $f'f = \text{Id}_M$. 我们证明 $L = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f'$. 若 $x \in \text{Im } f \cap \text{Ker } f'$, 写 $x = f(y)$, 则 $0 = f'(x) = f'f(y) = y$, 故 $x = 0$. 所以 $\text{Im } f \cap \text{Ker } f' = \{0\}$. 对任意 $x \in L$, 有 $x = (x - ff'(x)) + ff'(x)$. 其中 $f'(x - ff'(x)) = f'(x) - f'ff'(x) = 0$, 故 $x - ff'(x) \in \text{Ker } f'$, 而 $ff'(x) \in \text{Im } f$. 于是 $L = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f'$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) 若 $L = \text{Ker } g \oplus N'$, 则 $g(L) = g(N') = N$, 于是 $\tilde{g} := g|_{N'} : N' \rightarrow N$ 是同构, 记其逆为 $g' : N \rightarrow N' \subseteq L$. 于是 $gg' = \text{Id}_N$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) 设 $g' : N \rightarrow L$ 满足 $gg' = \text{Id}_N$. 与 (i) $\Rightarrow$ (ii) 的过程类似可得 $L = \text{Ker } g \oplus \text{Im } g'$. 设 $\pi : L \rightarrow \text{Ker } g$ 为到第一分量的投影, 则 $\tilde{f} = \pi f : M \rightarrow \text{Ker } g = \text{Im } f$ 是同构, 则取其逆映射 $f'' : \text{Im } f \rightarrow M$ 满足 $\tilde{f}f'' = \text{Id}_{\text{Im } f}, f''\tilde{f} = \text{Id}_M$. 定义 $f' = f''\pi : L \rightarrow \text{Im } f \rightarrow M$. 则 $f'f = f''\pi f = f''\tilde{f} = \text{Id}_M$. 对任意 $x \in L$, 写成 $x = x_1 + x_2$, 其中 $x_1 \in \text{Ker } g, x_2 \in \text{Im } g'$, 于是存在 $n \in N$ 使得 $g'(n) = x_2$, 从而有 $ff'(x) + g'g(x) = ff'(x_1 + x_2) + g'g(x_1 + x_2) = ff''\pi(x_1 + x_2) + g'g(x_2) = f''\tilde{f}\pi(x_1 + x_2) + g'g(x_2) = f''(x_1) + g'gg'(n) = x_1 + x_2 = x$. 故 $ff' + g'g = \text{Id}_L$.

(iv) $\Rightarrow$ (v) 设 $f' : L \rightarrow M, g' : N \rightarrow L$ 满足 $ff' + g'g = \text{Id}_L$. 则有 $f = \text{Id}_L f = f(ff' + g'g)f = fff'$, 而 f 单, 故 $f'f = \text{Id}_M$. 又 $g = g\text{Id}_L = g(ff' + g'g) = gg'g$, 而 g 满, 故 $gg' = \text{Id}_N$. 故图表交换, 且 $f'g' = f'(\text{Id}_L)g' = f'(ff' + g'g)g' = f'ff'g' + f'g'gg' = f'g' + f'g'g' = f'g' = 0$, 则

$$\begin{pmatrix} f' \\ g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f & g' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f'f & f'g' \\ gf & gg' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Id}_M & 0 \\ 0 & \text{Id}_N \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f & g' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f' \\ g \end{pmatrix} = ff' + g'g = \text{Id}_L.$$

(v) $\Rightarrow$ (i) 显然。

命题 4.3

对左 R -模 P , 下列条件等价:

- (i) P 是投射模。
- (ii) $\text{Hom}_R(P, -) : R\text{-Mod} \rightarrow \mathbf{Ab}$ 是正合函子。
- (iii) 任意正合列 $0 \rightarrow M \rightarrow N \xrightarrow{\pi} P \rightarrow 0$ 都分裂。
- (iv) P 是某个自由模的直和项。



证明 (i) $\Rightarrow$ (ii) 由投射模定义, 任取满同态 $\pi : M \rightarrow N$, 诱导映射 $\text{Hom}_R(P, M) \rightarrow \text{Hom}_R(P, N)$ 是满射。又 $\text{Hom}_R(P, -)$ 左正合, 故其正合。

(ii) $\Rightarrow$ (iii) 对任意正合列 $0 \rightarrow M \rightarrow N \xrightarrow{\pi} P \rightarrow 0$, 由正合性得 $\text{Hom}_R(P, N) \xrightarrow{\text{Hom}_R(P, \pi)} \text{Hom}_R(P, P)$ 是满射, 所以对 $\text{Id}_P \in \text{Hom}_R(P, P)$, 存在 $\pi' : P \rightarrow N$, 满足 $\pi\pi' = \text{Id}_P$. 从而得到 π 是分裂满同态, 于是该正合列分裂。

(iii) $\Rightarrow$ (iv) 考虑正合列 $0 \rightarrow \text{Ker } \pi \rightarrow F \xrightarrow{\pi} P \rightarrow 0$, 其中 F 是自由模。由 (iii) 知该正合列分裂, 则 $F = \text{Ker } \pi \oplus \text{Im } \pi'$, 而 $\pi|_{\text{Im } \pi'}$ 是同构, 故 P 是自由模 F 的直和项。

(iv) $\Rightarrow$ (i) 显然, 因为自由模是投射模, 而直和项保持投射性。

定义 4.3 (injective module)

一个左 R -模 I 称为 injective (内射的), 如果对任意单同态 $i : M \rightarrow N$ 及任意同态 $f : M \rightarrow I$, 存在同态 $g : N \rightarrow I$ 使得 $f = gi$, 即下图表交换:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{i} & N \\ & & \downarrow f & \swarrow g & \\ & & I & & \end{array}$$



命题 4.4

直积 $\prod_{\alpha \in I} Q_\alpha$ 是内射模当且仅当每个 Q_α 都是内射模。



证明 利用直积的泛性质，与投射模关于直和的命题证明完全类似。

注 直积的泛性质是指：设 $\{Q_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 是一族 R -模， N 是一个 R -模，且有同态 $p_\alpha: N \rightarrow Q_\alpha$ ，则存在唯一的同态 $f: N \rightarrow \prod_{\alpha \in I} Q_\alpha$ ，使得 $\pi_\alpha f = p_\alpha$ 对任意 α 都成立。其中 π_α 是自然投影。

定理 4.2

对左 R -模 Q ，下列条件等价：

- (i) Q 是内射模。
- (ii) $\text{Hom}_R(-, Q): R\text{-Mod} \rightarrow \mathbf{Ab}$ 是正合反变函子。
- (iii) 任意正合列 $0 \rightarrow Q \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$ 都分裂。



证明 与投射模情形完全对偶。

定理 4.3 (Baer's criterion)

左 R -模 Q 是内射模当且仅当对 R 的任意理想 I 及任意同态 $f: I \rightarrow Q$ ，都可以扩张为某个 $\tilde{f}: R \rightarrow Q$ 。也即 $\forall f: I \rightarrow Q, \exists \lambda \in Q$ 使得 $f(x) = x\lambda, \forall x \in I$ 。



证明 ($\Rightarrow$) 由内射模的定义显然。

($\Leftarrow$) 设 M 是左 R -模， $M' \subseteq M$ 是子模，且 $f: M' \rightarrow Q$ 是同态。考虑集合

$$\mathcal{F} = \{(M_1, f_1) \mid M' \subseteq M_1 \subseteq M, f_1: M_1 \rightarrow Q \text{ 是 } f \text{ 的延拓}\}.$$

定义偏序 (自反、反对称、传递) 为 $(M_1, f_1) < (M_2, f_2)$ 当且仅当 $M_1 \subseteq M_2$ 且 f_2 是 f_1 的延拓。这个偏序集 $(\mathcal{F}, <)$ 是 inductive set (归纳集：对每个全序子集 $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ ，存在 $\mathcal{F}$ 中的一个元素大于或等于 $\mathcal{F}'$ 中的每个元素)。事实上，若 $\{(N_i, f_i)\}$ 是全序子集，令 $N = \bigcup_i N_i$ ，并定义 $g: N \rightarrow Q$ 为：若 $x \in N_i$ ，则 $g(x) = f_i(x)$ 。由全序性，该映射是良定的同态。于是 (N, g) 是该全序子集的上界。故由 Zorn 引理， $\mathcal{F}$ 中存在极大元 (M_0, f_0) 。我们证明 $M_0 = M$ ，从而就证明了该定理。若不然，取 $x \in M \setminus M_0$ ，令 $I = \{r \in R \mid rx \in M_0\}$ 。则 I 是 R 的左理想。定义 $f'_0: I \rightarrow Q, r \mapsto f_0(rx)$ 为同态。由假设，存在 $\lambda \in Q$ ，使得 $f'_0(r) = r\lambda$ 对任意 $r \in I$ 成立，也即存在延拓 $\tilde{f}'_0: R \rightarrow Q$ 。于是定义 $f': M_0 + Rx \rightarrow Q, m + rx \mapsto f_0(m) + r\lambda$ 。这一定义是良定的：若 $m + rx = m' + r'x$ ，则 $(r - r')x \in M_0$ ，所以 $r - r' \in I$ ，从而 $(r - r')\lambda = f'_0(r - r') = f_0((r - r')x) = f_0(m' - m)$ ，即 $f_0(m) + r\lambda = f_0(m') + r'\lambda$ 。故 f' 是 f_0 的真延拓，这与 (M_0, f_0) 的极大性矛盾。故 $M_0 = M$ ，于是 f 可延拓到 M ，即 Q 内射。

定理 4.4

每个左 R -模 M 都可以嵌入到一个正合列 $0 \rightarrow M \rightarrow Q \rightarrow N \rightarrow 0$ 中，其中 Q 是内射模。



引理 4.1

一个加法群 Q 是可除群当且仅当 Q 作为 $\mathbb{Z}$ -模是内射模。



证明 ($\Rightarrow$) 先设 Q 是可除群 (一个群 Q 是可除群是指: $\forall n \in \mathbb{Z}, \forall g \in Q, \exists y \in Q$ 使得 $ny = g$). 任取 $\mathbb{Z}$ 的非零理想 $n\mathbb{Z}$ 及同态 $f: n\mathbb{Z} \rightarrow Q$. 记 $f(n) = a$, 由于 Q 可除, 存在 $b \in Q$ 使得 $nb = a$. 于是定义 $\tilde{f}: \mathbb{Z} \rightarrow Q, j \mapsto jb$, 则 $\tilde{f}(jn) = jnb = ja = f(jn)$, 故 f 可延拓到 $\mathbb{Z}$. 由 Baer 判据可得 Q 是 $\mathbb{Z}$ -内射模。

($\Leftarrow$) 反过来, 若 Q 是 $\mathbb{Z}$ -内射模, 任取 $a \in Q$ 与 $0 \neq n \in \mathbb{Z}$, 定义 $f: n\mathbb{Z} \rightarrow Q, jn \mapsto ja$. 由 Baer 判据, 存在延拓 $\tilde{f}: \mathbb{Z} \rightarrow Q$. 令 $b = \tilde{f}(1)$, 则 $nb = \tilde{f}(n) = a$. 故 Q 可除。

引理 4.2

若 Q 是可除加法群, 则左 R -模 $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R_R, Q)$ 是内射模, 其中左 R -作用定义为

$$(r \cdot f)(x) = f(xr).$$



证明 设 $I \subseteq {}_R R$ 是左理想, $h: I \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R_R, Q)$ 是任意的 R -模同态。定义群同态 $\gamma: {}_{\mathbb{Z}} I \rightarrow {}_{\mathbb{Z}} Q, a \mapsto (h(a))(1)$. 由 Q 是 $\mathbb{Z}$ -内射模, 存在 $\bar{\gamma} \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(I, Q)$ 使得 $\bar{\gamma}|_I = \gamma$. 对 $\forall a \in I, x \in R$ 有 $(a\bar{\gamma})(x) = \bar{\gamma}(xa) = \gamma(xa) = (h(xa))(1)$. 又由 h 是 R -模同态, 则 $h(xa) = x \cdot h(a)$, 故 $(h(xa))(1) = (x \cdot h(a))(1) = h(a)(x)$. 故 $a\bar{\gamma} = h(a), \forall a \in I$. 由 Baer 判据, $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}({}_R R, Q)$ 内射。

证明 (Proof of the Theorem) 对任意左 R -模 M , 存在某个集合 I 及满的群同态 $f: \mathbb{Z}^{(I)} \rightarrow M$. 故作为 Abelian 群 ($\mathbb{Z}$ -模), ${}_{\mathbb{Z}} M \cong \mathbb{Z}^{(I)} / \text{Ker } f \leqslant_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}^{(I)} / \text{Ker } f \triangleq Q'$, 因为可除 Abelian 群的直积与商群仍然可除, 从而 ${}_{\mathbb{Z}} M$ 可嵌入到可除群 Q' 中。于是作为左 R -模有 ${}_R M \cong \text{Hom}_R(R, M) \leqslant_R \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, M) \leqslant_R \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, Q')$ ($\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, -)$ 左正合)。由上一个引理, $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, Q')$ 是内射模。故 M 可嵌入某个内射模 Q 中。这就得到所求正合列 $0 \rightarrow M \rightarrow Q \rightarrow N \rightarrow 0$.

Lecture 5

定义 5.1 (R -balanced)

设 R 是一个环, $M_R, {}_R N$ 是模, G 是一个加法群。一个函数 $\beta: M \times N \rightarrow G$ 称为 R -balanced (R -平衡的), 如果对任意 $m, m' \in M, n, n' \in N, r \in R$, 都有

- $\beta(m + m', n) = \beta(m, n) + \beta(m', n)$
- $\beta(m, n + n') = \beta(m, n) + \beta(m, n')$
- $\beta(mr, n) = \beta(m, rn)$



定义 5.2 (tensor product)

设 R 是一个环, $M_R, {}_R N$ 是模。一个二元组 (T, τ) 称为 $(M_R, {}_R N)$ 的 tensor product (张量积), 如果对任意加法群 G 及任意 R -balanced 映射 $\beta: M \times N \rightarrow G$, 都存在唯一的 $\mathbb{Z}$ -模同态 $f: T \rightarrow G$, 使得 $f\tau = \beta$. 其中 $\tau: M \times N \rightarrow T$.



命题 5.1

若 (T, τ) 与 (T', τ') 都是 $(M_R, {}_R N)$ 的张量积, 则存在 $\mathbb{Z}$ -模同构 $f: T \rightarrow T'$, 使得 $\tau' = f\tau$. ♠

证明 由 (T, τ) 的泛性质, 存在唯一同态 $f: T \rightarrow T'$ 使得 $f\tau = \tau'$. 同理由 (T', τ') 的泛性质, 存在唯一同态 $g: T' \rightarrow T$ 使得 $g\tau' = \tau$. 于是 $(gf)\tau = g(f\tau) = g\tau' = \tau$. 由唯一性知 $gf = \text{Id}_T$. 同理 $fg = \text{Id}_{T'}$, 故 f 是同构。

下面我们来具体构造张量积。

定义 5.3 (tensor product construction)

设 R 是一个环, $M_R, {}_R N$ 是模。令 F 为以 $M \times N$ 为基的自由 Abelian 群, 也就是说, F 中的每个元素都可唯一地写成有限和 $c_1(m_1, n_1) + \cdots + c_t(m_t, n_t)$, 其中 $c_i \in \mathbb{Z}, (m_i, n_i) \in M \times N$. 令 S 为 F 中由下列元素生成的子群:

- $(m + m', n) - (m, n) - (m', n)$
- $(m, n + n') - (m, n) - (m, n')$
- $(mr, n) - (m, rn)$

其中 $m, m' \in M, n, n' \in N, r \in R$. 定义 $M \otimes_R N = F/S$, 并把 (m, n) 在商群中的像记为 $m \otimes n$. 再定义映射 $\tau: M \times N \rightarrow M \otimes_R N$ 为 $\tau(m, n) = m \otimes n$. 则 $(M \otimes_R N, \tau)$ (简记为 $M \otimes_R N$) 就是 $(M_R, {}_R N)$ 的张量积。



注 (1) $M \otimes_R N$ 中的元素一般不是单个 $m \otimes n$, 而是有限和 $\sum m_i \otimes n_i$.

(2) $m \otimes n = 0$ 并不推出 $m = 0$ 或 $n = 0$. 例如 $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_m = 0$, 因为对任意 $q/m \in \mathbb{Q}$ 与 $\bar{t} \in \mathbb{Z}_m$, 有 $q \otimes \bar{t} = (q/m) \otimes m\bar{t} = 0$.

命题 5.2

设 R, S, T 是环, ${}_S M_R, {}_R N_T$ 是双模, 则:

(1) $M \otimes_R N$ 是一个 S - T -双模, 其作用由 $(s(m \otimes n)) = (sm) \otimes n$ 与 $((m \otimes n)t) = m \otimes (nt)$ 给出。

(2) 映射 $\eta: M \otimes_R R \rightarrow M, m \otimes r \mapsto mr$ 是 R -模同构, 其逆为 $m \mapsto m \otimes 1$ 。

(3) 映射 $\mu: R \otimes_R N \rightarrow N, r \otimes n \mapsto rn$ 是 R -模同构, 其逆为 $n \mapsto 1 \otimes n$ 。

(4) 对任意一族右 R -模 $\{M_\alpha\}_{\alpha \in I}$, 有 S - T -双模同构

$$\left(\bigoplus_{\alpha \in I} M_\alpha \right) \otimes_R N \cong \bigoplus_{\alpha \in I} (M_\alpha \otimes_R N),$$

其映射由 $(m_\alpha)_{\alpha \in I} \otimes n \mapsto (m_\alpha \otimes n)_{\alpha \in I}$ 给出。

(5) 对任意一族左 R -模 $\{N_\alpha\}_{\alpha \in I}$, 有 S - T -双模同构

$$M \otimes_R \left(\bigoplus_{\alpha \in I} N_\alpha \right) \cong \bigoplus_{\alpha \in I} (M \otimes_R N_\alpha),$$

其映射由 $m \otimes (n_\alpha)_{\alpha \in I} \mapsto (m \otimes n_\alpha)_{\alpha \in I}$ 给出。



命题 5.3

设 $f: M_R \rightarrow M'_R$ 与 $g: {}_R N \rightarrow {}_R N'$ 是 R -模同态, 则存在唯一的 $\mathbb{Z}$ -模同态

$$f \otimes g: M \otimes_R N \rightarrow M' \otimes_R N'$$

使得 $(f \otimes g)(m \otimes n) = f(m) \otimes g(n)$ 。



引理 5.1

设 $f_1, f_2: M_R \rightarrow M'_R$ 与 $g_1, g_2: {}_R N \rightarrow {}_R N'$ 是 R -模同态, 则

(1) $(f_1 + f_2) \otimes g = (f_1 \otimes g) + (f_2 \otimes g)$ 。

(2) $f \otimes (g_1 + g_2) = (f \otimes g_1) + (f \otimes g_2)$ 。

(3) $f \otimes 0 = 0, 0 \otimes g = 0$ 。

(4) $\text{Id}_M \otimes \text{Id}_N = \text{Id}_{M \otimes_R N}$ 。



引理 5.2

设 $f: M_R \rightarrow M'_R, f': M'_R \rightarrow M''_R, g: {}_R N \rightarrow {}_R N', g': {}_R N' \rightarrow {}_R N''$ 是 R -模同态, 则

$$(f' \otimes g')(f \otimes g) = (f'f) \otimes (g'g).$$



引理 5.3

设 R, S, T, U 是环, ${}_R L_S, {}_S M_T, {}_T N_U$ 是双模, 则存在唯一的自然同构

$$({}_R L \otimes_S M) \otimes_T N_U \cong {}_R L \otimes_S (M \otimes_T N_U).$$

其对应为 $(l \otimes m) \otimes n \mapsto l \otimes (m \otimes n)$ 。



命题 5.4

设 R 是一个环, $M_R, {}_R N$ 是模, 则函子 $M \otimes_R - : R\text{-Mod} \rightarrow \mathbf{Ab}$ 与 $- \otimes_R N : \mathbf{Mod}\text{-}R \rightarrow \mathbf{Ab}$ 都是右正合函子。

证明 只证 $M \otimes_R -$ 右正合, 第二个同理。设 $N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N'' \rightarrow 0$ 是左 R -模的正合列。则要证

$$M \otimes_R N' \xrightarrow{\text{Id}_M \otimes f} M \otimes_R N \xrightarrow{\text{Id}_M \otimes g} M \otimes_R N'' \rightarrow 0$$

正合。由于 g 满, $\text{Id}_M \otimes g$ 也满。又 $(\text{Id}_M \otimes g)(\text{Id}_M \otimes f) = \text{Id}_M \otimes (gf) = 0$, 故 $\text{Im}(\text{Id}_M \otimes f) \subseteq \text{Ker}(\text{Id}_M \otimes g)$. 从而映射 $\text{Id}_M \otimes g$ 诱导出同态 $\theta : (M \otimes_R N) / \text{Im}(\text{Id}_M \otimes f) \rightarrow M \otimes_R N''$, 其定义为 $\overline{m \otimes n} \mapsto m \otimes g(n)$. 反过来, 定义 $\delta : M \otimes_R N'' \rightarrow (M \otimes_R N) / \text{Im}(\text{Id}_M \otimes f)$ 为 $(m, n'') \mapsto \overline{m \otimes n}$, 其中 $n \in N$ 满足 $g(n) = n''$. 这一定义是良定的: 若 $g(n_1) = g(n_2)$, 则 $n_1 - n_2 \in \text{Ker } g = \text{Im } f$, 所以 $m \otimes (n_1 - n_2) \in \text{Im}(\text{Id}_M \otimes f)$, 从而 $\overline{m \otimes n_1} = \overline{m \otimes n_2}$. 并且 δ 是 R -balanced, 于是由泛性质, 诱导同态 $\theta' : M \otimes_R N'' \rightarrow (M \otimes_R N) / \text{Im}(\text{Id}_M \otimes f)$, 满足 $\theta'(m \otimes n'') = \overline{m \otimes n}$, 其中 $g(n) = n''$. 容易验证 θ, θ' 互逆, 故 $(M \otimes_R N) / \text{Im}(\text{Id}_M \otimes f) \cong M \otimes_R N''$. 于是 $\text{Im}(\text{Id}_M \otimes f) = \text{Ker}(\text{Id}_M \otimes g)$. 故 $M \otimes_R -$ 右正合。

定义 5.4 (flat)

- (1) 一个左 R -模 ${}_R M$ 称为平坦的, 如果函子 $- \otimes_R M$ 是正合函子。
- (2) 一个右 R -模 M_R 称为平坦的, 如果函子 $M \otimes_R -$ 是正合函子。

命题 5.5

- (1) $\bigoplus_{\alpha \in I} M_\alpha$ 平坦当且仅当每个 M_α 都平坦。
- (2) 投射模都是平坦模。

证明 (1) 考虑交换图

$$\begin{array}{ccc} (\bigoplus M_\alpha) \otimes_R N & \xrightarrow{\cong} & \bigoplus (M_\alpha \otimes_R N) \\ \text{Id}_M \otimes_R f \downarrow & & \downarrow \bigoplus (\text{Id}_{M_\alpha} \otimes_R f) \\ (\bigoplus M_\alpha) \otimes_R N' & \xrightarrow{\cong} & \bigoplus (M_\alpha \otimes_R N') \end{array}$$

于是 $\text{Id}_M \otimes_R f$ 单当且仅当 $\bigoplus (\text{Id}_{M_\alpha} \otimes_R f)$ 单, 从而等价于每个 $\text{Id}_{M_\alpha} \otimes_R f$ 都单。

(2) 因为 $M \otimes_R R^{(I)} \cong (M \otimes_R R)^{(I)} \cong M^{(I)}$, 故自由模平坦。再由 (1) 知投射模作为自由模的直和项, 也平坦。

定义 5.5 (coproduct)

设 $\mathcal{C}$ 是一个范畴, $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 是一族对象。它们的 coproduct (余积) 是一个对象 X , 连同态射 $\iota_\alpha : X_\alpha \rightarrow X$, 满足如下泛性质: 若存在对象 Y 及态射 $f_\alpha : X_\alpha \rightarrow Y$, 则存在唯一态射 $g : X \rightarrow Y$, 使得 $g\iota_\alpha = f_\alpha$ 对任意 $\alpha \in I$ 都成立。记作 $X = \bigoplus_{\alpha \in I} X_\alpha$.

我们说范畴 $\mathcal{C}$ 有余积, 如果对任意 $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$, $\bigoplus X_\alpha$ 都存在。

例 5.1

在 **Set** 中, 余积是不交并; 在 $R\text{-Mod}$ 中, 余积是直和。

命题 5.6

- 设范畴 $\mathcal{C}$ 有余积和零对象 0 (零对象保证了有零态射), 则对任意一族对象 $\{X_i\}_{i \in I}$, 有
- (1) 对任意 $j \in I$, 均存在唯一态射 $\pi_j : \bigoplus X_i \rightarrow X_j$, 使得 $\pi_j \iota_i = \delta_{ij}$, 其中 $\delta_{ij} : X_i \rightarrow X_j$ 在 $i = j$ 时为 Id_{X_i} , 在 $i \neq j$ 时为零态射。
 - (2) 对任意 $i, j \in I$, 有 ι_i 是单态射, π_j 是满态射。
 - (3) 若 $f, f' : \bigoplus X_i \rightarrow Y$ 满足 $f \iota_i = f' \iota_i$ 对任意 $i \in I$ 都成立, 则 $f = f'$ 。
 - (4) 若 $f_i : X_i \rightarrow Y_i$, 则存在唯一态射 $\bigoplus f_i : \bigoplus X_i \rightarrow \bigoplus Y_i$, 使得 $(\bigoplus f_i) \iota_i = \iota'_i f_i$ 对任意 $i \in I$ 都成立。其中 $\iota'_i : Y_i \rightarrow \bigoplus Y_i$ 。
 - (5) 若 $f_i : X_i \rightarrow Y_i, g_i : Y_i \rightarrow Z_i$, 则 $(\bigoplus g_i)(\bigoplus f_i) = \bigoplus (g_i f_i)$ 。
 - (6) $\bigoplus f_i : \bigoplus X_i \rightarrow \bigoplus Y_i$ 是满态射当且仅当每个 f_i 都是满态射。

证明 这里只证明 (6)。先设每个 f_i 都满。若 $g, h : \bigoplus Y_i \rightarrow Z$ 满足 $g(\bigoplus f_i) = h(\bigoplus f_i)$, 则 $g \iota'_i f_i = h \iota'_i f_i, \forall i \in I$. 由 f_i 满, 得 $g \iota'_i = h \iota'_i$ 对任意 i 都成立。再由 (3), 得 $g = h$, 故 $\bigoplus f_i$ 满。

反过来, 设 $\bigoplus f_i$ 满。任取 $g_i, h_i : Y_i \rightarrow Z_i$ 满足 $g_i f_i = h_i f_i, \forall i \in I$. 则 $g_i \pi'_i (\bigoplus f_i) \iota_i = g_i \pi'_i \iota'_i f_i = g_i f_i = h_i f_i = h_i \pi'_i \iota'_i f_i = h_i \pi'_i (\bigoplus f_i) \iota_i$. 由 (3) 得 $g_i \pi'_i (\bigoplus f_i) = h_i \pi'_i (\bigoplus f_i)$. 再由 $\bigoplus f_i$ 满, 得 $g_i \pi'_i = h_i \pi'_i$, 由 π'_i 满, 从而 $g_i = h_i$. 故每个 f_i 都满。

定义 5.6 (product)

设 $\mathcal{C}$ 是一个范畴, $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 是一族对象。它们的 product (积) 是一个对象 X , 连同态射 $p_\alpha : X \rightarrow X_\alpha$, 满足如下泛性质: 若存在对象 Y 及态射 $f_\alpha : Y \rightarrow X_\alpha$, 则存在唯一态射 $g : Y \rightarrow X$, 使得 $p_\alpha g = f_\alpha$ 对任意 $\alpha \in I$ 都成立。记作 $X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ 。

我们说范畴 $\mathcal{C}$ 有积, 如果对任意 $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}, \prod X_\alpha$ 都存在。

命题 5.7

- 设范畴 $\mathcal{C}$ 有积和零对象 0 , 则对任意一族对象 $\{X_i\}_{i \in I}$, 有
- (1) 对任意 $j \in I$, 存在唯一态射 $e_j : X_j \rightarrow \prod X_i$, 使得 $p_i e_j = \delta_{ij}$ 。
 - (2) 对任意 $i, j \in I$, 有 p_i 是满态射, e_j 是单态射。
 - (3) 若 $f, f' : Y \rightarrow \prod X_i$ 满足 $p_i f = p_i f'$ 对任意 $i \in I$ 都成立, 则 $f = f'$ 。
 - (4) 若 $f_i : X_i \rightarrow Y_i$, 则存在唯一态射 $\prod f_i : \prod X_i \rightarrow \prod Y_i$, 使得 $p'_i (\prod f_i) = f_i p_i$ 对任意 $i \in I$ 都成立。其中 $p'_i : \prod Y_i \rightarrow Y_i$ 。
 - (5) 若 $f_i : X_i \rightarrow Y_i, g_i : Y_i \rightarrow Z_i$, 则 $(\prod g_i)(\prod f_i) = \prod (g_i f_i)$ 。
 - (6) $\prod f_i : \prod X_i \rightarrow \prod Y_i$ 是单态射当且仅当每个 f_i 都是单态射。

Lecture 6

回顾一下, 设 $\mathcal{C}$ 是一个范畴, $\{X_i\}_{i \in I}$ 是一族对象。若 $\bigoplus_{i \in I} X_i$ 是它们的余积, 记结构态射为 $\iota_j : X_j \rightarrow \bigoplus_{i \in I} X_i$ 。若 $\prod_{i \in I} X_i$ 是它们的积, 记投影为 $p_i : \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_i$ 。若范畴有零对象, 则分别存在唯一态射 $\pi_j : \bigoplus_{i \in I} X_i \rightarrow X_j$ 与 $e_j : X_j \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$, 满足 $\pi_j \iota_i = \delta_{ij}$ 与 $p_i e_j = \delta_{ij}$ 。

命题 6.1

设 $\mathcal{C}$ 有积、余积与零对象, $\{X_i\}_{i \in I}$ 是一族对象, 则存在唯一态射

$$\theta : \bigoplus_{i \in I} X_i \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$$

使得 $\theta \iota_i = e_i, \forall i \in I$ 。并且 θ 也是唯一满足 $p_i \theta = \pi_i, \forall i \in I$ 的态射。



注 一般来说, θ 并不一定是同构, 即使在有限情形下也未必如此。例如在 **Set** 中, 设 Y_1, Y_2 是集合, 则余积是 $Y_1 \sqcup Y_2$, 积是 $Y_1 \times Y_2$ 。虽然存在态射 $\theta : Y_1 \sqcup Y_2 \rightarrow Y_1 \times Y_2$, 但一般 $|Y_1 \sqcup Y_2| = |Y_1| + |Y_2|$, 而 $|Y_1 \times Y_2| = |Y_1| |Y_2|$, 故 θ 通常不是双射。

注 在 **R-Mod** 中, 有限积与有限余积是一致的。这也是 **Set** 与 **R-Mod** 之间的一个关键区别: **R-Mod** 是加法范畴, 而 **Set** 不是。

定义 6.1 (additive category)

一个范畴 $\mathcal{C}$ 称为 additive (加法的), 如果:

- $\mathcal{C}$ 有零对象
- 对任意 $X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$, $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ 是加法群
- 复合是双线性的, 即若 $f, f' : X \rightarrow Y$, $g, g' : Y \rightarrow Z$, 则有 $g(f + f') = gf + gf'$, $(g + g')f = gf + g'f$ (分配律)
- $\mathcal{C}$ 有有限积与有限余积



注 其实只要求 $\mathcal{C}$ 有有限余积就够了, 因为在加法范畴里有限积与有限余积一致。

例 6.1

R-Mod 是加法范畴, 而 **Set** 不是加法范畴。



定义 6.2 (additive functor)

设 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ 是加法范畴, 一个函子 $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 称为 additive (加法的), 如果对任意 $f, g : X \rightarrow Y$, 都有 $F(f + g) = Ff + Fg$ 。也即映射 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FX, FY)$ 是群同态。



例 6.2

在 **R-Mod** 中, $\text{Hom}_R(-, -)$ 与 $- \otimes_R -$ 都是加法函子 (这里的意思是对两个变量都是加法函子)。



命题 6.2

设 $\mathcal{C}$ 是加法范畴, $\{X_i\}_{i \in I}$ 是有限一族对象。

(1) 对余积 $(\bigoplus X_i, \iota_i : X_i \rightarrow \bigoplus X_i)$ 及诱导态射 $\pi_i : \bigoplus X_i \rightarrow X_i$, 有 $\sum \iota_i \pi_i = \text{Id}_{\bigoplus X_i}$.

(2) 对积 $(\prod X_i, p_i : \prod X_i \rightarrow X_i)$ 及诱导态射 $e_i : X_i \rightarrow \prod X_i$, 有 $\sum e_i p_i = \text{Id}_{\prod X_i}$.

(3) $\bigoplus X_i \cong \prod X_i$.



证明 先证 (1), 对任意 $j \in I$, 有

$$\left(\sum \iota_i \pi_i\right) \iota_j = \sum \iota_i \pi_i \iota_j = \sum \iota_i \delta_{ij} = \iota_j = \text{Id}_{\bigoplus X_i} \iota_j.$$

由余积的性质, 得 $\sum \iota_i \pi_i = \text{Id}_{\bigoplus X_i}$. 命题 (2) 与此对偶。

对 (3), 只需证明 $(\bigoplus X_i, \pi_i)$ 也是 $\{X_i\}_{i \in I}$ 的积。任取态射 $f_i : Y \rightarrow X_i$, 令 $g = \sum \iota_i f_i : Y \rightarrow \bigoplus X_i$, 则对任意 $j \in I$ 有 $\pi_j g = \sum \pi_j \iota_i f_i = \sum \delta_{ij} f_i = f_j$. 若 $g' : Y \rightarrow \bigoplus X_i$ 也满足 $\pi_i g' = f_i$ 对任意 i 成立, 则 $g' = \text{Id}_{\bigoplus X_i} g' = \sum \iota_i \pi_i g' = \sum \iota_i f_i = g$. 故 g 唯一, 从而 $\bigoplus X_i$ 满足积的泛性质, 于是 $\bigoplus X_i \cong \prod X_i$.

推论 6.1

设 $\mathcal{C}$ 是加法范畴, $\{X_i\}_{i \in I}$ 是有限一族对象, $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$. 则 $X \cong \bigoplus X_i$ 当且仅当存在态射 $f_i : X_i \rightarrow X$ 与 $g_i : X \rightarrow X_i$, 使得 $g_i f_j = \delta_{ij}$, 且 $\sum f_i g_i = \text{Id}_X$.



推论 6.2

设 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ 是加法范畴, $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 是加法函子, 则对任意 $X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$, 有 $T(X \oplus Y) \cong T(X) \oplus T(Y)$. 并且其逆命题也成立, 即若一个函子 T 保持有限余积, 则 T 是加法函子。



证明 对于逆命题, 考虑 $X \xrightarrow{(1,1)^T} X \oplus X \xrightarrow{\text{diag}(f,g)} Y \oplus Y \xrightarrow{(1,1)} Y$ 即可 (这一串映射复合得到 $f + g$, 由保有限余积可得保加法)。

定义 6.3

设 $\mathcal{C}$ 是加法范畴, $f : X \rightarrow Y$ 是一个态射。

(1) f 的 kernel (核) 是一个态射 $i : K \rightarrow X$, 满足 $fi = 0$, 且对任意 $g : Z \rightarrow X$, 若 $fg = 0$, 则存在唯一 $\theta : Z \rightarrow K$ 使得 $i\theta = g$.

$$\begin{array}{ccccc} Z & & & & \\ \theta \downarrow & \searrow g & & \searrow 0 & \\ K & \xrightarrow{i} & X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{\pi} & C \\ & \searrow 0 & \searrow h & & \downarrow \delta \\ & & & & Z \end{array}$$

(2) f 的 cokernel (余核) 是一个态射 $\pi : Y \rightarrow C$, 满足 $\pi f = 0$, 且对任意 $h : Y \rightarrow Z$, 若 $hf = 0$, 则存在唯一 $\delta : C \rightarrow Z$ 使得 $\delta\pi = h$.

记 $(K, i) = \text{Ker } f = \text{Ker}(X \rightarrow Y)$, $K = \text{Ker } f$.

$(C, \pi) = \text{Coker } f = \text{Coker}(X \rightarrow Y)$, $C = \text{Coker } f$.



注 同一个态射的两个核彼此同构, 同样, 两个余核也彼此同构。

引理 6.1

设 $f: X \rightarrow Y$ 是加法范畴 $\mathcal{C}$ 中的态射。

- (1) 若 $i: K \rightarrow X$ 是 f 的核, 则 i 是单态射。
- (2) 若 $\pi: Y \rightarrow C$ 是 f 的余核, 则 π 是满态射。



证明 先证 (1), 若 $ig_1 = ig_2$, 则 $i(g_1 - g_2) = 0$, 从而 $fi(g_1 - g_2) = 0$. 由 i 是 f 的核, 存在唯一 θ 使得 $i\theta = i(g_1 - g_2)$. 而 $0: Z \rightarrow K$ 也满足 $i0 = 0 = i(g_1 - g_2)$, 故由唯一性知 $\theta = 0 = g_1 - g_2$, 即 $g_1 = g_2$. 故 i 单. (2) 与此对偶。

注 在加法范畴中, f 是单态射当且仅当对任意 g 有 $fg = 0$ 蕴含 $g = 0$. f 是满态射当且仅当对任意 g 有 $gf = 0$ 蕴含 $g = 0$.

定义 6.4

设 $\mathcal{C}$ 是加法范畴, $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$.

- (1) 如果存在一个单态射 $f: Z \rightarrow X$, 则称 Z 是 X 的 subobject (子对象)。两个子对象 $(Z_1, f_1), (Z_2, f_2)$ 称为等价的, 如果存在同构 $\theta: Z_2 \rightarrow Z_1$ 使得 $f_1\theta = f_2$.
- (2) 如果存在一个满态射 $g: X \rightarrow Y$, 则称 Y 是 X 的 quotient object (商对象)。两个商对象 $(Y_1, g_1), (Y_2, g_2)$ 称为等价的, 如果存在同构 $\delta: Y_1 \rightarrow Y_2$ 使得 $\delta g_1 = g_2$.



引理 6.2

设 $\mathcal{C}$ 是加法范畴, $f: X \rightarrow Y$ 是一个态射。

- (1) 若 f 有核, 则 f 是单态射当且仅当 $\text{Ker } f = 0$.
- (2) 若 f 有余核, 则 f 是满态射当且仅当 $\text{Coker } f = 0$.
- (3) 若 f 是某个态射的核, 且 f 有余核, 则 $f = \text{Ker}(\text{Coker } f)$, 也就是说, (X, f) 是 (Y, π) 的核, 其中 $\pi: Y \rightarrow \text{Coker } f$.
- (4) 若 f 是某个态射的余核, 且 f 有核, 则 $f = \text{Coker}(\text{Ker } f)$, 也就是说, (Y, f) 是 $(\text{Ker } f, i)$ 的余核, 其中 $i: \text{Ker } f \rightarrow X$.



证明 先证 (1), 若 f 单, 则对任意 $g: Z \rightarrow X$, 由 $fg = 0$ 得 $g = 0$, 所以零态射 $0: 0 \rightarrow X$ 满足核的泛性质, 从而 $\text{Ker } f = 0$. 反过来, 若 $\text{Ker } f = 0$, 又有 $fg = 0$, 则由核的泛性质存在唯一 $\theta: Z \rightarrow 0$ 使得 $g = 0\theta = 0$, 故 $g = 0$, 从而 f 单。

(3) 设 f 是 $g: Y \rightarrow Z$ 的核, 则 $gf = 0$. 设 $\pi: Y \rightarrow \text{Coker } f$ 是 f 的余核. 由 $gf = 0$, 存在唯一 $\delta: \text{Coker } f \rightarrow Z$ 使得 $\delta\pi = g$. 若 $f': X' \rightarrow Y$ 满足 $\pi f' = 0$, 则 $\delta\pi f' = 0$, 即 $gf' = 0$. 因为 f 是 g 的核, 故存在唯一 $\theta: X' \rightarrow X$ 使得 $f\theta = f'$. 这正说明 f 是 π 的核, 即 $f = \text{Ker}(\text{Coker } f)$.

$$\begin{array}{ccccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \\
 \uparrow \theta & \nearrow f' & \searrow \pi & & \uparrow \delta \\
 X' & & & & \text{Coker } f
 \end{array}$$

命题 (2) 和 (4) 分别与 (1) 和 (3) 对偶。

命题 6.3

设 $\mathcal{C}$ 是一个加法范畴，满足每一个态射都有核与余核，则对于 $f: X \rightarrow Y$ ，我们有

$$\begin{array}{ccccccc}
 \text{Ker } f & \xrightarrow{i} & X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{\pi} & \text{Coker } f \\
 & & \downarrow e & \nearrow \tilde{f} & \uparrow m' & & \uparrow m \\
 & & \text{Coker } i & \xrightarrow{\hat{f}} & \text{Ker } \pi & & \\
 & & \parallel \text{Def} & & \parallel \text{Def} & & \\
 & & \text{Coim } f & & \text{Im } f & &
 \end{array}$$



证明 由 $fi = 0$ ，存在唯一 $m': \text{Coker } i \rightarrow Y$ 使得 $f = m'e$ 。由 $\pi f = 0$ ，存在唯一 $\tilde{f}: X \rightarrow \text{Ker } \pi$ 使得 $f = m'\tilde{f}$ 。再由 $\pi m'e = \pi f = 0$ 且 e 满，可得 $\pi m' = 0$ ，因此存在唯一 $\hat{f}: \text{Coker } i \rightarrow \text{Ker } \pi$ 使得 $m'\hat{f} = m'$ 。另一方面， $m'\hat{f}e = m'e = f = m'\tilde{f}$ ，由 m 单可得 $\tilde{f} = \hat{f}e$ 。于是我们得到态射 $\hat{f}: \text{Coim } f \rightarrow \text{Im } f$ 使图表交换。

定理-定义 6.1 (Abelian category)

一个加法范畴 $\mathcal{C}$ 称为 Abelian 范畴，如果：

- (a) 每个态射都有核与余核，并且下面三个等价条件成立：
- (b1) 每个单态射都是某个态射的核，且每个满态射都是某个态射的余核。
- (b2) 每个态射 f 都有分解 $f = \gamma\beta$ ，其中 β 是余核， γ 是核。
- (b3) 对每个态射 $f: X \rightarrow Y$ ，诱导态射 $\hat{f}: \text{Coim } f \rightarrow \text{Im } f$ 是同构。



证明 我们证明后三个条件等价。先证 (b1) $\Rightarrow$ (b3)，这里用到三个事实：

(1) 对每个满态射 g ，有 $g = \text{Coker}(\text{Ker } g)$ 。对每个单态射 f ，有 $f = \text{Ker}(\text{Coker } f)$ 。

证明 结合 (b1) 与引理 6.2 (3)(4) 即得。

(2) 若一个态射 $f: X \rightarrow Y$ 既是单态射又是满态射，则它是同构。

证明 由 f 是单态射，则 $\text{Ker } f = 0$ ，我们有 $\text{Id}_X 0 = 0$ 以及由 f 是满态射有 $f = \text{Coker}(\text{Ker } f)$ ，于是存在唯一态射 $g: Y \rightarrow X$ 使得 $gf = \text{Id}_X$ 。与之对偶，我们有 $fg = \text{Id}_Y$ 。因此 f 是同构。

(3) 对于态射 f ，态射 $m': \text{Coim } f \rightarrow Y$ 是单态射，且 $\tilde{f}: X \rightarrow \text{Im } f$ 是满态射。

证明 设 $\xi: Z \rightarrow \text{Coim } f$ 满足 $m'\xi = 0$ ，设 $q = \text{Coker } \xi$ 以及设 $j: \text{Coker } \xi \rightarrow Y$ 是唯一的满足 $m' = jq$ 的态射。由 qe 是满态射，由 (b1) 可知 qe 是某个态射的余核，设 $h: H \rightarrow X$ 满足 $qe = \text{Coker } h$ ，则 $fh = m'eh = j(qeh) = 0$ ，于是存在唯一的 $h': H \rightarrow \text{Ker } f$ 使得 $h = ih'$ ，因此 $eh = eih' = 0$ 。此过程可表示为如下的交换图表：

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{Ker } f & \xrightarrow{i} & X & \xrightarrow{f} & Y \\
 \uparrow h' & \nearrow h & \downarrow e & \nearrow m' & \uparrow j \\
 H & & \text{Coim } f & & \text{Coker } \xi \\
 & \nearrow \xi & \searrow q & & \\
 Z & & & &
 \end{array}$$

于是存在唯一态射 e' 使得 $e = e'qe$ ，由 e 是满态射，则 $e'q = \text{Id}_{\text{Coim } f}$ ，从而有 q 是单态射，因

此由 $q\xi = 0$ 可知 $\xi = 0$. 于是 m' 是单态射。与之对偶我们有 $\tilde{f}: X \rightarrow \text{Im } f$ 是满态射。

$$\begin{array}{ccccc} H & \xrightarrow{h} & X & \xrightarrow{qe} & \text{Coker } \xi \\ & \searrow 0 & \downarrow e & \swarrow \exists! e' & \\ & & \text{Coim } f & & \end{array}$$

现在我们来证明 (b1) $\Rightarrow$ (b3), 若 $\hat{f}g = 0$ 则有 $m\hat{f}g = m'g = 0$, 从而由事实 (3) 可知 $g = 0$, 所以 $\hat{f}$ 是单态射。同样若 $g\hat{f} = 0$ 则有 $g\hat{f}e = g\tilde{f} = 0$, 从而由事实 (3) 可知 $g = 0$, 所以 $\hat{f}$ 是满态射。所以由事实 (2) 可知 $\hat{f}$ 是同构。

再证 (b3) $\Rightarrow$ (b1), 若 f 是单态射, 则我们有交换图表

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{\pi} & \text{Coker } f \\ & & \downarrow \text{Id}_X & & \uparrow m & & \\ & & X & \xrightarrow{\hat{f}} & \text{Im } f & & \end{array}$$

于是我们有 $f = m\hat{f}\text{Id}_X = m\hat{f}$, 而 $\hat{f}$ 是同构且 $m = \text{Ker}(\text{Coker } f)$, 故 $f = \text{Ker}(\text{Coker } f)$. 满态射的情形是对偶的。

(b3) $\Rightarrow$ (b2) 是显然的。

最后证 (b2) $\Rightarrow$ (b3), 设 $f = \gamma\beta: X \rightarrow T \rightarrow Y$, 其中 β 是余核, γ 是核。由 γ 是单态射容易验证 $\text{Ker } \beta = \text{Ker } f$, 类似地有 $\text{Coker } \gamma = \text{Coker } f$, 因此 $\beta = \text{Coker}(\text{Ker } f)$, $\gamma = \text{Ker}(\text{Coker } f)$, 故 $\text{Coim } f \cong T \cong \text{Im } f$, 即 $\hat{f}$ 是同构。

引理 6.3

设 $\mathcal{C}$ 是 Abelian 范畴, $f: X \rightarrow Y$ 是一个态射, 则有

- (1) $i: K \rightarrow X$ 是 f 的核当且仅当 $i^{\text{op}}: X \rightarrow K$ 是 $f^{\text{op}}: Y \rightarrow X$ 在 $\mathcal{C}^{\text{op}}$ 中的余核。
- (2) $\pi: Y \rightarrow C$ 是 f 的余核当且仅当 $\pi^{\text{op}}: C \rightarrow Y$ 是 $f^{\text{op}}: Y \rightarrow X$ 在 $\mathcal{C}^{\text{op}}$ 中的核。
- (3) $m: I \rightarrow Y$ 是 f 的像当且仅当 $m^{\text{op}}: Y \rightarrow I$ 是 $f^{\text{op}}: Y \rightarrow X$ 在 $\mathcal{C}^{\text{op}}$ 中的余像。
- (4) $\mathcal{C}^{\text{op}}$ 仍然是 Abelian 范畴。



Lecture 7

首先我们回顾 Abelian 范畴的定义。

定义 7.1 (Abelian category)

一个加法范畴 $\mathcal{C}$ 称为 Abelian 范畴，如果：

- (a) 每个态射都有核与余核，并且下面三个等价条件成立：
- (b1) 每个单态射都是某个态射的核，且每个满态射都是某个态射的余核。
- (b2) 每个态射 f 都有分解 $f = \gamma\beta$ ，其中 β 是余核， γ 是核。
- (b3) 对每个态射 $f: X \rightarrow Y$ ，诱导态射 $\hat{f}: \text{Coim } f = X/\text{Ker } f \rightarrow \text{Im } f$ 是同构。



在 Abelian 范畴 $\mathcal{A}$ 中，设 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ 是态射，则有如下的事实：

- (1) f 是单态射当且仅当 $\text{Ker } f = 0$ ，也当且仅当 $\tilde{f}: X \rightarrow \text{Im } f$ 是同构。
- (1)' f 是满态射当且仅当 $\text{Coker } f = 0$ ，也当且仅当 $m: \text{Im } f \rightarrow Y$ 是同构。
- (2) 若 g 是单态射，则 $\text{Ker } f \rightarrow \text{Ker}(gf)$ 是同构。
- (2)' 若 f 是满态射，则 $\text{Coker } g \rightarrow \text{Coker}(gf)$ 是同构。
- (3) $Y/\text{Im } f \cong \text{Coker } f$.
- (4) 若 f 是满态射，则 $\text{Im } g \rightarrow \text{Im}(gf)$ 是同构。
- (5) f 是同构当且仅当 f 既是单态射又是满态射。
- (6) 若 g 是单态射，则 $\text{Im } f \rightarrow \text{Im}(gf)$ 是同构。

证明 我们给出 (6) 的证明。设 $f = m\tilde{f}$ ， $gf = m'\tilde{gf}$ 是典范分解。由于 $\pi'gm\tilde{f} = \pi'gf = 0$ ，且 $\tilde{f}$ 是满态射，故 $\pi'gm = 0$ 以及 $m' = \text{Ker } \pi'$ ，于是存在唯一 $c: \text{Im } f \rightarrow \text{Im}(gf)$ 使得 $gm = m'c$ ，而 g, m 都是单态射，故可知 c 也是单态射。又由 $m'c\tilde{f} = gm\tilde{f} = gf = m'\tilde{gf}$ ，且 m' 是单态射，可知 $c\tilde{f} = \tilde{gf}$ 。由于 $\tilde{f}$ 与 $\tilde{gf}$ 都是满态射，所以 c 也是满态射，于是 c 是同构。

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \text{Coker } f & & \text{Coker}(gf) \\
 & & \uparrow \pi & & \uparrow \pi' \\
 X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \\
 & \searrow \tilde{f} & \uparrow m & \nearrow \tilde{gf} & \uparrow m' \\
 & & \text{Im } f & \xrightarrow{\quad c \quad} & \text{Im}(gf)
 \end{array}$$

注 Abelian 范畴是 “self-dual” 的。也就是说：

- 若 $\mathcal{A}$ 是 Abelian 范畴，则其对偶范畴 $\mathcal{A}^{\text{op}}$ 也是 Abelian 范畴。
- 一个只用公理表述出来的 $\mathcal{A}$ 中的定理，它的对偶也在 $\mathcal{A}$ 中也成立。

以及 $R\text{-Mod}$ 还具有额外性质。例如，“每个模都是某个投射模的商模”与“每个模都能嵌入某个内射模”这两个结论的证明方式是很不一样的。

定义 7.2

设 $\mathcal{A}$ 是 Abelian 范畴。

- 一个对象 P 称为 projective (投射的), 如果对任意满态射 $g : X \rightarrow Y$ 与任意态射 $f : P \rightarrow Y$, 都存在 $h : P \rightarrow X$ 使得 $f = gh$.
- 一个对象 Q 称为 injective (内射的), 如果对任意单态射 $g : Z \rightarrow X$ 与任意态射 $f : Z \rightarrow Q$, 都存在 $h : X \rightarrow Q$ 使得 $f = hg$.
- 若对每个对象 X , 都存在一个投射对象 P 和一个满态射 $P \rightarrow X$, 则称 $\mathcal{A}$ 有 enough projectives (足够多的投射对象)。
- 若对每个对象 X , 都存在一个内射对象 Q 和一个单态射 $X \rightarrow Q$, 则称 $\mathcal{A}$ 有 enough injectives (足够多的内射对象)。



设 $\mathcal{A}$ 是 Abelian 范畴, 且有一个态射序列 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ 满足 $gf = 0$. 由 f 的典范分解 $f = m\tilde{f}$ 可知 $gm\tilde{f} = 0$. 由于 $\tilde{f}$ 是满态射, 所以 $gm = 0$. 又因为 $k : \text{Ker } g \rightarrow Y$ 是 g 的核, 故存在唯一态射 $u : \text{Im } f \rightarrow \text{Ker } g$ 使得 $m = ku$. 由于 m 是单态射, 所以 u 也是单态射。

定义 7.3 (exact)

我们称 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ 在 Y 处正合, 如果上面构造出的态射 $u : \text{Im } f \rightarrow \text{Ker } g$ 是同构。通常简记为 $\text{Im } f = \text{Ker } g$.



定理 7.1 (Freyd-Mitchell Theorem)

若 $\mathcal{A}$ 是一个小 Abelian 范畴, 则存在一个环 R 以及一个全忠实正合函子 $F : \mathcal{A} \rightarrow R\text{-Mod}$. 事实上, 也可以将 $R\text{-Mod}$ 换为 $\mathbf{Ab}$.



注 我们给出一些注记:

- 这个函子给出 $\mathcal{A}$ 与 $R\text{-Mod}$ 的某个满子范畴之间的等价, 并且 $\mathcal{A}$ 中的核与余核对应于 $R\text{-Mod}$ 中通常意义下计算出来的核与余核。
- 特别地, 我们有 F 必然是加法函子。
- 因此 $\mathcal{A}$ 中的对象可以看成某些 R -模, 态射可以看成 R -模同态。
- 不过 $\mathcal{A}$ 中的投射对象与内射对象 (如果存在) 并不一定对应于 $R\text{-Mod}$ 中的投射模与内射模。

注 [Rotman P316][章璞, 吴泉水第二章]

- 若一个命题的形式是 “ p 推出 q ”, 其中 p, q 都是关于 $\mathcal{A}$ 中某个图表的范畴论命题, 而且这个命题在 $\mathbf{Ab}$ 中成立, 那么它在 $\mathcal{A}$ 中也成立。
- 更一般地, 我们有: 若一个命题的形式是 “ p 推出 q ”, 其中 p 是关于 $\mathcal{A}$ 中某个图表的范畴论命题, 而 q 断言在这个图表上添入若干额外态射后得到的新图表满足某种范畴论性质; 如果这个结论在 $\mathbf{Ab}$ 中可以通过追图构造出这些额外态射并证明之, 那么这个命题在 $\mathcal{A}$ 中也成立。
- 例如, 五引理、蛇引理 (通过连接态射) 以及比较定理都在任意 Abelian 范畴中成立。

下面我们开始讨论复形。

定义 7.4 (chain complex)

设 $\mathcal{A}$ 是 Abelian 范畴，一个 chain complex (链复形) 是一个序列

$$X = X_{\bullet} = (X_{\bullet}, d_{\bullet}) : \cdots \rightarrow X_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} X_n \xrightarrow{d_n} X_{n-1} \rightarrow \cdots$$

满足 $d_n d_{n+1} = 0$ 对任意 $n \in \mathbb{Z}$ 都成立。



定义 7.5 (cochain complex)

一个 cochain complex (上链复形) 是一个序列

$$X^{\bullet} = (X^{\bullet}, d^{\bullet}) : \cdots \rightarrow X^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} X^n \xrightarrow{d^n} X^{n+1} \rightarrow \cdots$$

满足 $d^n d^{n-1} = 0$ 对任意 $n \in \mathbb{Z}$ 都成立。



通常我们就简单地说 $X_{\bullet}$ 或 $X^{\bullet}$ 是一个复形。

定义 7.6 (chain map)

若 $X_{\bullet}$ 与 $X'_{\bullet}$ 是两个链复形，则一个 chain map (链映射)，也就是复形的态射， $f = f_{\bullet} = (f_n)_{n \in \mathbb{Z}} : X_{\bullet} \rightarrow X'_{\bullet}$ 是指一系列态射 $f_n : X_n \rightarrow X'_n, n \in \mathbb{Z}$ ，使得下图交换：

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & X_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}} & X_n & \xrightarrow{d_n} & X_{n-1} \longrightarrow \cdots \\ & & f_{n+1} \downarrow & & f_n \downarrow & & f_{n-1} \downarrow \\ \cdots & \longrightarrow & X'_{n+1} & \xrightarrow{d'_{n+1}} & X'_n & \xrightarrow{d'_n} & X'_{n-1} \longrightarrow \cdots \end{array}$$



- 两个链映射 $f, g : X_{\bullet} \rightarrow X'_{\bullet}$ 相等是指 $f_n = g_n$ 对任意 $n \in \mathbb{Z}$ 都成立。
- 两个链映射 $f : X_{\bullet} \rightarrow Y_{\bullet}$ 与 $g : Y_{\bullet} \rightarrow Z_{\bullet}$ 的复合定义为 gf ，其中 $(gf)_n = g_n f_n, n \in \mathbb{Z}$ 。
- 恒等链映射定义为 $\text{Id}_{X_{\bullet}} = (\text{Id}_{X_n})_{n \in \mathbb{Z}}$ 。

定义 7.7 (category of complex)

若 $\mathcal{A}$ 是 Abelian 范畴，则 $\mathcal{A}$ 中所有复形构成的范畴记为 $C(\mathcal{A})$ 。



命题 7.1

若 $\mathcal{A}$ 是 Abelian 范畴，则 $C(\mathcal{A})$ 也是 Abelian 范畴。



证明 先说明 $C(\mathcal{A})$ 是加法范畴。零对象是零复形 $\cdots \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$ 。对任意两个复形 $X_{\bullet}, Y_{\bullet}$ ， $\text{Hom}_{C(\mathcal{A})}(X_{\bullet}, Y_{\bullet})$ 是加法群，其加法定义为 $(f + g)_n = f_n + g_n$ 。复合显然双线性。

$C(\mathcal{A})$ 有有限余积：若 $X_{\bullet}, Y_{\bullet}$ 是复形，其余积定义为：

$$\left(X_n \oplus Y_n, \begin{pmatrix} d_n^X & 0 \\ 0 & d_n^Y \end{pmatrix} \right)$$

并且我们还有：链映射 $f : X_{\bullet} \rightarrow Y_{\bullet}$ 是单态射当且仅当每个 f_n 都是单态射，它是满态射当且仅当每个 f_n 都是满态射。下面我们来证明 $C(\mathcal{A})$ 是一个 Abelian 范畴。设 $f : X_{\bullet} \rightarrow Y_{\bullet}$ 是链映

射, 考虑如下的交换图表:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \xrightarrow{\quad} & \text{Ker } f_{n+1} & \xrightarrow{\widetilde{d_{n+1}^X}} & \text{Ker } f_n & \xrightarrow{\widetilde{d_n^X}} & \text{Ker } f_{n-1} & \xrightarrow{\quad} & \\
 & & \downarrow \sigma_{n+1} & & \downarrow \sigma_n & & \downarrow \sigma_{n-1} & & & \\
 & \longrightarrow & X_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}^X} & X_n & \xrightarrow{d_n^X} & X_{n-1} & \longrightarrow & & \\
 & & \downarrow f_{n+1} & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} & & & \\
 & \longrightarrow & Y_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}^Y} & Y_n & \xrightarrow{d_n^Y} & Y_{n-1} & \longrightarrow & & \\
 & & \downarrow \pi_{n+1} & & \downarrow \pi_n & & \downarrow \pi_{n-1} & & & \\
 & & \text{Coker } f_{n+1} & \xrightarrow{\overline{d_{n+1}^Y}} & \text{Coker } f_n & \xrightarrow{\overline{d_n^Y}} & \text{Coker } f_{n-1} & \xrightarrow{\quad} & &
 \end{array}$$

由 $f_{n-1}d_n^X\sigma_n = d_n^Y f_n \sigma_n = 0$, 于是存在唯一的态射 $\widetilde{d_n^X} : \text{Ker } f_n \rightarrow \text{Ker } f_{n-1}$ 使得 $d_n^X \sigma_n = \sigma_{n-1} \widetilde{d_n^X}$. 同理, 由于 $\pi_{n-1}d_n^Y f_n = \pi_{n-1}f_{n-1}d_n^X = 0$, 于是存在唯一的态射 $\overline{d_n^Y} : \text{Coker } f_n \rightarrow \text{Coker } f_{n-1}$ 使得 $\overline{d_n^Y} \pi_n = \pi_{n-1} d_n^Y$.

进一步, 由于 $\sigma_{n-1} \widetilde{d_n^X} \widetilde{d_{n+1}^X} = d_n^X \sigma_n \widetilde{d_{n+1}^X} = d_n^X d_{n+1}^X \sigma_{n+1} = 0$, $\overline{d_n^Y} \overline{d_{n+1}^Y} \pi_{n+1} = \overline{d_n^Y} \pi_n d_{n+1}^Y = \pi_{n-1} d_n^Y d_{n+1}^Y = 0$. 而 σ_{n-1} 单, 且 π_{n+1} 满, 故 $\widetilde{d_n^X} \widetilde{d_{n+1}^X} = 0$, $\overline{d_n^Y} \overline{d_{n+1}^Y} = 0$, 从而 $(\text{Ker } f_\bullet, \widetilde{d_\bullet^X})$ 与 $(\text{Coker } f_\bullet, \overline{d_\bullet^Y})$ 都是复形, 直接验证得到 $\text{Ker } f = (\text{Ker } f_\bullet, \widetilde{d_\bullet^X})$, $\text{Coker } f = (\text{Coker } f_\bullet, \overline{d_\bullet^Y})$. 其余性质是容易验证的. 从而 $C(\mathcal{A})$ 是一个 Abelian 范畴.

定义 7.8

设 $\mathcal{A}$ 是 Abelian 范畴, 一个复形 $X_\bullet$.

- 称为 bounded (有界的), 如果只存在有限多个 n 使得 $X_n \neq 0$.
- 称为 upper bounded (上有界的), 如果当 n 充分大时 $X_n = 0$.
- 称为 lower bounded (下有界的), 如果当 n 充分大时 $X_{-n} = 0$.

分别记 $C^b(\mathcal{A}), C^-(\mathcal{A}), C^+(\mathcal{A})$ 为 $C(\mathcal{A})$ 的由有界复形、上有界复形和下有界复形构成的满子范畴.



注 对 $* \in \{\emptyset, b, +, -\}$, 都有 $C^*(\mathcal{A})$ 是 Abelian 范畴. 而且 $0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$ 在 $C^*(\mathcal{A})$ 中正合当且仅当对每个 $n \in \mathbb{Z}$, 序列 $0 \rightarrow X_n \rightarrow Y_n \rightarrow Z_n \rightarrow 0$ 在 $\mathcal{A}$ 中正合.

定义 7.9

设 $X_\bullet = (X_\bullet, d_\bullet)$ 是 $C(\mathcal{A})$ 中的一个复形.

- X_n 称为 n -chains (n -链)
- $Z_n(X_\bullet) = \text{Ker } d_n$ 称为 n -cycles (n -循环)
- $B_n(X_\bullet) = \text{Im } d_{n+1}$ 称为 n -boundaries (n -边界)

注意 $X_n, Z_n(X_\bullet), B_n(X_\bullet)$ 都是 $\mathcal{A}$ 中的对象.

类似地, 若 $X^\bullet = (X^\bullet, d^\bullet)$ 是一个上链复形, 则

- X^n 称为 n -cochains (n -上链)

- $Z^n(X^\bullet) = \text{Ker } d^n$ 称为 n -cocycles (n -上循环)
- $B^n(X^\bullet) = \text{Im } d^{n-1}$ 称为 n -coboundaries (n -上边界)



对 $C(\mathcal{A})$ 中的一个链复形 $X_\bullet$, 由于 $d_n d_{n+1} = 0$ 对所有 $n \in \mathbb{Z}$ 成立, 所以存在一个典范单态射 $B_n(X_\bullet) = \text{Im } d_{n+1} \hookrightarrow \text{Ker } d_n = Z_n(X_\bullet)$.

定义 7.10

$X_\bullet$ 的 n 次 homology (同调) 定义为 $H_n(X_\bullet) = Z_n(X_\bullet)/B_n(X_\bullet)$.

$X^\bullet$ 的 n 次 cohomology (上同调) 定义为 $H^n(X^\bullet) = Z^n(X^\bullet)/B^n(X^\bullet)$.



Lecture 8

回顾一下：设 $X : \cdots \rightarrow X_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} X_n \xrightarrow{d_n} X_{n-1} \rightarrow \cdots$ 是复形，我们记 $Z_n(X) = \text{Ker } d_n$, $B_n(X) = \text{Im } d_{n+1}$. 由于 $d_n d_{n+1} = 0$, 存在典范单态射 $B_n(X) \hookrightarrow Z_n(X)$, 从而我们定义 n 次同调为 $H_n(X) = Z_n(X)/B_n(X)$, 即该单态射的余核。

引理 8.1

设 $\mathcal{A}$ 是 Abelian 范畴，则对任意 $n \in \mathbb{Z}$, 函子 $H_n : C(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}, X \mapsto Z_n(X)/B_n(X)$ 是一个加法函子。



证明 设 $f : X \rightarrow Y$ 是 $C(\mathcal{A})$ 中的一个态射，考虑交换图

$$\begin{array}{ccccc} Z_n(X) & \xrightarrow{e_n^X} & X_n & \xrightarrow{d_n^X} & X_{n-1} \\ c_n(f) \downarrow & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} \\ Z_n(Y) & \xrightarrow{e_n^Y} & Y_n & \xrightarrow{d_n^Y} & Y_{n-1} \end{array}$$

因为 $d_n^Y f_n e_n^X = f_{n-1} d_n^X e_n^X = 0$, 故存在唯一态射 $c_n(f) : Z_n(X) \rightarrow Z_n(Y)$ 使得 $e_n^Y c_n(f) = f_n e_n^X$. 对另一个态射 $g : X \rightarrow Y$, 同样也存在唯一态射 $c_n(g) : Z_n(X) \rightarrow Z_n(Y)$ 使得 $e_n^Y c_n(g) = g_n e_n^X$. 以及对 $f + g$, 也存在唯一态射 $c_n(f + g) : Z_n(X) \rightarrow Z_n(Y)$ 使得 $e_n^Y c_n(f + g) = (f_n + g_n) e_n^X = f_n e_n^X + g_n e_n^X$. 于是 $e_n^Y (c_n(f) + c_n(g)) = e_n^Y c_n(f) + e_n^Y c_n(g) = f_n e_n^X + g_n e_n^X = (f_n + g_n) e_n^X = e_n^Y c_n(f + g)$. 由于 e_n^Y 是单态射，我们有 $c_n(f) + c_n(g) = c_n(f + g)$. 类似地，对于 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{f} Z$, 我们可以证明 $c_n(gf) = c_n(g)c_n(f)$.

$$\begin{array}{ccccccc} & & B_n(X) & \xrightarrow{a_n^X} & Z_n(X) & & \\ & & \searrow & & \downarrow e_n^X & & \\ & X_{n+1} & \xrightarrow{\iota_n^X} & X_n & \xrightarrow{d_n^X} & X_{n-1} & \\ & \downarrow f_{n+1} & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} & \\ & Y_{n+1} & \xrightarrow{\iota_n^Y} & Y_n & \xrightarrow{d_n^Y} & Y_{n-1} & \\ & \swarrow & & \uparrow e_n^Y & & & \\ & B_n(Y) & \xrightarrow{a_n^Y} & Z_n(Y) & & & \end{array}$$

(Note: In the original image, there are additional dashed arrows: a dashed arrow from $B_n(X)$ to $B_n(Y)$ labeled $b_n(f)$, and dashed arrows from $B_n(X)$ to $Z_n(X)$ and $B_n(Y)$ to $Z_n(Y)$ labeled a_n^X and a_n^Y respectively. There are also red dashed arrows from $Z_n(X)$ to $Z_n(Y)$ labeled $c_n(f)$.)

在上面的图表中我们有 $e_n^X a_n^X = \iota_n^X$, $e_n^Y a_n^Y = \iota_n^Y$. 以及 $f_n e_n^X = e_n^Y c_n(f)$, $f_n \iota_n^X = \iota_n^Y b_n(f)$. 这里 $b_n(f)$ 的存在性是利用 $\text{Coker}(d_{n+1}^X)$ 与 $\text{Coker}(d_{n+1}^Y)$ 的泛性质以及 $B_n(Y) = \text{Ker}(\text{Coker } d_{n+1}^Y)$ 得到的。因此我们有 $e_n^Y c_n(f) a_n^X = f_n e_n^X a_n^X = f_n \iota_n^X = \iota_n^Y b_n(f) = e_n^Y a_n^Y b_n(f)$. 由 e_n^Y 是单态射，我们有 $c_n(f) a_n^X = a_n^Y b_n(f)$. 于是有如下的交换图表：

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & B_n(X) & \xrightarrow{a_n^X} & Z_n(X) & \xrightarrow{\pi_n^X} & H_n(X) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow b_n(f) & & \downarrow c_n(f) & & \downarrow H_n(f) \\ 0 & \longrightarrow & B_n(Y) & \xrightarrow{a_n^Y} & Z_n(Y) & \xrightarrow{\pi_n^Y} & H_n(Y) \longrightarrow 0 \end{array}$$

其中 $H_n(f)$ 是由 $H_n(X)$ 作为余核 $\text{Coker}(a_n^X)$ 的泛性质得到的唯一的使图表交换的态射。

现在若 $g: X \rightarrow Y$ 是另一个链映射, 则由 $H_n(f)\pi_n^X = \pi_n^Y c_n(f)$, $H_n(g)\pi_n^X = \pi_n^Y c_n(g)$ 以及 $H_n(f+g)\pi_n^X = \pi_n^Y c_n(f+g)$, 我们有 $(H_n(f) + H_n(g))\pi_n^X = \pi_n^Y (c_n(f) + c_n(g)) = \pi_n^Y c_n(f+g) = H_n(f+g)\pi_n^X$. 由 π_n^X 满, 得 $H_n(f) + H_n(g) = H_n(f+g)$.

类似地, 对 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$, 有 $H_n(gf) = H_n(g)H_n(f)$. 最后, 直接验证 $H_n(\text{Id}_X) = \text{Id}_{H_n(X)}$.

一个复形 X 称为 **acyclic** (无同调的), 如果 $H_n(X) = 0$ 对任意 $n \in \mathbb{Z}$ 都成立. 这等价于说 X 在 $\mathcal{A}$ 中是一个正合列。

注 若考虑 $\mathcal{A} = \mathbf{Ab}$ 或 $\mathcal{A} = R\text{-Mod}$, 以及 $H_n: C(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}$, 那么对一个复形 X 有 $H_n(X) = Z_n(X)/B_n(X)$ 是 $\mathcal{A}$ 中的对象, 以及 $H_n(X)$ 中的元素是陪集 $x + B_n(X)$. 我们称此元素为一个 **homology class** (同调类), 常记为 $\text{cls}(x)$. 此时, 对链映射 $f: X \rightarrow Y$, 有 $H_n(f): H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$, $\text{cls}(x) \mapsto \text{cls}(f_n(x))$. 这个映射称为诱导映射, 常记为 f_{n*} , 或直接简记为 f_* .

定理 8.1 (同调代数基本定理)

设 $\mathcal{A}$ 是一个 Abelian 范畴, 若

$$0 \rightarrow X \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{p} Z \rightarrow 0$$

是 $C(\mathcal{A})$ 中的短正合列, 则存在 $\mathcal{A}$ 中的长正合列

$$\cdots \rightarrow H_n(X) \xrightarrow{i_*} H_n(Y) \xrightarrow{p_*} H_n(Z) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(X) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(Y) \rightarrow \cdots$$

其中 ∂_n 称为 **connecting morphism** (连接态射)。

并且 ∂_n 是自然的, 也就是说, 若在 $C(\mathcal{A})$ 中有交换图

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{i} & Y & \xrightarrow{p} & Z \longrightarrow 0 \\ & & f \downarrow & & g \downarrow & & h \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & X' & \xrightarrow{i'} & Y' & \xrightarrow{p'} & Z' \longrightarrow 0, \end{array}$$

则存在长正合列之间的交换图

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & H_n(X) & \xrightarrow{i_*} & H_n(Y) & \xrightarrow{p_*} & H_n(Z) & \xrightarrow{\partial_n} & H_{n-1}(X) & \xrightarrow{i_*} & H_{n-1}(Y) \longrightarrow \cdots \\ & & f_* \downarrow & & g_* \downarrow & & h_* \downarrow & & f_* \downarrow & & g_* \downarrow \\ \cdots & \longrightarrow & H_n(X') & \xrightarrow{i'_*} & H_n(Y') & \xrightarrow{p'_*} & H_n(Z') & \xrightarrow{\partial'_n} & H_{n-1}(X') & \xrightarrow{i'_*} & H_{n-1}(Y') \longrightarrow \cdots \end{array}$$

若 $\mathcal{A} = \mathbf{Ab}$, 则有 $\partial_n: H_n(Z) \rightarrow H_{n-1}(X)$, $\text{cls}(z) \mapsto \text{cls}(i_{n-1}^{-1} d_n^Y p_n^{-1}(z))$.



证明 我们断言: 若 $0 \rightarrow X \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{p} Z \rightarrow 0$ 是 $C(\mathcal{A})$ 中的短正合列, 则对每个 $n \in \mathbb{Z}$, 下图交换且两行正合:

$$\begin{array}{ccccccc} X_n/B_n(X) & \longrightarrow & Y_n/B_n(Y) & \longrightarrow & Z_n/B_n(Z) & \longrightarrow & 0 \\ \overline{d_n^X} \downarrow & & \overline{d_n^Y} \downarrow & & \overline{d_n^Z} \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & Z_{n-1}(X) & \longrightarrow & Z_{n-1}(Y) & \longrightarrow & Z_{n-1}(Z) \end{array}$$

于是由蛇引理可得正合列 $H_n(X) \rightarrow H_n(Y) \rightarrow H_n(Z) \rightarrow H_{n-1}(X) \rightarrow H_{n-1}(Y) \rightarrow H_{n-1}(Z)$. 把这些正合列拼接起来, 就得到所需的长正合列. 下面在 $\mathbf{Ab}$ 中证明这个断言. 交换性显

然。下面我们说明上行正合，在 $Z_n/B_n(Z)$ 处正合是容易验证的，接着说明 $X_n/B_n(X) \xrightarrow{\bar{i}_n} Y_n/B_n(Y) \xrightarrow{\bar{p}_n} Z_n/B_n(Z)$ 正合。对 $\bar{x} \in X_n/B_n(X)$ ，有 $\bar{p}_n \bar{i}_n(\bar{x}) = \overline{p_n i_n(x)} = 0$ ，故 $\text{Im } \bar{i}_n \subseteq \text{Ker } \bar{p}_n$ 。反过来，设 $\bar{y} \in Y_n/B_n(Y)$ 满足 $\bar{p}_n(\bar{y}) = \overline{p_n(y)} = 0$ ，则 $p_n(y) \in B_n(Z) = \text{Im } d_{n+1}^Z$ 。于是存在 $z' \in Z_{n+1}$ 使得 $d_{n+1}^Z(z') = p_n(y)$ 。又因为 p_{n+1} 满，故存在 $y' \in Y_{n+1}$ 使得 $p_{n+1}(y') = z'$ 。于是 $p_n d_{n+1}^Y(y') = d_{n+1}^Z p_{n+1}(y') = d_{n+1}^Z(z') = p_n(y)$ ，所以 $y - d_{n+1}^Y(y') \in \text{Ker } p_n = \text{Im } i_n$ 。故存在 $x \in X_n$ 使得 $i_n(x) = y - d_{n+1}^Y(y')$ 。于是 $\bar{i}_n \pi_n^X(x) = \pi_n^Y i_n(x) = \pi_n^Y(y - d_{n+1}^Y(y')) = \pi_n^Y(y) = \bar{y}$ 。故 $\text{Ker } \bar{p}_n \subseteq \text{Im } \bar{i}_n$ 。于是上行正合。

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & X_{n+1} & \xrightarrow{i_{n+1}} & Y_{n+1} & \xrightarrow{p_{n+1}} & Z_{n+1} \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow d_{n+1}^X & & \downarrow d_{n+1}^Y & & \downarrow d_{n+1}^Z \\
0 & \longrightarrow & X_n & \xrightarrow{i_n} & Y_n & \xrightarrow{p_n} & Z_n \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow \pi_n^X & & \downarrow \pi_n^Y & & \downarrow \pi_n^Z \\
& & X_n/B_n(X) & \xrightarrow{\bar{i}_n} & Y_n/B_n(Y) & \xrightarrow{\bar{p}_n} & Z_n/B_n(Z) \longrightarrow 0
\end{array}$$

∂_n 的自然性：设 $z \in Z_n(Z)$, $y \in Y_n$, $x \in X_{n-1}$ 满足 $p_n(y) = z$, $i_{n-1}(x) = d_n^Y(y)$ ，则 $\partial_n(\text{cls}(z)) = \text{cls}(x)$ 。而 $h_n(z) = p'_n g_n(y)$ ，由 $p'_{n-1} d_n^{Y'} g_n(y) = d_n^{Z'} p'_n g_n(y) = d_n^{Z'} h_n(z) = h_{n-1} d_n^Z(z) = 0$ ，则存在 $x' \in X'_{n-1}$ 使得 $i'_{n-1}(x') = d_n^{Y'}(g_n(y))$ ，于是 $\partial'_n(\text{cls}(h_n(z))) = \text{cls}(x')$ 。从而由 $i'_{n-1} f_{n-1}(x) = g_{n-1} i_{n-1}(x) = g_{n-1} d_n^Y(y) = d_n^{Y'} g_n(y) = i'_{n-1}(x')$ 以及 i'_{n-1} 单，得到 $f_{n-1}(x) = x'$ 。

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & X_n & \longrightarrow & Y_n & \longrightarrow & Z_n \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & \swarrow & \downarrow & \swarrow & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & X_{n-1} & \longrightarrow & Y_{n-1} & \longrightarrow & Z_{n-1} \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & \swarrow & \downarrow & \swarrow & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & X'_n & \longrightarrow & Y'_n & \longrightarrow & Z'_n \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & \swarrow & \downarrow & \swarrow & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & X'_{n-1} & \longrightarrow & Y'_{n-1} & \longrightarrow & Z'_{n-1} \longrightarrow 0
\end{array}$$

注 更加详细完整的证明可以参考同调代数基本定理证明的完整细节。

定义 8.1

设 X, Y 是复形，对 $p \in \mathbb{Z}$ ，一个 degree p (次数为 p) 的映射 $s : X \rightarrow Y$ 是指一系列态射 $s_n : X_n \rightarrow Y_{n+p}, \forall n \in \mathbb{Z}$ 。



例 8.1

链映射是次数为 0 的映射，一个复形 X 的微分 $d : X \rightarrow X$ 是次数为 -1 的映射。



定义 8.2

(1) 一个链映射 $f : X \rightarrow Y$ 称为 quasi-isomorphism (拟同构)，如果对任意 $n \in \mathbb{Z}$ ，诱导映射 $f_{n*} : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$ 都是 $\mathcal{A}$ 中的同构。

(2) 两个链映射 $f, g : X \rightarrow Y$ 称为 homotopic (同伦的)，记作 $f \simeq g$ ，如果存在一个次数为 $+1$ 的映射 $s = \{s_n\} : X \rightarrow Y$ ，使得对任意 $n \in \mathbb{Z}$ 都有 $f_n - g_n = d_{n+1}^Y s_n + s_{n-1} d_n^X$ 。用

交换图表表示如下：

$$\begin{array}{ccccccc}
 \longrightarrow & X_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}^X} & X_n & \xrightarrow{d_n^X} & X_{n-1} & \longrightarrow \\
 & \downarrow f_{n+1} & \swarrow s_n & \downarrow f_n & \swarrow s_{n-1} & \downarrow f_{n-1} & \\
 \longrightarrow & Y_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}^Y} & Y_n & \xrightarrow{d_n^Y} & Y_{n-1} & \longrightarrow
 \end{array}$$



一个链映射 $f: X \rightarrow Y$ 称为 **null-homotopic** (零同伦的), 如果 $f \simeq 0$.

注 在 $C(\mathcal{A})$ 中, 同构则一定是拟同构, 但逆命题一般不成立。

例如在 $R\text{-Mod}$ 中, 设 $0 \rightarrow X_1 \xrightarrow{\iota} X_0 \xrightarrow{\pi} Y \rightarrow 0$ 是一个短正合列。考虑链映射

$$\begin{array}{ccccccc}
 X_\bullet: & \cdots & \longrightarrow & X_1 & \xrightarrow{\iota} & X_0 & \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \\
 f \downarrow & & & \downarrow & & \downarrow \pi & \downarrow \\
 Y_\bullet: & \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & Y & \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots
 \end{array}$$

则 f 是拟同构, 但不是同构。

命题 8.1

同伦的链映射诱导相同的同调映射。也就是说, 若 $f, g: X \rightarrow Y$ 是链映射且 $f \simeq g$, 则对任意 $n \in \mathbb{Z}$, 有 $f_{n*} = g_{n*}: H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$.



证明 任取 $x \in Z_n(X)$, 则 $f_n(x) - g_n(x) = (f_n - g_n)(x) = d_{n+1}^Y s_n(x) + s_{n-1} d_n^X(x) = d_{n+1}^Y s_n(x) \in B_n(Y)$. 故 $\text{cls}(f_n(x)) = \text{cls}(g_n(x))$, 从而 $f_{n*} = g_{n*}$.

定义 8.3 (可缩复形)

一个复形 X 称为 **contractible** (可缩的), 如果它的恒等映射 Id_X 是零同伦的。



命题 8.2

一个可缩复形一定是无同调的。



证明 因为 $\text{Id}_X \simeq 0$, 由上一个命题可知对任意 $n \in \mathbb{Z}$, 有 $(\text{Id}_X)_{n*} = 0$. 但 $(\text{Id}_X)_{n*} = \text{Id}_{H_n(X)}$, 故 $\text{Id}_{H_n(X)} = 0$, 于是 $H_n(X) = 0$. 所以 X 无同调。

Lecture 9

Resolutions (分解, 解消, 消解)

几何相关的内容可追溯到奇点的研究, 例如 blowing up of singularities (奇点爆破)。代数上, 设 M 是一个 R -模, 则存在满同态 $F \rightarrow M$, 其中 F 是自由模。若 A 是 F 的一组 R -基, B 是 $K = \text{Ker}(F \rightarrow M)$ 的一组生成元, 则称 (A, B) 是 M 的一个 presentation (展示)。它允许我们把 M 中的关系当作自由模中的方程来处理。

当 K 也是自由模时, 在 F 中的计算会简单得多, 这时 B 也可以看成 K 的一组 R -基。一般地, K 未必是自由的, 因此自然会反复进行同样的步骤: 取一个自由模 F_1 满射到 K 上, 并令 (A_1, B_1) 是 K 的一个展示, 若 $\text{Ker}(F_1 \rightarrow K)$ 是自由的, 我们就停止; 若不是, 则继续。按照这个思想, M 的一个 free resolution (自由消解) 就是展示的一般化。

注 若 $R = k[x_1, \dots, x_n]$, 其中 k 是一个域, 则经过有限次迭代后, 我们有 $\text{Ker}(F_n \rightarrow K)$ 是自由的。这就是 Hilbert's theorem on syzygies.

定义 9.1 (投射分解)

设 $\mathcal{A}$ 是 Abelian 范畴, 设 $A \in \text{Ob } \mathcal{A}$.

- 一个 A 上的 left complex (左复形) 是一个复形 $X = (X_{\geq 0}, d_{\geq 0})$, 再配上一个链映射 $\varepsilon: X \rightarrow A$, 这里视 A 为复形 $\cdots \rightarrow 0 \rightarrow A \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$, 以及 $X_0 \rightarrow A$, 并且称 ε 为 augmentation (增广)。
- 一个 A 上的左复形 X 称为 projective (投射的), 如果对每个 $i \in \mathbb{Z}$, 都有 X_i 是投射对象。
- 一个 A 上的左复形 X 称为 left resolution (左消解), 如果序列 $\cdots \rightarrow X_n \rightarrow \cdots \rightarrow X_1 \rightarrow X_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \rightarrow 0$ 正合, 这等价于 ε 是拟同构, 记作 $X \xrightarrow{\varepsilon} A \rightarrow 0$ 。
- 一个 A 上的左复形 X 称为 projective resolution (投射消解), 如果 X 既是投射的又是左消解。



定义 9.2 (内射分解)

设 $\mathcal{A}$ 是 Abelian 范畴, $A \in \text{Ob } \mathcal{A}$.

- 一个 A 上的 right complex (右复形) 是一个复形 $X = (X^{\geq 0}, d^{\geq 0})$, 再配上一个链映射 $\varepsilon: A \rightarrow X$, 以及 $A \rightarrow X_0$, 称 ε 为增广。
- 一个 A 上的右复形 X 称为 injective (内射的), 如果对每个 $i \in \mathbb{Z}$, 都有 X^i 是内射对象。
- 一个 A 上的右复形 X 称为 right resolution (右消解), 如果序列 $0 \rightarrow A \xrightarrow{\varepsilon} X^0 \rightarrow X^1 \rightarrow \cdots$ 正合, 这等价于 ε 是拟同构, 记作 $0 \rightarrow A \xrightarrow{\varepsilon} X$ 。
- 一个 A 上的右复形 X 称为 injective resolution (内射消解), 如果 X 既是内射的又

是右消解。



例 9.1

设 $k = \mathbb{C}$.

(1) 若 $R = k[x]$, $M = k[x]/(x^2)$, 则一个投射消解为

$$0 \rightarrow R \xrightarrow{x^2} R \rightarrow k[x]/(x^2) \rightarrow 0.$$

(2) 若 $R = k[x]/(x^2)$, $M = {}_R k$, 则一个投射消解为

$$\cdots \rightarrow R \xrightarrow{x} R \xrightarrow{x} R \rightarrow k \rightarrow 0.$$

(3) 若 $R = k\langle x, y \rangle / (yx - \lambda xy)$, 其中 $0 \neq \lambda \in k$, $M = {}_R k$, 则一个投射消解为

$$0 \rightarrow R \xrightarrow{d_2} R^{\oplus 2} \xrightarrow{d_1} R \rightarrow {}_R k \rightarrow 0.$$

其中 $d_1 = (x, y)$, $d_2 = (-\lambda y, x)^\top$.



例 9.2

设 $R = \mathbb{Z}$, $M = {}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}$, 则一个内射消解为 $0 \rightarrow {}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow 0$ (考虑引理 4.1).



引理 9.1

(1) 若 Abelian 范畴 $\mathcal{A}$ 有足够多的投射对象, 则每个对象 $A \in \text{Ob } \mathcal{A}$ 都有一个投射消解。

(2) 若 Abelian 范畴 $\mathcal{A}$ 有足够多的内射对象, 则每个对象 $A \in \text{Ob } \mathcal{A}$ 都有一个内射消解。



定义 9.3

(1) 给定 Abelian 范畴 $\mathcal{A}$ 中对象 A 的一个投射消解 $P \xrightarrow{\varepsilon} A \rightarrow 0$, 也即

$$\cdots \rightarrow P_n \rightarrow \cdots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \rightarrow 0,$$

定义 $K_0 = \text{Ker } \varepsilon$, 对 $n \geq 1$ 定义 $K_n = \text{Ker } d_n$. 我们称 K_n 为 P 的第 n 个 syzygy.

(2) 给定 Abelian 范畴 $\mathcal{A}$ 中对象 A 的一个内射消解 $0 \rightarrow A \xrightarrow{\varepsilon} Q$, 也即

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{\varepsilon} Q^0 \rightarrow Q^1 \rightarrow \cdots \rightarrow Q^n \rightarrow \cdots,$$

定义 $C^0 = \text{Coker } \varepsilon$, 对 $n \geq 1$ 定义 $C^n = \text{Coker } d^{n-1}$. 我们称 C^n 为 Q 的第 n 个 cosyzygy.



定义 9.4

设 $f: A \rightarrow A'$ 是 Abelian 范畴中的一个态射, X, X' 分别是 A, A' 上的左复形, 且增广分别为 $\varepsilon, \varepsilon'$. 若链映射 $\tilde{f}: X \rightarrow X'$ 满足 $\varepsilon' \tilde{f} = f \varepsilon$, 也就是说下图交换:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\tilde{f}} & X' \\ \varepsilon \downarrow & & \downarrow \varepsilon' \\ A & \xrightarrow{f} & A' \end{array}$$

则称 $\tilde{f}$ 是一个 over f 的链映射。



定理 9.1 (comparison theorem, 比较定理)

设 $\mathcal{A}$ 是 Abelian 范畴, $f: A \rightarrow A'$ 是 $\mathcal{A}$ 中的一个态射, X 是 A 上的一个带增广 ε 的投射左复形, X' 是 A' 上的一个带增广 ε' 的左消解。则存在一个 over f 的链映射 $\check{f}: X \rightarrow X'$, 并且任意两个这样的链映射彼此同伦。



证明 我们在 $\mathcal{A} = \mathbf{Ab}$ 中证明该定理。先证存在性, 对 $n \geq 0$ 作归纳。当 $n = 0$ 时, 由 ε' 满且 X_0 投射, 存在 $\check{f}_0: X_0 \rightarrow X'_0$ 使得 $\varepsilon' \check{f}_0 = f \varepsilon$, 也就是下图交换

$$\begin{array}{ccc} & X_0 & \\ \check{f}_0 \swarrow & \downarrow f\varepsilon & \\ X'_0 & \xrightarrow{\varepsilon'} & A' \longrightarrow 0 \end{array}$$

我们令 $\check{f}_{-1} = f, d_0 = \varepsilon, d'_0 = \varepsilon', X_{-1} = A, X'_{-1} = A'$, 现在设 $\check{f}_{n-1}, \check{f}_n$ 已经构造好, 并且满足 $d'_n \check{f}_n = \check{f}_{n-1} d_n$. 考虑交换:

$$\begin{array}{ccccc} X_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}} & X_n & \xrightarrow{d_n} & X_{n-1} \\ & & \downarrow \check{f}_n & & \downarrow \check{f}_{n-1} \\ X'_{n+1} & \xrightarrow{d'_{n+1}} & X'_n & \xrightarrow{d'_n} & X'_{n-1} \end{array}$$

则 $d'_n \check{f}_n d_{n+1} = \check{f}_{n-1} d_n d_{n+1} = 0$. 所以 $\text{Im}(\check{f}_n d_{n+1}) \subseteq \text{Ker } d'_n = \text{Im } d'_{n+1}$. 于是可考虑

$$\begin{array}{ccc} & X_{n+1} & \\ \check{f}_{n+1} \swarrow & \downarrow \check{f}_n d_{n+1} & \\ X'_{n+1} & \xrightarrow{d'_{n+1}} & \text{Im } d'_{n+1} \longrightarrow 0 \end{array}$$

由于 d'_{n+1} 满且 X_{n+1} 投射, 存在 $\check{f}_{n+1}: X_{n+1} \rightarrow X'_{n+1}$ 使得 $d'_{n+1} \check{f}_{n+1} = \check{f}_n d_{n+1}$. 归纳即证。

再证同伦意义下唯一, 设 $h: X \rightarrow X'$ 是另一个满足 $\varepsilon' h = f \varepsilon$ 的链映射。我们归纳地构造一个同伦 $s_n: X_n \rightarrow X'_{n+1}$, 使得对 $n \geq 0$ 有 $h_n - \check{f}_n = d'_{n+1} s_n + s_{n-1} d_n$. 当 $n = 0$ 时, 取 $s_{-1} = 0$. 由 $\varepsilon'(h_0 - \check{f}_0) = \varepsilon' h_0 - \varepsilon' \check{f}_0 = f \varepsilon - f \varepsilon = 0$, 可得 $\text{Im}(h_0 - \check{f}_0) \subseteq \text{Ker } \varepsilon' = \text{Im } d'_1$. 考虑

$$\begin{array}{ccc} & X_0 & \\ s_0 \swarrow & \downarrow h_0 - \check{f}_0 & \\ X'_1 & \xrightarrow{d'_1} & \text{Im } d'_1 \longrightarrow 0 \end{array}$$

由 X_0 投射, 且 $d'_1: X'_1 \rightarrow \text{Im } d'_1$ 满, 存在 $s_0: X_0 \rightarrow X'_1$ 使得 $d'_1 s_0 = h_0 - \check{f}_0$. 假设 s_{n-1}, s_n 已构造, 则由归纳假设 $d'_{n+1}(h_{n+1} - \check{f}_{n+1} - s_n d_{n+1}) = d'_{n+1}(h_{n+1} - \check{f}_{n+1}) - d'_{n+1} s_n d_{n+1} = d'_{n+1}(h_{n+1} - \check{f}_{n+1}) - (h_n - \check{f}_n - s_{n-1} d_n) d_{n+1} = d'_{n+1}(h_{n+1} - \check{f}_{n+1}) - (h_n - \check{f}_n) d_{n+1} = (d'_{n+1} h_{n+1} - h_n d_{n+1}) - (d'_{n+1} \check{f}_{n+1} - \check{f}_n d_{n+1}) = 0$. 于是 $\text{Im}(h_{n+1} - \check{f}_{n+1} - s_n d_{n+1}) \subseteq \text{Ker } d'_{n+1} = \text{Im } d'_{n+2}$. 考虑

$$\begin{array}{ccc} & X_{n+1} & \\ s_{n+1} \swarrow & \downarrow h_{n+1} - \check{f}_{n+1} - s_n d_{n+1} & \\ X'_{n+2} & \xrightarrow{d'_{n+2}} & \text{Im } d'_{n+2} \longrightarrow 0 \end{array}$$

由于 X_{n+1} 投射, 存在 $s_{n+1}: X_{n+1} \rightarrow X'_{n+2}$ 使得 $d'_{n+2} s_{n+1} = h_{n+1} - \check{f}_{n+1} - s_n d_{n+1}$. 而这等价于

$h_{n+1} - \check{f}_{n+1} = d'_{n+2}s_{n+1} + s_nd_{n+1}$. 故 $h \simeq \check{f}$.

注 比较定理的对偶结论也成立。也就是说, 若 $0 \rightarrow A \rightarrow X^0 \rightarrow X^1 \rightarrow \dots$ 是一个内射右复形, 而 $0 \rightarrow A' \rightarrow X'^0 \rightarrow X'^1 \rightarrow \dots$ 是一个右消解, 则在给定 $f: A' \rightarrow A$ 时, 也存在 **over** f 的链映射 $\check{f}: X' \rightarrow X$, 且在同伦意义下唯一。

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & X^0 & \longrightarrow & X^1 \longrightarrow \dots \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & X'^0 & \longrightarrow & X'^1 \longrightarrow \dots \end{array}$$

Lecture 10

命题 10.1 (commutativity of H_n and exact functors)

- (1) 设 $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ 是 Abelian 范畴之间的一个正合函子, 且 X 是 $\mathcal{A}$ 中的一个复形, 则 FX 是 $\mathcal{A}'$ 中的一个复形, 且对任意 $n \in \mathbb{Z}$ 有 $H_n(FX) \cong F(H_n(X))$.
- (2) 设 $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ 是 Abelian 范畴之间的一个正合反变函子, 且 X 是 $\mathcal{A}$ 中的一个复形, 则 FX 是 $\mathcal{A}'$ 中的一个上链复形, 且对任意 $n \in \mathbb{Z}$ 有 $H^n(FX) \cong F(H_n(X))$.



证明 由 F 正合, 则其保持子对象与商对象 (在同构意义下). 故 $H_n(FX) = \text{Ker } Fd_n / \text{Im } Fd_{n+1} \cong F(\text{Ker } d_n / \text{Im } d_{n+1}) = F(H_n(X))$. 反变情形同理。

引理 10.1 (Horseshoe lemma, 马蹄引理)

设 $\mathcal{A}$ 是一个有足够多的投射对象的 Abelian 范畴, 以及 $0 \rightarrow A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A'' \rightarrow 0$ 是 $\mathcal{A}$ 中的一个短正合列。若 $P' \xrightarrow{\varepsilon'} A' \rightarrow 0$ 与 $P'' \xrightarrow{\varepsilon''} A'' \rightarrow 0$ 分别是 A' 与 A'' 的投射消解, 则存在 A 的一个投射消解 $P \xrightarrow{\varepsilon} A \rightarrow 0$, 满足对任意 $n \geq 0$ 有 $P_n = P'_n \oplus P''_n$, 且下图表交换:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & P' & \xrightarrow{\tilde{f}} & P & \xrightarrow{\tilde{g}} & P'' \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A'' \longrightarrow 0 \end{array}$$

同时图中链映射 $\tilde{f}: P' \rightarrow P$ 与 $\tilde{g}: P \rightarrow P''$ 分别 over f, g , 并使得 $0 \rightarrow P' \xrightarrow{\tilde{f}} P \xrightarrow{\tilde{g}} P'' \rightarrow 0$ 是分裂正合的, 也就是说, 对每个 $n \in \mathbb{Z}$, 都有 $0 \rightarrow P'_n \rightarrow P_n \rightarrow P''_n \rightarrow 0$ 分裂正合。



证明 我们在 $\mathcal{A} = \mathbf{Ab}$ 中证明, 对 $n \geq 0$ 作归纳, 当 $n = 0$ 时, 考虑构造如下的交换图表:

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & K'_0 & \dashrightarrow & K_0 & \dashrightarrow & K''_0 \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & P'_0 & \xrightarrow{\tilde{f}_0} & P_0 & \xrightarrow{\tilde{g}_0} & P''_0 \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \varepsilon' & & \downarrow \varepsilon & \nearrow \sigma & \downarrow \varepsilon'' \\ 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A'' \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

定义 $P_0 = P'_0 \oplus P''_0$. 则由 P'_0 和 P''_0 投射可知 P_0 投射。定义 $\tilde{f}_0: P'_0 \rightarrow P_0$ 为 $x' \mapsto (x', 0)$ 以及 $\tilde{g}_0: P_0 \rightarrow P''_0$ 为 $(x', x'') \mapsto x''$, 则 $0 \rightarrow P'_0 \rightarrow P_0 \rightarrow P''_0 \rightarrow 0$ 在 $\mathcal{A}$ 中分裂正合。

由于 P''_0 投射, 存在 $\sigma: P''_0 \rightarrow A$ 使得 $g\sigma = \varepsilon''$. 定义 $\varepsilon: P_0 \rightarrow A$ 为 $(x', x'') \mapsto f\varepsilon'(x') + \sigma(x'')$. 由五引理可知 ε 满。再令 $K'_0 = \text{Ker } \varepsilon', K_0 = \text{Ker } \varepsilon, K''_0 = \text{Ker } \varepsilon''$, 则得到一个正合列 $0 \rightarrow K'_0 \rightarrow$

$K_0 \rightarrow K''_0 \rightarrow 0$ 使得上方的图表交换，其中正合性的验证是常规的。

归纳步中，考虑构造如下的交换图表：

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & K'_{n+1} & \dashrightarrow & K_{n+1} & \dashrightarrow & K''_{n+1} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & P'_{n+1} & \dashrightarrow & P_{n+1} & \dashrightarrow & P''_{n+1} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow d'_{n+1} & & \downarrow d_{n+1} & & \downarrow d''_{n+1} \\
 0 & \longrightarrow & K'_n & \longrightarrow & K_n & \longrightarrow & K''_n \longrightarrow 0
 \end{array}$$

其中 $K_n = \text{Ker}(P_n \rightarrow P_{n-1})$, $K'_n = \text{Ker } d'_n$, $K''_n = \text{Ker } d''_n$. 我们仿照 $n=0$ 时的构造，取 $P_{n+1} = P'_{n+1} \oplus P''_{n+1}$ ，并定义 $d_{n+1} : P_{n+1} \rightarrow K_n$ ，便可得到正合列 $0 \rightarrow K'_{n+1} \rightarrow K_{n+1} \rightarrow K''_{n+1} \rightarrow 0$ 使得上方的图表交换。这样就完成了证明。

Derived functors (导出函子)

Derived functors (导出函子) 有如下几个作用与特点：

- 正合性的缺失和测量

比如若 $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ 是左正合函子，而 $0 \rightarrow A' \rightarrow A \rightarrow A'' \rightarrow 0$ 是 $\mathcal{A}$ 中的正合列，则 $0 \rightarrow FA' \rightarrow FA \rightarrow FA''$ 正合。引入右导出函子 $R^i F$ 后，可得到长正合列

$$0 \rightarrow FA' \rightarrow FA \rightarrow FA'' \rightarrow (R^1 F)A' \rightarrow (R^1 F)A \rightarrow (R^1 F)A'' \rightarrow (R^2 F)A' \rightarrow \dots$$

它衡量了 F 不正合的程度。

- 提供了重要的不变量

如 Hom 的右导出函子 Ext 和 $\otimes$ 的左导出函子 Tor 给出了代数学中非常重要的不变量。

- 非常不好算

定义 10.1 (left derived functors)

设 $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ 是 Abelian 范畴之间的一个加法函子，且 $\mathcal{A}$ 有足够多的投射对象。定义 F 的 left derived functors (左导出函子) $L_n F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}, n \in \mathbb{Z}$ 如下：

objects: 对 $A \in \mathcal{A}$ ，取一个投射消解 $P \xrightarrow{\varepsilon} A \rightarrow 0$ ，定义 $(L_n F)A = H_n(FP)$.

morphisms: 对态射 $f : A \rightarrow A'$ ，取 A, A' 的投射消解 $P \xrightarrow{\varepsilon} A \rightarrow 0$ 与 $P' \xrightarrow{\varepsilon'} A' \rightarrow 0$. 由比较定理，存在一个链映射 $\check{f} : P \rightarrow P'$ over f . 于是 $F\check{f} : FP \rightarrow FP'$ 也是一个链映射，定义 $(L_n F)f = H_n(F\check{f}) = (F\check{f})_{n*}$. 若在 $\mathbf{Ab}$ 中看待它，则 $(L_n F)f : \text{cls}(x) \mapsto \text{cls}((F\check{f})_n(x))$. 

定理 10.1

设 $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ 是 Abelian 范畴之间的加法函子，且 $\mathcal{A}$ 有足够多的投射对象，而 $L_n F$ 如上定义。则有：

(1) 若 $X \xrightarrow{\delta} A \rightarrow 0$ 是 A 的另一个投射消解, 则 $(L_n F)A \cong H_n(FX)$.

(2) 对任意 $n \in \mathbb{Z}$, 都有 $L_n F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ 是一个加法函子。



证明 (1) 设 $P \xrightarrow{\varepsilon} A \rightarrow 0$ 与 $X \xrightarrow{\delta} A \rightarrow 0$ 是 A 的两个投射消解。则由比较定理, 存在链映射 $\theta: P \rightarrow X$ 与 $\tau: X \rightarrow P$ 都 over Id_A . 则 $\tau\theta$ 和 $\theta\tau$ 也都是 over Id_A 的链映射, 而由 Id_P 与 Id_A 都是 over Id_A 的链映射, 故又由比较定理可得 $\tau\theta \simeq \text{Id}_P, \theta\tau \simeq \text{Id}_X$. 因为 F 是加法函子, 所以 $F(\tau\theta) \simeq F(\text{Id}_P) = \text{Id}_{FP}, F(\theta\tau) \simeq F(\text{Id}_X) = \text{Id}_{FX}$. 于是有 $H_n(F(\tau\theta)) = \text{Id}_{H_n(FP)}, H_n(F(\theta\tau)) = \text{Id}_{H_n(FX)}$. 则 $H_n(F\tau), H_n(F\theta)$ 互为逆同构, 从而 $(L_n F)A = H_n(FP) \cong H_n(FX)$. (2) 若 $h: P \rightarrow P'$ 是另一个 $\text{over } f$ 的链映射, 则由比较定理有 $\check{f} \simeq h$, 于是 $F\check{f} \simeq Fh$, 从而 $H_n(F\check{f}) = H_n(Fh)$. 因此 $L_n F$ 在态射上的定义是良定的。对另一个态射 $g: A \rightarrow A'$, 若 $\check{g}: P \rightarrow P'$ $\text{over } g$, 则 $\check{f} + \check{g} \text{ over } f + g$, 故 $(L_n F)(f + g) = H_n(F(\check{f} + \check{g})) = H_n(F\check{f}) + H_n(F\check{g}) = (L_n F)f + (L_n F)g$. 故 $L_n F$ 是加法函子。

推论 10.1

若 A 投射, 则当 $n \geq 1$ 时有 $(L_n F)A = 0$. (可取 $P_0 = A, P_n = 0 (n \geq 1)$ 作为投射消解)



定义 10.2 (right derived functors)

设 $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ 是 Abelian 范畴之间的加法函子, 且 $\mathcal{A}$ 有足够多的内射对象。定义 F 的 right derived functors (右导出函子) $R^n F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}, n \in \mathbb{Z}$ 如下:

objects: 对 $A \in \mathcal{A}$, 取一个内射消解 $0 \rightarrow A \rightarrow Q$, 定义 $(R^n F)A = H^n(FQ)$.

morphisms: 对态射 $f: A \rightarrow A'$, 取内射消解 $0 \rightarrow A \rightarrow Q$ 与 $0 \rightarrow A' \rightarrow Q'$. 由比较定理的对偶形式, 存在一个链映射 $\check{f}: Q \rightarrow Q'$ $\text{over } f$, 从而 $F\check{f}: FQ \rightarrow FQ'$ 是 $\text{over } Ff$ 的链映射, 定义 $(R^n F)f = H^n(F\check{f}) = (F\check{f})_{n*}$.



定理 10.2

(1) 若 $0 \rightarrow A \rightarrow X$ 是 A 的另一个内射消解, 则 $(R^n F)A \cong H^n(FX)$.

(2) 对任意 $n \in \mathbb{Z}$, 都有 $R^n F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ 是一个加法函子。



相应地, 对于 Abelian 范畴之间的反变加法函子, 我们有如下定义:

- 反变加法函子 F 的左导出函子: 对内射消解 $0 \rightarrow A \rightarrow Q$, 定义

$$(L_n F)A = H_n(FQ) = \frac{\text{Ker } Fd^{n-1}}{\text{Im } Fd^n}.$$

- 反变加法函子 F 的右导出函子: 对投射消解 $P \rightarrow A \rightarrow 0$, 定义

$$(R^n F)A = H_n(FP) = \frac{\text{Ker } Fd_{n+1}}{\text{Im } Fd_n}.$$

注 对于一个右复形

$$0 \rightarrow Q^0 \xrightarrow{d^0} Q^1 \xrightarrow{d^1} Q^2 \rightarrow \cdots Q^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} Q^n \xrightarrow{d^n} Q^{n+1} \rightarrow \cdots$$

应用一个反变函子 F 后再重新编号就可以把原来的右复形变换为一个左复形。具体来说即为

如下的图表:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & FQ^{n+1} & \xrightarrow{Fd^n} & FQ^n & \xrightarrow{Fd^{n-1}} & FQ^{n-1} & \longrightarrow & \cdots & \xrightarrow{Fd^1} & FQ^1 & \xrightarrow{Fd^0} & FQ^0 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & & & \parallel & & \parallel & & \\
 \cdots & \longrightarrow & X_{n+1} & \longrightarrow & X_n & \longrightarrow & X_{n-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & X_1 & \longrightarrow & X_0 & &
 \end{array}$$

The Tor

定义 10.3

(1) 设 R 是一个环, ${}_R N$ 是左 R -模, 而 $F = - \otimes_R N : \mathbf{Mod}\text{-}R \rightarrow \mathbf{Ab}$. 定义 $\mathrm{Tor}_n^R(-, N) = L_n F$. 特别地, 若 M_R 是右 R -模, $P = (P_i, d_i) \rightarrow M \rightarrow 0$ 是一个投射消解, 则

$$\mathrm{Tor}_n^R(M, N) = H_n(P \otimes_R N) = \frac{\mathrm{Ker}(d_n \otimes \mathrm{Id}_N)}{\mathrm{Im}(d_{n+1} \otimes \mathrm{Id}_N)}.$$

(2) 设 M_R 是右 R -模, 而 $F = M \otimes_R - : R\text{-}\mathbf{Mod} \rightarrow \mathbf{Ab}$. 定义 $\mathrm{tor}_n^R(M, -) = L_n F$. 特别地, 若 ${}_R N$ 是左 R -模, $P = (P_i, d_i) \rightarrow N \rightarrow 0$ 是一个投射消解, 则

$$\mathrm{tor}_n^R(M, N) = H_n(M \otimes_R P) = \frac{\mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_M \otimes d_n)}{\mathrm{Im}(\mathrm{Id}_M \otimes d_{n+1})}.$$



注 以后我们会证明 $\mathrm{Tor}_n^R(M, N) \cong \mathrm{tor}_n^R(M, N)$!

命题 10.2

设 $\mathcal{A}$ 是一个有足够多的投射对象的 Abelian 范畴, 设 $A \in \mathrm{Ob} \mathcal{A}$, 且 $P : \cdots \xrightarrow{d_{n+1}} P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \rightarrow 0$ 是 A 的一个投射消解, 其增广为 $\varepsilon : P \rightarrow A$. 令 K_n 是 P 的第 n 个 syzygy, 即 $K_0 = \mathrm{Ker} \varepsilon$, $K_n = \mathrm{Ker} d_n, n \geq 1$. 则有 $(L_{n+1}F)A \cong (L_n F)K_0 \cong (L_{n-1}F)K_1 \cong \cdots \cong (L_1 F)K_{n-1}$. 进一步若 F 右正合, 则 $(L_1 F)A = \mathrm{Ker} F\sigma_0, (L_{n+1}F)A = \mathrm{Ker} F\sigma_n, n \geq 0$, 其中 $\sigma_n : K_n \hookrightarrow P_n$.



证明 对 $K_0 = \mathrm{Ker} \varepsilon = \mathrm{Im} d_1$, 则有

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & X_n & \xrightarrow{\delta_n = d_{n+1}} & \cdots & \longrightarrow & X_1 & \xrightarrow{\delta_1 = d_2} & X_0 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \parallel & & & & \parallel & & \parallel & & \\
 & & P_{n+1} & & & & P_2 & & P_1 & &
 \end{array}$$

是 K_0 的一个投射消解, 且其增广为 $X_0 \xrightarrow{\tilde{d}_1} K_0$. 于是我们有

$$(L_n F)K_0 = H_n(FX) = \frac{\mathrm{Ker} F\delta_n}{\mathrm{Im} F\delta_{n+1}} = \frac{\mathrm{Ker} Fd_{n+1}}{\mathrm{Im} Fd_{n+2}} = H_{n+1}(FP) = (L_{n+1}F)A.$$

其余的同构可归纳得到. 对于最后一条, 可利用如下的事实:

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \Rightarrow \mathrm{Ker} \bar{g} \cong \frac{\mathrm{Ker}(gf)}{\mathrm{Ker} f}.$$

其中 $\bar{g} : X/\mathrm{Ker} f \rightarrow Z$ 为 g 在 $\mathrm{Im} f \cong X/\mathrm{Ker} f$ 上的限制. 注意到 $\mathrm{Ker} Fd_1 = \mathrm{Ker} F(\sigma_0 \tilde{d}_1)$ 以及 $\mathrm{Ker} Fd_{n+1} = \mathrm{Ker} F(\sigma_n \tilde{d}_{n+1})$, 利用增广的满性和上面的事实即可得到结论.

定理 10.3

给定一个行正合的右 R -模交换图表：

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{i} & M & \xrightarrow{p} & M'' \longrightarrow 0 \\ & & f \downarrow & & g \downarrow & & h \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & T' & \xrightarrow{j} & T & \xrightarrow{q} & T'' \longrightarrow 0. \end{array}$$

则对任意左 R -模 ${}_R N$ ，存在一个行正合的交换图表：

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots \longrightarrow & \mathrm{Tor}_n^R(M', N) & \longrightarrow & \mathrm{Tor}_n^R(M, N) & \longrightarrow & \mathrm{Tor}_n^R(M'', N) & \xrightarrow{\partial_n} \mathrm{Tor}_{n-1}^R(M', N) \longrightarrow \cdots \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\ \cdots \longrightarrow & \mathrm{Tor}_n^R(T', N) & \longrightarrow & \mathrm{Tor}_n^R(T, N) & \longrightarrow & \mathrm{Tor}_n^R(T'', N) & \xrightarrow{\partial'_n} \mathrm{Tor}_{n-1}^R(T', N) \longrightarrow \cdots \end{array}$$

并且对 $\mathrm{tor}_n^R(M, -)$ 也有类似的结论。



证明 对短正合列 $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ ，由马蹄引理可得

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & P' & \longrightarrow & P & \longrightarrow & P'' \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M'' \longrightarrow 0 \end{array}$$

其中 $P' \rightarrow M' \rightarrow 0, P \rightarrow M \rightarrow 0, P'' \rightarrow M'' \rightarrow 0$ 都是投射消解，且 $0 \rightarrow P' \rightarrow P \rightarrow P'' \rightarrow 0$ 分裂正合。从而 $0 \rightarrow FP' \rightarrow FP \rightarrow FP'' \rightarrow 0$ 正合，这里 $F = - \otimes_R N$ ，则由定理 8.1 即得。

推论 10.2

函子 $\mathrm{Tor}_0^R(-, N)$ 与 $\mathrm{tor}_0^R(M, -)$ 都是右正合的。



注 上面的定理对任意左导出函子 $L_i F$ 都成立。

定理 10.4

设 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 是 Abelian 范畴， $\mathcal{A}$ 有足够多的投射对象。若加法函子 $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ 是右正合的，则 F 与 $L_0 F$ 自然同构。



证明 取 A 的一个投射消解 $\cdots \rightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \rightarrow 0$ 。则 $(L_0 F)A = \mathrm{Coker} Fd_1$ 。另一方面，因为 F 右正合，序列 $\cdots \rightarrow FP_1 \xrightarrow{Fd_1} FP_0 \xrightarrow{F\varepsilon} FA \rightarrow 0$ 正合，于是 $\mathrm{Coker} Fd_1 = FP_0 / \mathrm{Im} Fd_1 = FP_0 / \mathrm{Ker} F\varepsilon \cong \mathrm{Im} F\varepsilon = FA$ 。对态射 $f: A \rightarrow B$ ，直接验证自然性即可，即如下的交换图表：

$$\begin{array}{ccc} (L_0 F)A & \xrightarrow{\cong} & FA \\ \downarrow & & \downarrow \\ (L_0 F)B & \xrightarrow{\cong} & FB \end{array}$$

推论 10.3

设 R 是环，则函子 $- \otimes_R N$ 自然同构于 $\mathrm{Tor}_0^R(-, N)$ ，函子 $M \otimes_R -$ 自然同构于 $\mathrm{tor}_0^R(M, -)$ 。

因此，对任意短正合列 $0 \rightarrow M'_R \rightarrow M_R \rightarrow M''_R \rightarrow 0$ 与任意左 R -模 ${}_R N$ ，有长正合列

$$\cdots \rightarrow \operatorname{Tor}_n^R(M', N) \rightarrow \operatorname{Tor}_n^R(M, N) \rightarrow \operatorname{Tor}_n^R(M'', N) \xrightarrow{\partial_n} \operatorname{Tor}_{n-1}^R(M', N) \rightarrow \cdots$$

$$\cdots \rightarrow \operatorname{Tor}_1^R(M'', N) \rightarrow M' \otimes_R N \rightarrow M \otimes_R N \rightarrow M'' \otimes_R N \rightarrow 0.$$

其中 ∂_n 是自然的。并且对 $\operatorname{tor}_n^R(M, -)$ 也有类似的结论。



Lecture 11

定义 11.1

设 R 是一个环, ${}_R N$ 是左 R -模, M_R 是右 R -模。

(1) 定义 $\text{Tor}_n^R(-, N) = L_n(- \otimes_R N)$.

(2) 定义 $\text{tor}_n^R(M, -) = L_n(M \otimes_R -)$.



引理 11.1

设 $\mathcal{A}$ 是一个 Abelian 范畴, 并且给定一个 $\mathcal{A}$ 中的行列都正合的交换图表:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & A & & C & & \\
 & & \parallel & & \parallel & & \\
 & & \text{Ker } f \longrightarrow 0 & & \text{Ker } h & & \\
 & & \downarrow i & & \downarrow & & \\
 B = \text{Ker } b & \xrightarrow{j} & L' & \xrightarrow{b} & M' & \longrightarrow & N' \longrightarrow 0 \\
 \downarrow & & \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h \\
 0 & \longrightarrow & L & \longrightarrow & M & \longrightarrow & N \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 D = \text{Ker } d & \longrightarrow & L'' & \xrightarrow{d} & M'' & \longrightarrow & N'' \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

则有: (1) $A \cong B$. (2) $C \cong D$.



证明 (1) 由 $fj = 0$, 故 $B = \text{Ker } b = \text{Im } j \subseteq \text{Ker } f = A$. 另一方面, 由 $bi = 0$, 故 $A = \text{Ker } f = \text{Im } i \subseteq \text{Ker } b = B$. 故 $A \cong B$.

(2) 对中间两行用蛇引理可得正合列 $\text{Ker } g (= 0) \rightarrow \text{Ker } h (= C) \rightarrow \text{Coker } f (\cong L'') \rightarrow \text{Coker } g (\cong M'')$. 故 $\text{Ker } h \cong \text{Ker } d$, 也就是 $C \cong D$.

定理 11.1

设 R 是环, M_R 是右 R -模, ${}_R N$ 是左 R -模, 且 $P = (P_i, d_i) \xrightarrow{\epsilon} M \rightarrow 0$ 与 $Y = (Y_j, \delta_j) \xrightarrow{\eta} N \rightarrow 0$ 都是投射消解, 则对任意 $n \geq 0$ 有 $H_n(P \otimes_R N) \cong H_n(M \otimes_R Y)$. 并由此可得 $\text{Tor}_n^R(M, N) \cong \text{tor}_n^R(M, N)$.



证明 首先 $n = 0$ 的情形由 $- \otimes_R -$ 右正合即得 (都同构于 $M \otimes_R N$). 考虑

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \rightarrow & P_2 & \longrightarrow & P_1 & \longrightarrow & P_0 \rightarrow M \rightarrow 0 \\
 & & \searrow & & \nearrow & \searrow & \nearrow \\
 & & & & K_1 & & K_0
 \end{array}$$

其中 K_n 是 P 的第 n 个 syzygy, 则对 $i \geq 0$ 我们有短正合列 $0 \rightarrow K_i \xrightarrow{\iota_i} P_i \xrightarrow{\pi_i} K_{i-1} \rightarrow 0$,

其中约定 $K_{-1} = M$. 类似地, 我们记 V_i 是 Y 的第 i 个 syzygy, 则对 $j \geq 0$ 我们有短正合列 $0 \rightarrow V_j \xrightarrow{\xi_j} Y_j \xrightarrow{\tau_j} V_{j-1} \rightarrow 0$, 其中约定 $V_{-1} = N$. 考虑如下交换图表:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & A & & 0 & & C \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 B & \longrightarrow & K_i \otimes V_j & \longrightarrow & K_i \otimes Y_j & \longrightarrow & K_i \otimes V_{j-1} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & P_i \otimes V_j & \longrightarrow & P_i \otimes Y_j & \longrightarrow & P_i \otimes V_{j-1} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 D & \longrightarrow & K_{i-1} \otimes V_j & \longrightarrow & K_{i-1} \otimes Y_j & \longrightarrow & K_{i-1} \otimes V_{j-1} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

其中行列都正合 (中间行、列正合是由于投射模都是平坦模). 由上一个引理得 $A \cong B, C \cong D$, 且 $A \cong \text{Tor}_1(K_{i-1}, V_j), B \cong \text{tor}_1(K_i, V_{j-1}), C \cong \text{Tor}_1(K_{i-1}, V_{j-1}), D \cong \text{tor}_1(K_{i-1}, V_{j-1})$ (证明可利用命题 10.2 的证明中的事实). 于是我们得到如下的同构:

$$\text{Tor}_1(K_{i-1}, V_j) \cong \text{tor}_1(K_i, V_{j-1}). \quad (1)$$

$$\text{Tor}_1(K_{i-1}, V_{j-1}) \cong \text{tor}_1(K_{i-1}, V_{j-1}). \quad (2)$$

在 (2) 中令 $i = j = 0$ 得到 $\text{Tor}_1(M, N) \cong \text{tor}_1(M, N)$. 故 $n = 1$ 时结论成立.

再接下来, 回忆如下的同构 (在定理 10.3 中, 分别将两正合列 $0 \rightarrow K_i \rightarrow P_i \rightarrow K_{i-1}$ 和 $0 \rightarrow K_{i-1} \rightarrow P_{i-1} \rightarrow K_{i-2}$ 作为上下两行并结合推论 10.1 即得):

$$\text{tor}_{n+1}(M, N) \cong \text{tor}_1(M, V_{n-1}) = \text{tor}_1(K_{-1}, V_{n-1}). \quad (3)$$

$$\text{Tor}_{n+1}(M, N) \cong \text{Tor}_1(K_{n-1}, N) = \text{Tor}_1(K_{n-1}, V_{-1}). \quad (4)$$

于是反复应用 (1), (2), (3), (4) 即可得到 $\text{tor}_{n+1}(M, N) \cong \text{tor}_1(K_{-1}, V_{n-1}) \cong \text{Tor}_1(K_{-1}, V_{n-1}) \cong \text{tor}_1(K_0, V_{n-2}) \cong \text{Tor}_1(K_0, V_{n-2}) \cong \text{tor}_1(K_1, V_{n-3}) \cong \cdots \cong \text{Tor}_1(K_{n-1}, V_{-1}) \cong \text{Tor}_{n+1}(M, N)$.

定理 11.2 (Axiom of Tor)

设 $\{T_n : \mathbf{Mod}\text{-}R \rightarrow \mathbf{Ab}\}_{n \geq 0}$ 是一列加法协变函子. 若

(i) 对每个 $\mathbf{Mod}\text{-}R$ 中的短正合列 $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$, 都存在自然连接的长正合列

$$\cdots \rightarrow T_{n+1}(B) \rightarrow T_{n+1}(C) \xrightarrow{\Delta_{n+1}} T_n(A) \rightarrow T_n(B) \rightarrow \cdots$$

(ii) 有 T_0 自然同构于 $- \otimes_R N$, 其中 ${}_R N$ 是某个左 R -模.

(iii) 对每个投射右 R -模 P 及每个 $n \geq 1$, 都有 $T_n(P) = 0$.

则对任意 $n \geq 0$, 有 T_n 自然同构于 $\text{Tor}_n^R(-, N)$.



证明 对 $n \geq 0$ 归纳, 首先 $n = 0$ 时的情形正是条件 (ii) (结合推论 10.3).

对 $n = 1$, 任取右 R -模 A , 由定理 4.1, 存在一个短正合列 $0 \rightarrow K \rightarrow P \rightarrow A \rightarrow 0$, 其中

P 投射。由条件 (i), (iii) 可得如下的交换图表:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \xlongequal{\quad} & T_1(P) & \longrightarrow & T_1(A) & \xrightarrow{\Delta_1} & T_0(K) \longrightarrow T_0(P) \\ & & & & \downarrow \tau_1 A & & \downarrow \tau_0 K \\ 0 & \xlongequal{\quad} & \text{Tor}_1^R(P, N) & \longrightarrow & \text{Tor}_1^R(A, N) & \xrightarrow{\partial_1} & \text{Tor}_0^R(K, N) \longrightarrow \text{Tor}_0^R(P, N) \\ & & & & \downarrow \tau_1 A & & \downarrow \tau_0 K \end{array}$$

其中 $\tau_0 K, \tau_0 P$ 是同构, 于是由五引理知 $\tau_1 A$ 也是同构。

归纳步完全类似, 由 (i), (iii) 可得如下的交换图表:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \xlongequal{\quad} & T_{n+1}(P) & \longrightarrow & T_{n+1}(A) & \xrightarrow{\Delta_{n+1}} & T_n(K) \longrightarrow T_n(P) \xlongequal{\quad} 0 \\ & & & & \downarrow \tau_{n+1} A & & \downarrow \tau_n K \\ 0 & \xlongequal{\quad} & \text{Tor}_{n+1}^R(P, N) & \longrightarrow & \text{Tor}_{n+1}^R(A, N) & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & \text{Tor}_n^R(K, N) \longrightarrow \text{Tor}_n^R(P, N) \xlongequal{\quad} 0 \\ & & & & \downarrow \tau_{n+1} A & & \downarrow \tau_n K \end{array}$$

由归纳假设 $T_n(K) \cong \text{Tor}_n^R(K, N)$, 从而 $\tau_{n+1} A = (\partial_{n+1}^{-1})(\tau_n K)(\Delta_{n+1})$ 是同构, 故命题成立。

定义 11.2 (Ext)

设 R 是一个环, ${}_R M$ 与 ${}_R N$ 是左 R -模。

(1) 定义 $\text{Ext}_R^n(M, -) = R^n(\text{Hom}_R(M, -))$.

(2) 定义 $\text{ext}_R^n(-, N) = R^n(\text{Hom}_R(-, N))$.



注 取 $0 \rightarrow N \xrightarrow{\varepsilon} Q = (Q^i, d^i)$ 为一内射消解, $P = (P_i, d_i) \xrightarrow{\eta} M \rightarrow 0$ 为一投射消解, 则有复形

$$0 \rightarrow \text{Hom}_R(M, Q^0) \xrightarrow{d_0^*} \text{Hom}_R(M, Q^1) \xrightarrow{d_1^*} \cdots \rightarrow \text{Hom}_R(M, Q^n) \xrightarrow{d_n^*} \cdots$$

其中 $d_n^* : \text{Hom}_R(M, Q^n) \rightarrow \text{Hom}_R(M, Q^{n+1}), f \mapsto d^{n+1} f$. 以及

$$0 \rightarrow \text{Hom}_R(P_0, N) \xrightarrow{d_1^*} \text{Hom}_R(P_1, N) \xrightarrow{d_2^*} \cdots \rightarrow \text{Hom}_R(P_n, N) \xrightarrow{d_{n+1}^*} \cdots$$

其中 $d_{n+1}^* : \text{Hom}_R(P_n, N) \rightarrow \text{Hom}_R(P_{n+1}, N), f \mapsto f d_{n+1}$. 因此

$$\text{Ext}_R^n(M, N) = H^n(\text{Hom}_R(M, Q)) = \frac{\text{Ker } d_n^*}{\text{Im } d_{n-1}^*}, \text{ext}_R^n(M, N) = H^n(\text{Hom}_R(P, N)) = \frac{\text{Ker } d_{n+1}^*}{\text{Im } d_n^*}.$$

注 以后我们会证明 $\text{Ext}_R^n(M, N) \cong \text{ext}_R^n(M, N)$.

命题 11.1 (dimension shifting)

(1) $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 是 Abelian 范畴, $\mathcal{A}$ 有足够多的内射对象, $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ 是加法函子, $A \in \text{Ob } \mathcal{A}$, 且 $0 \rightarrow A \xrightarrow{\varepsilon} Q = (Q^i, d^i)$ 是内射消解。令 $V^n = \text{Im } d^n, n \geq 0$, 则 $(R^n F)A \cong (R^{n-1} F)V^0 \cong \cdots \cong (R^1 F)V^{n-2}$. 进一步若 F 左正合, 则 $(R^{n+1} F)A \cong \text{Coker}(FQ^n \xrightarrow{F\tilde{d}^n} FV^n)$.

$$\begin{array}{ccc} Q^n & \xrightarrow{d^n} & Q^{n-1} \\ & \searrow \tilde{d}^n & \nearrow \iota^n \\ & & V^n \end{array} \quad \begin{array}{ccc} P_{m+1} & \xrightarrow{d_{m+1}} & P_m \\ & \searrow \tilde{d}_{m+1} & \nearrow \sigma_m \\ & & K_m \end{array}$$

(2) $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 是 Abelian 范畴, $\mathcal{A}$ 有足够多的投射对象, $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ 是反变加法函子, $A \in \text{Ob } \mathcal{A}$, 且 $(P_i, d_i) \xrightarrow{\varepsilon} A \rightarrow 0$ 是投射消解。令 $K_m = \text{Im } d_{m+1}, m \geq 0$, 则 $(R^m F)A \cong (R^{m-1} F)K_0 \cong \cdots \cong (R^1 F)K_{m-2}$. 进一步若 F 左正合, 则 $(R^{m+1} F)A \cong \text{Coker}(FP_m \xrightarrow{F\sigma_m} FK_m)$.



证明 这里只证 (2) 的附加结论。由 $P_{m+2} \xrightarrow{d_{m+2}} P_{m+1} \xrightarrow{\widetilde{d_{m+1}}} K_m \rightarrow 0$ 正合, 以及 F 左正合, 可得 $0 \rightarrow FK_m \rightarrow FP_{m+1} \rightarrow FP_{m+2}$ 正合。于是

$$(R^{m+1}F)A = \frac{\text{Ker } Fd_{m+2}}{\text{Im } Fd_{m+1}} \cong \frac{\text{Im } F\widetilde{d_{m+1}}}{\text{Im } Fd_{m+1}} \cong \text{Coker}(F\sigma_m).$$

这里最后一个同构用到下面的简单引理:

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \Rightarrow \frac{\text{Im } g}{\text{Im}(gf)} \cong \text{Coker } \bar{f}.$$

其中 $\bar{f}: A \rightarrow B/\text{Ker } g$ 为 f 诱导到 $\text{Im } g \cong B/\text{Ker } g$ 上的态射。

Lecture 12

定理 12.1

设 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 是 Abelian 范畴。

(1) 若 $\mathcal{A}$ 有足够多的内射对象, $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ 是加法函子, 且 $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ 是 $\mathcal{A}$ 中的短正合列, 则存在长正合列

$$0 \rightarrow (R^0 F)A \rightarrow (R^0 F)B \rightarrow (R^0 F)C \xrightarrow{\partial^1} (R^1 F)A \rightarrow \cdots \rightarrow (R^n F)C \xrightarrow{\partial^n} (R^{n+1} F)A \rightarrow \cdots$$

其中连接同态 ∂^n 是自然的。若进一步 F 左正合, 则 $R^0 F$ 自然同构于 F 。

(2) 若 $\mathcal{A}$ 有足够多的投射对象, $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ 是反变加法函子, 且 $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ 是 $\mathcal{A}$ 中的短正合列, 则存在长正合列

$$0 \rightarrow (R^0 F)C \rightarrow (R^0 F)B \rightarrow (R^0 F)A \xrightarrow{\partial^1} (R^1 F)C \rightarrow \cdots \rightarrow (R^n F)A \xrightarrow{\partial^n} (R^n F)C \rightarrow \cdots$$

其中连接同态 ∂^n 是自然的。若进一步 F 左正合, 则 $R^0 F$ 自然同构于 F 。



推论 12.1

设 R 是一个环, ${}_R M, {}_R N$ 是左 R -模。若 $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ 是在 $R\text{-Mod}$ 中的短正合列, 则有长正合列

$$0 \rightarrow \text{Hom}_R(M, A) \rightarrow \text{Hom}_R(M, B) \rightarrow \text{Hom}_R(M, C) \xrightarrow{\partial^1} \text{Ext}_R^1(M, A) \rightarrow \cdots$$

以及长正合列

$$0 \rightarrow \text{Hom}_R(C, N) \rightarrow \text{Hom}_R(B, N) \rightarrow \text{Hom}_R(A, N) \xrightarrow{\Delta^1} \text{Ext}_R^1(C, N) \rightarrow \cdots$$

其中 ∂^i, Δ^i 都是自然的连接同态。



定理 12.2 (Axioms for Ext and ext)

(a) 设 $\{F^n: R\text{-Mod} \rightarrow \mathbf{Ab}\}_{n \geq 0}$ 是一列加法协变函子。若

(a1) 对每个 $R\text{-Mod}$ 中的短正合列 $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$, 都存在自然连接的长正合列

$$\cdots \rightarrow F^{n-1}(C) \xrightarrow{\Delta^{n-1}} F^n(A) \rightarrow F^n(B) \rightarrow F^n(C) \xrightarrow{\Delta^n} F^{n+1}(A) \rightarrow \cdots$$

(a2) F^0 自然同构于 $\text{Hom}_R(M, -)$, 其中 ${}_R M$ 是某个左 R -模。

(a3) 对每个内射左 R -模 Q 及每个 $n \geq 1$, 都有 $F^n(Q) = 0$ 。

则对每个 $n \geq 0$, 有 F^n 自然同构于 $\text{Ext}_R^n(M, -)$ 。

(b) 设 $\{G^n: R\text{-Mod} \rightarrow \mathbf{Ab}\}_{n \geq 0}$ 是一列加法反变函子。若

(b1) 对每个 $R\text{-Mod}$ 中的短正合列 $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$, 都存在自然连接的长正合列

$$\cdots \rightarrow G^{n-1}(A) \xrightarrow{\Delta^{n-1}} G^n(C) \rightarrow G^n(B) \rightarrow G^n(A) \xrightarrow{\Delta^n} G^{n+1}(C) \rightarrow \cdots$$

(b2) G^0 自然同构于 $\text{Hom}_R(-, N)$, 其中 ${}_R N$ 是某个左 R -模。

(b3) 对每个投射左 R -模 P 及每个 $n \geq 1$, 都有 $G^n(P) = 0$ 。

则对每个 $n \geq 0$, 有 G^n 自然同构于 $\text{Ext}_R^n(-, N)$.



定理 12.3

设 R 是一个环, ${}_R M, {}_R N$ 是左 R -模, $P = (P_i, d_i) \xrightarrow{\varepsilon} M \rightarrow 0$ 是一个投射消解, $0 \rightarrow N \xrightarrow{\eta} Q = (Q^i, d^i)$ 是一个内射消解, 则对任意 $n \geq 0$ 有 $H^n(\text{Hom}_R(P, N)) \cong H^n(\text{Hom}_R(M, Q))$. 这意味着 $\text{Ext}_R^n(M, N) \cong \text{ext}_R^n(M, N), \forall n \geq 0$.



证明 对固定的左 R -模 ${}_R M$, 定义一系列协变函子 $\widetilde{\text{ext}}_R^n(M, -) : R\text{-Mod} \rightarrow \mathbf{Ab}$, 其中在对象上令 $\widetilde{\text{ext}}_R^n(M, -)({}_R N) = \text{ext}_R^n(M, N)$. 对态射 $f : N \rightarrow N'$, 固定一个投射消解 $P = (P_i, d_i) \xrightarrow{\varepsilon} M \rightarrow 0$, 则我们有如下两行均为复形的交换图表:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_R(P_0, N) & \longrightarrow & \text{Hom}_R(P_1, N) & \longrightarrow & \cdots \longrightarrow \text{Hom}_R(P_n, N) \longrightarrow \cdots \\ & & \text{Hom}(P_0, f) \downarrow & & \text{Hom}(P_1, f) \downarrow & & \text{Hom}(P_n, f) \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_R(P_0, N') & \longrightarrow & \text{Hom}_R(P_1, N') & \longrightarrow & \cdots \longrightarrow \text{Hom}_R(P_n, N') \longrightarrow \cdots \end{array}$$

这也即为得到一个链映射 $\text{Hom}_R(P, f) : \text{Hom}_R(P, N) \rightarrow \text{Hom}_R(P, N')$. 于是定义 $\widetilde{\text{ext}}_R^n(M, f) = H^n(\text{Hom}_R(P, f)) : \widetilde{\text{ext}}_R^n(M, N) \rightarrow \widetilde{\text{ext}}_R^n(M, N'), n \geq 0$. 这样就得到一系列函子 $\{\widetilde{\text{ext}}_R^n(M, -) : R\text{-Mod} \rightarrow \mathbf{Ab}\}_{n \geq 0}$. 直接验证它们满足 Ext 公理, 则 $\text{ext}_R^n(M, N) = \widetilde{\text{ext}}_R^n(M, N) \cong \text{Ext}_R^n(M, N)$ 对任意 $n \geq 0$ 都成立, 这样就完成了证明。

定义 12.1 (bifunctor)

设 R, S, Λ 是环. 对每个 R -模 A 与每个 S -模 C , 给定一个 Λ -模 $F(A, C)$. 进一步地, 对每一对同态 $f : A \rightarrow A'$ 与 $g : C' \rightarrow C$, 我们给定同态 $F(f, C) : F(A, C) \rightarrow F(A', C)$ 与 $F(A, g) : F(A, C) \rightarrow F(A, C')$, 并满足:

- (1) 若 f, g 是恒等映射, 则 $F(f, C)$ 与 $F(A, g)$ 也是恒等映射。
- (2) $F(f'f, C) = F(f', C)F(f, C), F(A, gg') = F(A, g')F(A, g)$. 其中同态 $f' : A' \rightarrow A''$, 以及 $g' : C'' \rightarrow C'$.
- (3) 下面的图表交换:

$$\begin{array}{ccc} F(A, C) & \xrightarrow{F(f, C)} & F(A', C) \\ F(A, g) \downarrow & & \downarrow F(A', g) \\ F(A, C') & \xrightarrow{F(f, C')} & F(A', C') \end{array}$$

复合映射 $F(A, C) \rightarrow F(A', C')$ 记作 $F(f, g)$. 此时称 F 是一个 **bifunctor** (双函子), 它在第一变量上协变, 在第二变量上反变 (非强制规定, 只是展示两种情形分别如何定义). 若对任意 $f_1, f_2 : A \rightarrow A'$ 与 $g_1, g_2 : C' \rightarrow C$ 都有 $F(f_1 + f_2, C) = F(f_1, C) + F(f_2, C)$ 与 $F(A, g_1 + g_2) = F(A, g_1) + F(A, g_2)$, 则称 F 是加法的. 若对每个 A, C , 函子 $F(A, -)$ 与 $F(-, C)$ 都是左正合、右正合或正合的, 则相应地称 F 是左正合、右正合或正合的双函子.



例 12.1

$-\otimes_R -$ 是右正合双函子, 而 $\text{Hom}(-, -)$ 是左正合双函子。

注 类似地可以定义 multifunctors (或称 multivariable functors) (多元函子)。

定义 12.2 (bicomplex)

一个 double complex (双复形) $X_{\bullet, \bullet}$ 是指 $(\{X_{p,q}, d_{p,q}^1, d_{p,q}^2\}_{p,q \in \mathbb{Z}})$. 其中 $X_{p,q}$ 是对象, 态射是 $d_{n,m}^1: X_{n,m} \rightarrow X_{n-1,m}$ 与 $d_{n,m}^2: X_{n,m} \rightarrow X_{n,m-1}$, 满足:

$$(1) d_{n,m}^1 \circ d_{n+1,m}^1 = 0, d_{n,m}^2 \circ d_{n,m+1}^2 = 0.$$

$$(2) d_{n,m+1}^2 \circ d_{n+1,m+1}^1 + d_{n+1,m}^1 \circ d_{n+1,m+1}^2 = 0. \text{ (一些作者会使用 } d^2 d^1 = d^1 d^2 \text{)}$$

也就是说, 图表中每个小方块都是反交换的, 如下图所示:

$$\begin{array}{ccccc} & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ \rightarrow & X_{n+1,m+1} & \xrightarrow{d^2} & X_{n+1,m} & \rightarrow \\ & \downarrow d^1 & & \downarrow d^1 & \\ \rightarrow & X_{n,m+1} & \xrightarrow{d^2} & X_{n,m} & \rightarrow \\ & \downarrow & & \downarrow & \end{array}$$

定义 12.3

对一个双复形 $X_{\bullet, \bullet}$, 定义 $X_p = \sum_{n+m=p} X_{n,m}$, 并定义 $d: X_p \rightarrow X_{p-1}$ 为 $d = d^1 + d^2$. 上面的条件 (1), (2) 保证 $dd = 0$. 称这个复形 $X_{\bullet}$ 为 $X_{\bullet, \bullet}$ 的 total complex (全复形)。

定义 12.4

(1) 设 X, Y 是双复形, 一个同态 $f: X \rightarrow Y$ 称为有 bidegree (双次数) (p, q) , 若 $f(X_{n,m}) \subseteq Y_{n+p, m+q}$.

(2) 若 $f, g: X \rightarrow Y$ 是双复形之间的态射, 则一个 homotopy (同伦) $(s^1, s^2): f \simeq g$ 是指一对双次数分别为 $(1, 0)$ 与 $(0, 1)$ 的映射, 使得 $d^1 s^1 + s^1 d^1 + d^2 s^2 + s^2 d^2 = g - f$, $s^1 d^2 + d^2 s^1 = 0, s^2 d^1 + d^1 s^2 = 0$.

引理 12.1 (Horseshoe lemma, 马蹄引理)

设 $0 \rightarrow A' \xrightarrow{i} A \xrightarrow{p} A'' \rightarrow 0$ 是 $R\text{-Mod}$ 中的短正合列, 若 $X' \xrightarrow{\epsilon'} A' \rightarrow 0$ 与 $X'' \xrightarrow{\epsilon''} A'' \rightarrow 0$ 是投射消解, 则存在一个复形的分裂正合列 $0 \rightarrow X' \xrightarrow{\tilde{i}} X \xrightarrow{\tilde{p}} X'' \rightarrow 0$, 其中 $X \xrightarrow{\epsilon} A \rightarrow 0$ 是一个投射消解, 以及 $\tilde{i}, \tilde{p}$ 分别 over i, p .

证明 对 $n = 0$, 由 X''_0 投射, 存在 $\sigma: X''_0 \rightarrow A$ 使得 $p\sigma = \epsilon''$. 定义 $X_0 = X'_0 \oplus X''_0$, 并且令 $\epsilon: X_0 \rightarrow A$ 为 $(x', x'') \mapsto i\epsilon'(x') + \sigma(x'')$. 于是有下页第一个交换图表, 由五引理可知 ϵ 满。

归纳地, 对 $n \geq 1$, 设 $K'_{n-1}, K_{n-1}, K''_{n-1}$ 分别是 X', X, X'' 的第 $n-1$ 个 syzygy. 由 X''_n 投射, 存在 $\sigma_n: X''_n \rightarrow K_{n-1}$ 使得 $v_{n-1}\sigma_n = \tilde{d}''_n$. 定义 $X_n = X'_n \oplus X''_n$ 以及定义 $\tilde{d}_n: X_n \rightarrow K_{n-1}$

为 $(x', x'') \mapsto u_{n-1}\tilde{d}'_n(x') + \tilde{d}''_n(x'')$. 于是有下方第二个交换图表, 由五引理可知 $\tilde{d}_n$ 满. 再定义 $d_n : X_n \xrightarrow{\tilde{d}_n} K_{n-1} \hookrightarrow X_{n-1}$, 则 d_n 就是我们需要的态射.

更进一步, 由于 d_n 要和两边的消解兼容, 于是可写 $d_n : X_n \rightarrow X_{n-1}, (x', x'') \mapsto (d'_n(x') + \theta_n(x''), d''_n(x''))$, 其中 $\theta_n : X''_n \rightarrow X'_{n-1}$ 满足 $i\varepsilon'\theta_1 + \sigma d''_1 = 0$ 以及 $d'_{n-1}\theta_n + \theta_{n-1}d''_n = 0$. 最后这两个条件是因为要求 X 是复形翻译出来的, 也即需要满足 $\varepsilon d_1 = 0$ 以及 $d_{n-1}d_n = 0$.

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & X'_0 & \xrightarrow{\tilde{i}_0} & X_0 & \xrightarrow{\tilde{p}_0} & X''_0 \longrightarrow 0 \\
 & & \varepsilon' \downarrow & & \varepsilon \downarrow & \swarrow \sigma & \downarrow \varepsilon'' \\
 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{i} & A & \xrightarrow{p} & A'' \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & X'_n & \xrightarrow{\tilde{i}_n} & X_n & \xrightarrow{\tilde{p}_n} & X''_n \longrightarrow 0 \\
 & & \tilde{d}'_n \downarrow & & \tilde{d}_n \downarrow & \swarrow \sigma_n & \downarrow \tilde{d}''_n \\
 0 & \longrightarrow & K'_{n-1} & \xrightarrow{u_{n-1}} & K_{n-1} & \xrightarrow{v_{n-1}} & K''_{n-1} \longrightarrow 0
 \end{array}$$

命题 12.1

假设

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{i} & A & \xrightarrow{p} & A'' \longrightarrow 0 \\
 & & f' \downarrow & & f \downarrow & & f'' \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & B' & \xrightarrow{j} & B & \xrightarrow{\pi} & B'' \longrightarrow 0
 \end{array}$$

是 $R\text{-Mod}$ 中行正合的交换图. 再设 $0 \rightarrow X' \xrightarrow{\tilde{i}} X \xrightarrow{\tilde{p}} X'' \rightarrow 0$ 与 $0 \rightarrow Y' \xrightarrow{\tilde{j}} Y \xrightarrow{\tilde{\pi}} Y'' \rightarrow 0$ 是分别在上、下两行之上的分裂正合投射消解, 如马蹄引理中所构造.

(1) 若给定 over f' 与 f'' 的链映射 $F' : X' \rightarrow Y'$ 与 $F'' : X'' \rightarrow Y''$, 则存在一个 over f 的链映射 $F : X \rightarrow Y$, 使得如下图表交换:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & X' & \longrightarrow & X & \longrightarrow & X'' \longrightarrow 0 \\
 & & F' \downarrow & & F \downarrow & & F'' \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Y'' \longrightarrow 0
 \end{array}$$

(2) 若 G', G, G'' 是另一组三个分别 over f', f, f'' 的链映射, 满足同样性质. 且若 $s' : F' \simeq G'$ 与 $s'' : F'' \simeq G''$ 是同伦, 则存在同伦 $s : F \simeq G$, 使得对每个 $n \geq 0$, 如下图表交换:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & X'_n & \longrightarrow & X_n & \longrightarrow & X''_n \longrightarrow 0 \\
 & & s'_n \downarrow & & s_n \downarrow & & s''_n \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & Y'_{n+1} & \longrightarrow & Y_{n+1} & \longrightarrow & Y''_{n+1} \longrightarrow 0
 \end{array}$$

注 如果这样的 F 存在, 那么 F 一定具有形式 $F_n(x', x'') = (F'_n(x') + \gamma_n(x''), F''_n(x''))$, 其中 $\gamma_n : X''_n \rightarrow Y'_{n+1}$ 满足 $j\varepsilon^{Y'}\gamma_0 + \sigma^Y F''_0 = f\sigma^X$ 以及 $d_n^{Y'}\gamma_n - \gamma_{n-1}d_n^{X''} = F'_{n-1}\theta_n^X - \theta_n^Y F''_n$. 这两个条件是由要求 F 是链映射以及 F over f 翻译出来的, 也即 $\varepsilon^Y F = f\varepsilon^X, d_n^Y F_n = F_{n-1}d_n^X$.

证明 由马蹄引理有 $X_n = X'_n \oplus X''_n$, 且 $\varepsilon^X : X_0 \rightarrow A, (x', x'') \mapsto i\varepsilon^{X'}(x') + \sigma^X(x'')$, 以及 $d_n^X : X_n \rightarrow X_{n-1}, (x', x'') \mapsto (d_n^{X'}(x') + \theta_n^X(x''), d_n^{X''}(x''))$. 其中 $\sigma^X : X_0'' \rightarrow A, \theta_n^X : X_n'' \rightarrow X'_{n-1}, n > 0$ 满足 $p\sigma^X = \varepsilon^{X''}, i\varepsilon^{X'}\theta_1^X + \sigma^X d_1^{X''} = 0, d_{n-1}^{X'}\theta_n^X + \theta_{n-1}^X d_n^{X''} = 0$.

相应地也有 $Y_n = Y'_n \oplus Y''_n$, 且 $\varepsilon^Y : Y_0 \rightarrow B, (y', y'') \mapsto j\varepsilon^{Y'}(y') + \sigma^Y(y'')$, 以及 $d_n^Y : Y_n \rightarrow Y_{n-1}, (y', y'') \mapsto (d_n^{Y'}(y') + \theta_n^Y(y''), d_n^{Y''}(y''))$. 其中 $\sigma^Y : Y_0'' \rightarrow B, \theta_n^Y : Y_n'' \rightarrow Y'_{n-1}, n > 0$ 满足 $\pi\sigma^Y = \varepsilon^{Y''}, j\varepsilon^{Y'}\theta_1^Y + \sigma^Y d_1^{Y''} = 0, d_{n-1}^{Y'}\theta_n^Y + \theta_{n-1}^Y d_n^{Y''} = 0$.

(1) 对 $n \geq 0$ 归纳, 对 $n = 0$ 的情形, 我们有 $\pi(f\sigma^X - \sigma^Y F_0'') = \pi f\sigma^X - \pi\sigma^Y F_0'' = f''\varepsilon^{X''} - f''\varepsilon^{X''} = 0$. 因此 $\text{Im}(f\sigma^X - \sigma^Y F_0'') \subseteq \text{Ker } \pi = \text{Im } j$. 考虑如下的交换图表 (先对 $\text{Im } j$ 投射再嵌入 B):

$$\begin{array}{ccc} & X_0'' & \\ \gamma_0 \swarrow & \downarrow f\sigma^X - \sigma^Y F_0'' & \\ Y_0' & \xrightarrow{j\varepsilon^{Y'}} B & \longrightarrow 0 \end{array}$$

由 X_0'' 投射, 存在 γ_0 使得 $j\varepsilon^{Y'}\gamma_0 = f\sigma^X - \sigma^Y F_0''$, 也即 $j\varepsilon^{Y'}\gamma_0 + \sigma^Y F_0'' = f\sigma^X$. 定义 $F_0 : X_0 \rightarrow Y_0$ 为 $(x', x'') \mapsto (F_0'(x') + \gamma_0(x''), F_0''(x''))$. 则 F_0 就是我们需要的态射。

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & X_0' & \longrightarrow & X_0 & \longrightarrow & X_0'' \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\sigma_X} & A'' \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & Y_0' & \longrightarrow & Y_0 & \longrightarrow & Y_0'' \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & B & \xrightarrow{\sigma_Y} & B'' \longrightarrow 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & X_{n+1}' & \longrightarrow & X_{n+1} & \longrightarrow & X_{n+1}'' \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & X_n' & \longrightarrow & X_n & \longrightarrow & X_n'' \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & Y_{n+1}' & \longrightarrow & Y_{n+1} & \longrightarrow & Y_{n+1}'' \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & Y_n' & \longrightarrow & Y_n & \longrightarrow & Y_n'' \longrightarrow 0 \end{array}$$

归纳步中, 验证 $d_n^{Y'}(F_n'\theta_{n+1}^X - \theta_{n+1}^Y F_{n+1}'' + \gamma_n d_{n+1}^{X''}) = 0$, 并考虑如下的交换图表即可:

$$\begin{array}{ccc} & X_{n+1}'' & \\ \gamma_{n+1} \swarrow & \downarrow F_n'\theta_{n+1}^X - \theta_{n+1}^Y F_{n+1}'' + \gamma_n d_{n+1}^{X''} & \\ Y_{n+1}' & \xrightarrow[\widetilde{d_{n+1}}]{} \text{Im } d_{n+1}^{Y'} & \longrightarrow 0 \end{array}$$

(2) 所求同伦 $s : F \simeq G$ 必须形如 $s_n(x', x'') = (s_n'(x') + t_n(x''), s_n''(x''))$, 其中 $t_n : X_n'' \rightarrow Y_{n+1}'$ 满足 $d_1^{Y'}t_0 + \theta_1^Y s_0'' = \gamma_0^G - \gamma_0^F$ 以及 $d_{n+1}^{Y'}t_n + t_{n-1}d_n^{X''} + \theta_{n+1}^Y s_n'' + s_n'\theta_n^X = \gamma_n^G - \gamma_n^F, n > 0$, 这两个条件是由要求 s 是同伦翻译出来的, 也即 $d_{n+1}s_n + s_{n-1}d_n = G_n - F_n$.

Lecture 13

首先我们回顾上节的一些定义。

定义 13.1 (bicomplex)

一个 bicomplex (双复形) $X_{\bullet,\bullet}$ 由一族对象 $X_{n,m}$ 以及两个方向的微分 d^1, d^2 组成: $d^1 : X_{n+1,m} \rightarrow X_{n,m}$, $d^2 : X_{n,m+1} \rightarrow X_{n,m}$, 并满足 $d^1 d^1 = 0$, $d^2 d^2 = 0$ 以及 $d^2 d^1 + d^1 d^2 = 0$. 也就是说, 每个小方块反交换。

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 & \rightarrow & X_{n+1,m+1} & \xrightarrow{d^2} & X_{n+1,m} \rightarrow \\
 & & \downarrow d^1 & & \downarrow d^1 \\
 & \rightarrow & X_{n,m+1} & \xrightarrow{d^2} & X_{n,m} \rightarrow \\
 & & \downarrow & & \downarrow
 \end{array}$$



定义 13.2 (total complex)

双复形 $X_{\bullet,\bullet}$ 诱导一个 total complex (全复形) $\text{Tot}(X_{\bullet,\bullet})$, 其第 p 项定义为 $\text{Tot}(X_{\bullet,\bullet})_p = \sum_{n+m=p} X_{n,m}$, 其微分定义为 $d = d^1 + d^2$.



定义 13.3

一个双复形映射 $f : X_{\bullet,\bullet} \rightarrow Y_{\bullet,\bullet}$ 的 bidegree (双次数) 为 (p, q) , 是指一族态射 $f = (f_{n,m} : X_{n,m} \rightarrow Y_{n+p,m+q})_{(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}$.



定义 13.4

设 $f, g : X_{\bullet,\bullet} \rightarrow Y_{\bullet,\bullet}$ 是双次数为 $(0, 0)$ 的两个双复形映射。一个 homotopy (同伦) $(s^1, s^2) : f \simeq g$ 由一对同态组成, 其中 $s^1, s^2 : X_{\bullet,\bullet} \rightarrow Y_{\bullet,\bullet}$ 分别具有双次数 $(-1, 0)$ 和 $(0, -1)$, 且满足 $d^1 s^1 + s^1 d^1 + d^2 s^2 + s^2 d^2 = g - f$ 以及 $s^1 d^2 + d^2 s^1 = 0$, $s^2 d^1 + d^1 s^2 = 0$.



注 (1) 一个双次数为 (p, q) 的映射 f 诱导一个全复形上次数为 $p + q$ 的链映射。

(2) 若 $(s^1, s^2) : f \simeq g$ 是双复形之间的同伦, 令 $s = s^1 + s^2$, 就得到全复形之间的同伦 $s : f \simeq g$.

Functors of complexes

设 F 是一个双函子, 以及 X, Y 是两个复形。

定义 $F_{n,m}(X, Y) = F(X_{\varepsilon_1 n}, Y_{\varepsilon_2 m})$, 其中若 F 对第 i 个变量是协变的, 则 $\varepsilon_i = 1$. 而若 F 对第 i 个变量是反变的, 则 $\varepsilon_i = -1$. 后续我们把反变时的情形记为 **resp.**

把 $F(X, Y)$ 看作一族对象 $\{F_{n,m}(X, Y)\}_{(n,m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}$.

设 X', Y' 是另外两个复形, 设 f^1 是第一个变量上的映射, 当对第一个变量协变时取 $f^1 : X \rightarrow X'$ (resp. $f^1 : X' \rightarrow X$). 类似地, 设 f^2 是第二个变量上的映射, 当对第二个变量协变时取 $f^2 : Y \rightarrow Y'$ (resp. $f^2 : Y' \rightarrow Y$).

设 f^i 的次数为 p_i . 定义映射 $F(f^1, f^2) : F(X, Y) \rightarrow F(X', Y')$, 其双次数为 (p_1, p_2) , 具体为 $F_{n_1, n_2}(f^1, f^2) = (-1)^\varepsilon F(f_{l_1}^1, f_{l_2}^2) : F_{n_1, n_2}(X, Y) \rightarrow F_{n_1+p_1, n_2+p_2}(X', Y')$, 其中 $\varepsilon = n_1 p_2$, 且 l_i 在对第 i 个变量协变时为 n_i , 在对第 i 个变量反变时为 $-(n_i + p_i)$.

注 (1) 若 $g^1 : X' \rightarrow X''$ 的次数为 q_1 (resp. $g^1 : X'' \rightarrow X'$), 且 $g^2 : Y' \rightarrow Y''$ 的次数为 q_2 (resp. $g^2 : Y'' \rightarrow Y'$), 并且令 $h^1 = g^1 f^1$ (resp. $h^1 = f^1 g^1$), 及 $h^2 = g^2 f^2$ (resp. $h^2 = f^2 g^2$), 则有 $F(h^1, h^2) = (-1)^\eta F(g^1, g^2) F(f^1, f^2)$, 其中 $\eta = p_1 q_2$.

(2) 若 X, Y 是带微分 d^X, d^Y 的复形, 定义 $\delta^1 = F(d^X, Y) = F(d^X, \text{Id}_Y)$, $\delta^2 = F(X, d^Y) = F(\text{Id}_X, d^Y)$. 那么 $F(X, Y)$ 在微分 δ^1, δ^2 下成为双复形. 进一步, 若 $s^i : f^i \simeq g^i$ 是同伦, 令 $t^1 = F(s^1, Y)$, $t^2 = F(X, s^2)$, 则 $(t^1 + t^2) : F(f^1, f^2) \simeq F(g^1, g^2)$ 也是同伦.

例 13.1

设 R 是一个环。

(1) 若 X 是 $\text{Mod-}R$ 中的复形, Y 是 $R\text{-Mod}$ 中的复形, 则 $X \otimes_R Y$ 是双复形, 其微分为 $\delta^1 : X_n \otimes_R Y_m \rightarrow X_{n-1} \otimes_R Y_m$, $x \otimes y \mapsto d^X(x) \otimes y$, 以及 $\delta^2 : X_n \otimes_R Y_m \rightarrow X_n \otimes_R Y_{m-1}$, $x \otimes y \mapsto (-1)^n x \otimes d^Y(y)$.

(2) 若 X, Y 是 $R\text{-Mod}$ 中复形, 则 $\text{Hom}_R(X, Y)$ 是双复形, 微分为 $\delta^1 : \text{Hom}_R(X_{-n}, Y_m) \rightarrow \text{Hom}_R(X_{-n+1}, Y_m)$, $f \mapsto f d_{-n+1}^X$, 以及 $\delta^2 : \text{Hom}_R(X_{-n}, Y_m) \rightarrow \text{Hom}_R(X_{-n}, Y_{m-1})$, $f \mapsto (-1)^n d_m^Y f$.

定义 13.5 (left and right derived functors)

设 R, S, Λ 是环, 以及 $F : R\text{-Mod} \times S\text{-Mod} \rightarrow \Lambda\text{-Mod}$ 是一个双函子。

(1) 设 ${}_R M, {}_S N$ 是模, 取投射消解 $X \rightarrow M \rightarrow 0, Y \rightarrow N \rightarrow 0$. (resp. 内射消解 $0 \rightarrow M \rightarrow X, 0 \rightarrow N \rightarrow Y$.) 定义 F 的左导出函子为 $L_n F(M, N) = H_n(\text{Tot}(F(X, Y)))$.

(2) 设 ${}_R M, {}_S N$ 是模, 取内射消解 $0 \rightarrow M \rightarrow X, 0 \rightarrow N \rightarrow Y$. (resp. 投射消解 $X \rightarrow M \rightarrow 0, Y \rightarrow N \rightarrow 0$.) 定义 F 的右导出函子为 $R^n F(M, N) = H^n(\text{Tot}(F(X, Y)))$.

命题 13.1

正合双函子与同调函子交换, 即有自然同构 $H(\text{Tot}(F(X, Y))) \cong \text{Tot}(F(H(X), H(Y)))$.

命题 13.2

(1) 若 M 投射 (resp. 内射), N 投射 (resp. 内射), 则 $LF(M, N)$ 与 $F(M, N)$ 一致, 即对 $n > 0$ 有 $L_n F(M, N) = 0$, 并且 $L_0 F(M, N) = F(M, N)$.

(2) 若 M 内射 (resp. 投射), N 内射 (resp. 投射), 则 $RF(M, N)$ 与 $F(M, N)$ 一致, 即对 $n > 0$ 有 $R^n F(M, N) = 0$, 并且 $R^0 F(M, N) = F(M, N)$.

推论 13.1

若 F 正合, 则对任意 M, N , $LF(M, N)$ 与 $RF(M, N)$ 都与 $F(M, N)$ 一致。



定义 13.6

设 R 是一个环。

(1) 设 $M_R, {}_R N$ 为模, 取投射消解 $X \rightarrow M \rightarrow 0$ 与 $Y \rightarrow N \rightarrow 0$. 我们定义 $\text{Tor}_n^R(M, N) = L_n(M \otimes_R N) = H_n(\text{Tot}(X \otimes_R Y))$.

(2) 设 ${}_R M, {}_R N$ 为左 R -模, 取投射消解 $P \rightarrow M \rightarrow 0$ 与内射消解 $0 \rightarrow N \rightarrow Q$. 我们定义 $\text{Ext}_R^n(M, N) = R^n(\text{Hom}_R(M, N)) = H^n(\text{Tot}(\text{Hom}_R(P, Q)))$.



Connecting homomorphisms

为方便起见, 考虑一个双函子 $F(-, -)$, 它在第一个变量上协变, 在第二个变量上反变, 并省略 Tot 符号。设 $0 \rightarrow A' \rightarrow A \rightarrow A'' \rightarrow 0$ 是短正合列, 则可取一列内射消解 $0 \rightarrow Q' \rightarrow Q \rightarrow Q'' \rightarrow 0$. 又设 $P \rightarrow C \rightarrow 0$ 是一个投射消解。于是得到一个全复形的短正合列 $0 \rightarrow F(Q', P) \rightarrow F(Q, P) \rightarrow F(Q'', P) \rightarrow 0$. 因此诱导连接同态 $\partial^{1,n} : H^n(F(Q'', P)) \rightarrow H^{n+1}(F(Q', P))$, 也就是 $\partial^{1,n} : R^n F(A'', C) \rightarrow R^{n+1} F(A', C)$. 类似地, 对每个短正合列 $0 \rightarrow C' \rightarrow C \rightarrow C'' \rightarrow 0$, 也有连接同态 $\partial^{2,n} : R^n F(A, C') \rightarrow R^{n+1} F(A, C'')$.

命题 13.3

设有如下两个两行均正合的交换图表:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A'' \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & A'_1 & \longrightarrow & A_1 & \longrightarrow & A''_1 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & C'_1 & \longrightarrow & C_1 & \longrightarrow & C''_1 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & C & \longrightarrow & C'' \longrightarrow 0
 \end{array}$$

则如下的由连接同态给出的图表交换:

$$\begin{array}{ccc}
 R^n F(A'', C) & \xrightarrow{\partial^1} & R^{n+1} F(A', C) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 R^n F(A''_1, C) & \xrightarrow{\partial^1} & R^{n+1} F(A'_1, C) \\
 \\
 R^n F(A'', C) & \xrightarrow{\partial^1} & R^{n+1} F(A', C) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 R^n F(A'', C_1) & \xrightarrow{\partial^1} & R^{n+1} F(A', C_1)
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 R^n F(A, C') & \xrightarrow{\partial^2} & R^{n+1} F(A, C'') \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 R^n F(A, C'_1) & \xrightarrow{\partial^2} & R^{n+1} F(A, C''_1) \\
 \\
 R^n F(A, C') & \xrightarrow{\partial^2} & R^{n+1} F(A, C'') \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 R^n F(A_1, C') & \xrightarrow{\partial^2} & R^{n+1} F(A_1, C'')
 \end{array}$$

此外，以下图表反交换：

$$\begin{array}{ccc} R^n F(A'', C') & \xrightarrow{\partial^1} & R^{n+1} F(A', C') \\ \partial^2 \downarrow & & \downarrow \partial^2 \\ R^{n+1} F(A'', C'') & \xrightarrow{\partial^1} & R^{n+2} F(A', C'') \end{array}$$

如下两个序列正合：

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow R^n F(A', C) \rightarrow R^n F(A, C) \rightarrow R^n F(A'', C) \xrightarrow{\partial^1} R^{n+1} F(A', C) \rightarrow \cdots \\ \cdots \rightarrow R^n F(A, C'') \rightarrow R^n F(A, C) \rightarrow R^n F(A, C') \xrightarrow{\partial^2} R^{n+1} F(A, C'') \rightarrow \cdots \end{aligned}$$



证明 我们验证反交换关系。设 $0 \rightarrow Q' \rightarrow Q \rightarrow Q'' \rightarrow 0$ 是 $0 \rightarrow A' \rightarrow A \rightarrow A'' \rightarrow 0$ 上的一列内射消解，设 $0 \rightarrow P' \rightarrow P \rightarrow P'' \rightarrow 0$ 是 $0 \rightarrow C' \rightarrow C \rightarrow C'' \rightarrow 0$ 上的一列投射消解。于是我们得到一个行列均正合的复形交换图表：

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & F(Q', P'') & \longrightarrow & F(Q, P'') & \longrightarrow & F(Q'', P'') \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & F(Q', P) & \longrightarrow & F(Q, P) & \longrightarrow & F(Q'', P) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & F(Q', P') & \longrightarrow & F(Q, P') & \longrightarrow & F(Q'', P') \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

为方便起见，我们考虑一个行列均正合的复形交换图表：

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{f_1} & A & \xrightarrow{g_1} & A'' \longrightarrow 0 \\ & & \alpha_1 \downarrow & & \alpha_2 \downarrow & & \alpha_3 \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & B' & \xrightarrow{f_2} & B & \xrightarrow{g_2} & B'' \longrightarrow 0 \\ & & \beta_1 \downarrow & & \beta_2 \downarrow & & \beta_3 \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & C' & \xrightarrow{f_3} & C & \xrightarrow{g_3} & C'' \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

并且我们要证明如下的图表反交换：

$$\begin{array}{ccc} H^n(C'') & \xrightarrow{\partial_C^n} & H^{n+1}(C') \\ (\delta'')^n \downarrow & & \downarrow (\delta')^{n+1} \\ H^{n+1}(A'') & \xrightarrow{\partial_A^{n+1}} & H^{n+2}(A') \end{array}$$

为此考虑 $\varepsilon : A' \rightarrow A', a' \mapsto -a'$ 与 $\iota : A' \rightarrow A \oplus B', a' \mapsto (f_1(a'), \alpha_1(a'))$ 以及 $\pi : A \oplus B' \rightarrow B, (a, b') \mapsto \alpha_2(a) - f_2(b')$. 得到如下行正合的交换图表：

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{f_1} & A & \xrightarrow{\alpha_3 g_1} & B'' & \xrightarrow{\beta_3} & C'' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \parallel & & \uparrow & & \uparrow & & \parallel & & \\
 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{\iota} & A \oplus B' & \xrightarrow{\pi} & B & \xrightarrow{\beta_3 g_2} & C'' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \varepsilon \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel & & \\
 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{\alpha_1} & B' & \xrightarrow{f_3 \beta_1} & C & \xrightarrow{g_3} & C'' & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

这意味着 $-\partial_A^{n+1}(\delta'')^n = H^{n+2}(\varepsilon)\partial_A^{n+1}(\delta'')^n = (\delta')^{n+1}\partial_C^n$. 这里上下两行的连接同态是由两个短正合列的连接同态拼接而成的，分别为 $\partial_A^{n+1}(\delta'')^n$ 与 $(\delta')^{n+1}\partial_C^n$. 参考定理 8.1，分别考虑中间行与上下两行诱导的长正合列，而长正合列中的连接同态具有自然性，即与同调类之间的映射交换，而左右两端的同调类映射是恒等或取反，于是得到所需的等式。

Lecture 14

首先我们回顾上节的定义。

定义 14.1

设 R 是环。

(1) 对 $M_R, {}_R N$, 取投射消解 $X \rightarrow M \rightarrow 0$ 与 $Y \rightarrow N \rightarrow 0$, 定义

$$\mathrm{Tor}_n^R(M, N) = L_n(M \otimes_R N) = H_n(\mathrm{Tot}(X \otimes_R Y)).$$

(2) 对 ${}_R M, {}_R N$, 取投射消解 $P \rightarrow M \rightarrow 0$ 与内射消解 $0 \rightarrow N \rightarrow Q$, 定义

$$\mathrm{Ext}_R^n(M, N) = R^n(\mathrm{Hom}_R(M, N)) = H^n(\mathrm{Tot}(\mathrm{Hom}_R(P, Q))).$$

类似地, 我们考虑函子 $\mathrm{ext}_R^n(-, N) : R\text{-Mod} \rightarrow \mathbf{Ab}$, 其定义为 $M \mapsto R^n(\mathrm{Hom}_R(M, N)) = H^n(\mathrm{Hom}_R(P, N))$. 其中 $P \rightarrow M \rightarrow 0$ 是投射消解。



定理 14.1

对任意 $n \geq 0$, 有自然同构 $\mathrm{Ext}_R^n(M, N) \cong \mathrm{ext}_R^n(M, N)$.



证明 回忆比较定理的右复形版本: 若 B, B' 是 Abelian 范畴 $\mathcal{A}$ 中的对象, $0 \rightarrow B \rightarrow Y$ 是右消解, $0 \rightarrow B' \rightarrow Y'$ 是内射消解, 并且给定态射 $f : B \rightarrow B'$, 则存在一个 $\mathrm{over} f$ 的链映射 $\check{f} : Y \rightarrow Y'$, 并且任意两个这样的链映射同伦。

令 $X \rightarrow M \rightarrow 0$ 为投射消解, $0 \rightarrow N \xrightarrow{\varepsilon} Y$ 为内射消解。注意右复形 $N^\bullet : N \rightarrow 0 \rightarrow \dots$ 是 N 的一个右消解, 因为 $0 \rightarrow N \xrightarrow{\mathrm{Id}_N} N \rightarrow 0$ 正合。我们有链映射 $\mathrm{Id}_X : X \rightarrow X$ 以及由比较定理有 $\theta : N^\bullet \rightarrow Y$, 其中 $\theta \mathrm{over} \mathrm{Id}_N$, 事实上 $\theta^0 = \varepsilon$. 这诱导映射 $\theta^* : \mathrm{Hom}_R(X, N) \rightarrow \mathrm{Hom}_R(X, Y)$, 从而诱导映射 $\Phi_n : \mathrm{ext}_R^n(M, N) \rightarrow \mathrm{Ext}_R^n(M, N)$, 并且该映射与连接同态相容。

先看 $n = 0$ 时的情形, 此时有如下的行正合的交换图:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_R(X_0, N) & \xrightarrow{\theta_0^*} & \mathrm{Hom}_R(X_0, Y^0) & \xrightarrow{\delta_0^2} & \mathrm{Hom}_R(X_0, Y^1) \\ & & d_0 \downarrow & & \downarrow \delta_0^1 & & \\ & & \mathrm{Hom}_R(X_1, N) & \xrightarrow{\theta_1^*} & \mathrm{Hom}_R(X_1, Y^0) & & \end{array}$$

由此 θ_0^* 诱导同构 $\Phi_0 : \mathrm{ext}_R^0(M, N) = \mathrm{Ker} d_0 \cong \mathrm{Ker} \delta_0^2 \cap \mathrm{Ker} \delta_0^1 = \mathrm{Ext}_R^0(M, N)$.

下面作归纳。假设定理对 $n - 1$ 时的情形成立, 考虑正合列 $0 \rightarrow K \rightarrow P \rightarrow M \rightarrow 0$, 其中 P 投射。于是得到两行长正合列以及自然交换图:

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathrm{ext}_R^{n-1}(P, N) & \longrightarrow & \mathrm{ext}_R^{n-1}(K, N) & \longrightarrow & \mathrm{ext}_R^n(M, N) & \longrightarrow & \mathrm{ext}_R^n(P, N) & \longrightarrow & \mathrm{ext}_R^n(K, N) \\ \varphi_1 \downarrow & & \varphi_2 \downarrow & & \varphi_3 \downarrow & & \varphi_4 \downarrow & & \varphi_5 \downarrow \\ \mathrm{Ext}_R^{n-1}(P, N) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}_R^{n-1}(K, N) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}_R^n(M, N) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}_R^n(P, N) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}_R^n(K, N) \end{array}$$

由 P 投射可知 φ_1, φ_4 是同构 (参考命题 4.3), 由归纳假设知 φ_2 是同构, 由五引理可知 φ_3 是单同态。因为 M 任意, 可知 φ_5 也是单同态。又由 φ_2, φ_4 同构, 且 φ_5 是单同态, 再由五引理得

到 φ_3 为满同态，从而为同构。这就完成了归纳。

设 F 是 p 个变量的函子，其中一些变量协变，一些变量反变。设 $S \subseteq \{1, \dots, p\}$ ，指标在 S 中的变量称为 **active variables** (活动变量)，其余变量称为 **passive variables** (被动变量)。

固定所有被动变量后，我们得到一个关于活动变量的函子 F_S ，于是可以考虑导出函子 $R^n F_S$ 。在活动变量上存在自然变换 $R^n_S F \rightarrow R^n F$ 。这些同态与每个活动变量的连接同态交换。

定理 14.2 (Cartan–Eilenberg)

给定任意函子 F ，下列条件等价：

- (a) 对任意 $n \geq 0$ ，映射 $R^n_S F \rightarrow R^n F$ 是同构。
- (b) 若所有协变活动变量都替换为内射模，所有反变活动变量都替换为投射模，则 F 作为被动变量的函子是正合的。



定义 14.2

一个多变量函子 F 称为 **right balanced** (右平衡的)，如果：

- (1) 当任意一个协变变量替换为内射模时， F 作为剩余变量的函子是正合的。
- (2) 当任意一个反变变量替换为投射模时， F 作为剩余变量的函子是正合的。

类似地，也可以定义 **left balanced** (左平衡的) 函子 (投射和内射交换)。



例 14.1

$- \otimes_R -$ 是左平衡的，而 $\text{Hom}_R(-, -)$ 是右平衡的。



Dimension of modules and rings

定义 14.3

设 R 是环， ${}_R M$ 是左 R -模。称 M 的 **projective dimension** (投射维数) $\leq n$ ，如果存在有限投射消解 $0 \rightarrow P_n \rightarrow \dots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$ 。满足这个条件的最小整数 n 称为 M 的投射维数，记为 $\text{pd}_R(M) = n$ ，若不存在这样的整数，则定义投射维数为 ∞ ，记为 $\text{pd}_R(M) = \infty$ 。并且通常我们把记号简写为 $\text{pd}(M)$ 。

对偶地，可以用内射消解定义 **injective dimension** (内射维数)，记为 $\text{id}_R(M)$ ，并且通常我们把记号简写为 $\text{id}(M)$ 。



注 (1) $\text{pd}(M) = 0$ 当且仅当 M 是非零投射模。

(2) $\text{id}(M) = 0$ 当且仅当 M 是非零内射模。

定理 14.3

对每个 ${}_R M$ 和 $n \geq 0$ ，下列条件等价：

- (a) M 的投射维数 $\leq n$ 。
- (b) $\text{Ext}_R^{n+1}(M, N) = 0$ 对所有 ${}_R N$ 成立。

(c) $\text{Ext}_R^n(M, -)$ 是右正合函子。

(d) 给定正合列 $0 \rightarrow K_{n-1} \rightarrow X_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow X_0 \rightarrow M \rightarrow 0$, 其中 $X_k, 0 \leq k < n$ 投射, 则有 K_{n-1} 投射。



证明 (a) $\Rightarrow$ (b) 令 $X \rightarrow M \rightarrow 0$ 为投射消解, 且对 $k > n$ 有 $X_k = 0$. 于是 $\text{Ext}_R^{n+1}(M, N) = H^{n+1}(\text{Hom}_R(X, N)) = 0$.

(b) $\Rightarrow$ (c) 对任意短正合列 $0 \rightarrow N' \rightarrow N \rightarrow N'' \rightarrow 0$, 它诱导长正合列

$$\text{Ext}_R^n(M, N') \rightarrow \text{Ext}_R^n(M, N) \rightarrow \text{Ext}_R^n(M, N'') \rightarrow \text{Ext}_R^{n+1}(M, N') = 0.$$

因此 $\text{Ext}_R^n(M, -)$ 右正合。

(c) $\Rightarrow$ (d) 对 n 归纳。若 $n = 0$, 则 $\text{Ext}_R^0(M, -) = \text{Hom}_R(M, -)$ 正合当且仅当 M 投射 (命题 4.3). 则任意正合列 $0 \rightarrow K \rightarrow P \rightarrow M \rightarrow 0$, 其中 P 投射, 都分裂正合, 故 K 是 P 的直和项, 因此 K 投射。设 $n > 0$ 且 $n - 1$ 时的情形成立。令 $N \rightarrow N''$ 为满同态。则有行正合交换图表:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Hom}_R(X_{n-1}, N) & \longrightarrow & \text{Hom}_R(K_{n-1}, N) & \longrightarrow & \text{Ext}_R^n(M, N) & \longrightarrow & 0 \\ \varphi_1 \downarrow & & \varphi_2 \downarrow & & \varphi_3 \downarrow & & \\ \text{Hom}_R(X_{n-1}, N'') & \longrightarrow & \text{Hom}_R(K_{n-1}, N'') & \longrightarrow & \text{Ext}_R^n(M, N'') & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

这里两行正合来自维数平移 (命题 11.1). 由于 X_{n-1} 投射, φ_1 是满同态; 由 (c) 知 φ_3 也是满同态。于是由五引理, φ_2 也是满同态。因此 $\text{Hom}_R(K_{n-1}, -)$ 右正合, 所以 K_{n-1} 投射。

(d) $\Rightarrow$ (a) 显然。

推论 14.1

若 ${}_R M$ 不是投射模, 且 $0 \rightarrow K \rightarrow P \rightarrow M \rightarrow 0$ 正合, 其中 P 投射, 则 $\text{pd}(M) = \text{pd}(K) + 1$.



推论 14.2

若 $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ 是正合列, 且 $\text{pd}(M'), \text{pd}(M'') \leq n$, 则 $\text{pd}(M) \leq n$.



证明 由正合列 $\text{Ext}_R^{n+1}(M'', N) \rightarrow \text{Ext}_R^{n+1}(M, N) \rightarrow \text{Ext}_R^{n+1}(M', N)$ 的正合性直接推出。

定理 14.4

对每个 ${}_R N$ 和 $n \geq 0$, 下列条件等价:

(a) N 的内射维数 $\leq n$.

(b) $\text{Ext}_R^{n+1}(M, N) = 0$ 对所有 ${}_R M$ 成立。

(c) $\text{Ext}_R^n(-, N)$ 是右正合函子。

(d) 给定正合列 $0 \rightarrow N \rightarrow Y^0 \rightarrow \cdots \rightarrow Y^{n-1} \rightarrow C^{n-1} \rightarrow 0$, 其中 $Y^k, 0 \leq k < n$ 内射, 则有 C^{n-1} 内射。



推论 14.3

若 $0 \rightarrow N' \rightarrow N \rightarrow N'' \rightarrow 0$ 是正合列, 且 $\text{id}(N'), \text{id}(N'') \leq n$, 则 $\text{id}(N) \leq n$.



推论 14.4

若 ${}_R N$ 不是内射模, 且 $0 \rightarrow N \rightarrow Q \rightarrow C \rightarrow 0$ 正合, 其中 Q 内射, 则 $\text{id}(N) = \text{id}(C) + 1$. 

定理 14.5

对环 R 和 $n \geq 0$, 下列条件等价:

- (a) 每个左 R -模的投射维数 $\leq n$.
- (b) 每个左 R -模的内射维数 $\leq n$.
- (c) $\text{Ext}_R^k = 0$ 对 $k > n$ 成立。
- (d) $\text{Ext}_R^{n+1} = 0$.
- (e) Ext_R^n 是右正合函子。



证明 (a) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (d) $\Leftrightarrow$ (e) 显然。(a) $\Leftrightarrow$ (d) 与 (b) $\Leftrightarrow$ (d) 由前两个定理得到。

定义 14.4

满足上述条件 (a)-(e) 的最小整数 $n \geq 0$ 称为 R 的 left global dimension (左全局维数), 记为 $\text{lgldim } R$.

类似地可以定义 right global dimension (右全局维数) (在 $\text{Mod-}R$ 中), 记为 $\text{rgldim } R$. 如果有 $\text{lgldim } R = \text{rgldim } R = n$, 则简记为 $\text{gldim } R = n$.



Semisimple rings

定义 14.5

设 R 是环, 左 R -模 M 称为 semisimple (半单的), 如果它是 simple modules (单模) 的直和。这里单模指除了自身和 0 外没有其他子模的非零模。



注 若 ${}_R M$ 是半单的, 则 M 的每个子模都是 M 的直和项。

定理-定义 14.1

对环 R , 若它满足下列等价条件, 则称 R 为 semisimple ring (半单环):

- (a) ${}_R R$ 是半单模。
- (b) R 的每个左理想都是 R 的直和项。
- (c) R 的每个左理想都是内射模。
- (d) 所有左 R -模都是半单模。
- (e) 所有左 R -模的短正合列 $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ 都分裂。
- (f) 所有左 R -模都是投射模。
- (g) 所有左 R -模都是内射模。
- (a') R_R 是半单模。



证明 (a) $\Leftrightarrow$ (b) 与 (d) $\Leftrightarrow$ (e) $\Leftrightarrow$ (f) 以及 (e) $\Leftrightarrow$ (g) 显然。(g) $\Rightarrow$ (c) 也显然。

(c) $\Rightarrow$ (b) 令 I 为 R 的左理想, 考虑正合列 $0 \rightarrow I \rightarrow R \rightarrow R/I \rightarrow 0$. 由于 I 内射, 该正合列分裂, 所以 I 是 R 的直和项。

(b) $\Rightarrow$ (g) 令 I 为 R 的左理想且为 R 的直和项。任取左 R -模 M , 则任意同态 $f: I \rightarrow M$ 都可以延拓为 $\tilde{f}: R \rightarrow M$. 事实上若 I 是 R 的直和项, 设投影 $R \xrightarrow{p} I$, 则复合 $R \xrightarrow{p} I \xrightarrow{f} M$ 给出延拓。于是 $f(r) = r\tilde{f}(1)$ 对所有 $r \in I$ 成立。由 Baer 判据可知 M 内射。

(a) $\Leftrightarrow$ (a') 由 Wedderburn–Artin 定理即得, 即 ${}_R R$ 半单当且仅当 R 是一些单 Artinian 环的积。

推论 14.5

环 R 的全局维数为 0 当且仅当 R 是半单环。



定义 14.6

对环 R , 若它满足下列等价条件, 则称 R 为 left hereditary (左遗传的):

- (a) 每个左理想都是投射模。
- (b) 投射左 R -模的每个子模都是投射模。
- (c) 内射左 R -模的每个商模都是内射模。



注 左遗传不能推出右遗传。

推论 14.6

环 R 的左全局维数 ≤ 1 当且仅当 R 是左遗传环。



定理 14.6

设 R 是环, x 是 R 中的中心正则元, 记 $S = R/(x)$. 若 M 是非零左 S -模且 $\text{pd}_S(M) < \infty$, 则 $\text{pd}_R(M) = 1 + \text{pd}_S(M)$.



证明 因为 $xM = 0$, 所以 M 不是投射 R -模, 故 $\text{pd}_R(M) \geq 1$. 剩下的部分留到下一节证明。

Lecture 15

我们继续证明上节的定理。

定理 15.1 (Theorem I)

设 R 是环, x 是 R 中的中心正则元, 记 $S = R/(x)$. 若 M 是非零左 S -模且 $\text{pd}_S(M) < \infty$, 则 $\text{pd}_R(M) = 1 + \text{pd}_S(M)$. ♡

证明 因为 $xM = 0$, 所以 M 不是投射 R -模, 故 $\text{pd}_R(M) \geq 1$. 若 M 是投射 S -模, 则 $\text{pd}_R(M) = \text{pd}_R(S) = 1$ (参考作业 2.5). 设 $\text{pd}_S(M) = n \geq 1$, 并假设结论对 $n-1$ 时的情形成立. 取 S -模正合列 $0 \rightarrow K \rightarrow P \rightarrow M \rightarrow 0$, 其中 P 投射. 于是有 $\text{pd}_S(M) = \text{pd}_S(K) + 1$. 由归纳假设, $\text{pd}_R(K) = 1 + \text{pd}_S(K) = \text{pd}_S(M) = n \geq 1$.

注意 $\text{pd}_R(P) = 1$. 考虑长正合列 $\cdots \rightarrow \text{Ext}_R^1(P, N) \rightarrow \text{Ext}_R^1(K, N) \rightarrow \text{Ext}_R^2(M, N) \rightarrow \text{Ext}_R^2(P, N)(=0) \rightarrow \text{Ext}_R^2(K, N) \rightarrow \text{Ext}_R^3(M, N) \rightarrow \text{Ext}_R^3(P, N)(=0) \rightarrow \cdots$, 因为 $\text{pd}_R(P) = 1$, 故 $\text{Ext}_R^m(P, N) = 0$ 对 $m \geq 2$ 成立, 因此 $\text{Ext}_R^m(K, N) \cong \text{Ext}_R^{m+1}(M, N)$ 对 $m \geq 2$ 成立. 于是 $\text{pd}_R(M) = \text{pd}_R(K) + 1$ 或 $1 = \text{pd}_R(M) = \text{pd}_R(K) = \text{pd}_S(M)$.

若 $\text{pd}_R(M) = 1 = \text{pd}_S(M)$, 考虑 R -模正合列 $0 \rightarrow B \rightarrow F \rightarrow M \rightarrow 0$, 其中 F 投射. 由 $\text{pd}_R(M) = 1$ 知 B 投射. 对函子 $S \otimes_R -$ 作用, 得到 S -模正合列 (参考推论 10.3)

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Tor}_1^R(S, M) & \longrightarrow & S \otimes_R B & \longrightarrow & S \otimes_R F \longrightarrow S \otimes_R M \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \parallel & & \parallel & \parallel \\ & & T & & B/xB & & F/xF & M \end{array}$$

其中 $S \otimes_R B = B/xB$ 与 $S \otimes_R F = F/xF$ 都是投射的, 若 $\text{pd}_S(M) \leq 2$, 则 ${}_S T$ 投射. 但是 $T = \text{Tor}_1^R(S, M) \cong \{a \in M \mid xa = 0\} = M$, 于是得到矛盾. 故结论成立.

定理 15.2 (Theorem II)

设 R 是环, $x \in R$ 是中心正则元, 记 $S = R/(x)$. 若 M 是左 R -模, 且 x 在 M 上为非零因子, 即 $a \neq 0$ 推出 $xa \neq 0, \forall a \in M$, 则 $\text{pd}_R(M) \geq \text{pd}_S(M'')$, 其中 $M'' = M/xM = S \otimes_R M$. ♡

证明 若 $\text{pd}_R(M) = \infty$, 则结论显然. 故设 $\text{pd}_R(M) = n < \infty$, 对 n 归纳.

若 $n = 0$, 即 M 是投射 R -模, 则 $M'' = S \otimes_R M$ 是投射 S -模, 所以结论成立.

若 $n > 0$, 则考虑 R -模正合列 $0 \rightarrow K \rightarrow P \rightarrow M \rightarrow 0$, 其中 P 投射. 则 $\text{pd}_R(K) = n - 1$. 由归纳假设, $\text{pd}_S(K/xK) \leq n - 1$. 对 $S \otimes_R -$ 作用, 得到 S -模正合列

$$0 \rightarrow \text{Tor}_1^R(S, M) \rightarrow K/xK \rightarrow P/xP \rightarrow M/xM \rightarrow 0.$$

其中 P/xP 投射. 由于 x 在 M 上是非零因子, 故 $\text{Tor}_1^R(S, M) = \{a \in M \mid xa = 0\} = 0$. 于是 $\text{pd}_S(M/xM) \leq 1 + \text{pd}_S(K/xK) \leq 1 + (n - 1) = n = \text{pd}_R(M)$.

对环 R 和左 R -模 M , 定义 $M[x] = R[x] \otimes_R M$. 注意 $R[x]$ 是以 $I = \{1, x, x^2, \dots\}$ 为基的自由 R -模, 并且 ${}_R M[x] = R[x] \otimes_R M \cong R^{(I)} \otimes_R M = (R \otimes_R M)^{(I)} = {}_R M^{(I)}$.

引理 15.1

$$\mathrm{pd}_{R[x]}(M[x]) = \mathrm{pd}_R(M).$$



证明 因为 x 在 $M[x]$ 上是非零因子, 由 Theorem II 可得 $\mathrm{pd}_{R[x]}(M[x]) \geq \mathrm{pd}_R(M)$.

另一方面, 若 $P \rightarrow M \rightarrow 0$ 是投射消解, 则对 $R[x] \otimes_R -$ 作用, 得到 $R[x]$ -模的投射消解 $R[x] \otimes_R P \rightarrow R[x] \otimes_R M \rightarrow 0$, 即 $R[x] \otimes_R P \rightarrow M[x] \rightarrow 0$ (因为 $R[x]$ 作为 R -模是自由的), 所以 $\mathrm{pd}_R(M) \geq \mathrm{pd}_{R[x]}(M[x])$. 故两边相等。

定理 15.3 (Hilbert's syzygy theorem)

$$\mathrm{gldim} R[x_1, \dots, x_m] = \mathrm{gldim} R + m.$$



证明 只需证明 $R[x]$ 的情形. 如果 $\mathrm{gldim} R = \infty$, 则由上一个引理可知 $\mathrm{gldim} R[x] = \infty$. 故设 $\mathrm{gldim} R = n < \infty$. 由 Theorem I 可得 $\mathrm{gldim} R[x] \geq \mathrm{gldim} R + 1$.

任取左 $R[x]$ -模 M , 令 $U = {}_R M$, 考虑 $R[x]$ -模正合列

$$0 \rightarrow R[x] \otimes_R U (= U[x]) \xrightarrow{\theta} R[x] \otimes_R U (= U[x]) \xrightarrow{\eta} M \rightarrow 0 \quad (*)$$

其中 η 为乘法映射, 而 θ 定义为 $\theta: U[x] \rightarrow U[x], t \otimes m \mapsto t(x \otimes m - 1 \otimes xm)$.

下面说明 $(*)$ 正合. 显然 $\eta\theta = 0$. 任一 $U[x]$ 中的非零元素 f 都有唯一多项式表示 $f = x^k \otimes m_k + \dots + x \otimes m_1 + 1 \otimes m_0$, 其中 $m_k \neq 0$. 因为 $\theta(f)$ 的首项为 $x^{k+1} \otimes m_k$, 所以 θ 是单射.

下面证明 $\mathrm{Ker} \eta = \mathrm{Im} \theta$. 对 $\deg f = k$ 作归纳. 若 $k = 0$, 则 $f = 1 \otimes m$, 且 $\eta(f) = m = 0$, 故 $f = 0 \in \mathrm{Im} \theta$. 若 $k \neq 0$, 令 $g = f - \theta(x^{k-1} \otimes m_k)$, 则 $\eta(f) = \eta(g)$, 且 g 的次数小于 f 的次数. 由归纳假设, 若 $\eta(g) = 0$ 则存在 h 使得 $g = \theta(h)$, 于是 $f = \theta(h + x^{k-1} \otimes m_k)$.

因此序列正合. 则参考作业 2.4(a) 可得

$$\mathrm{pd}_{R[x]} M \leq 1 + \mathrm{pd}_{R[x]}(R[x] \otimes_R U) = 1 + \mathrm{pd}_R(U) \leq 1 + n.$$

对所有 M 取上确界, 得到 $\mathrm{gldim} R[x] \leq 1 + n = 1 + \mathrm{gldim} R$.

定义 15.1

设 R 是环, M_R 是右 R -模. 称 M 的 flat dimension (平坦维数) $\leq n$, 如果存在有限平坦消解 $0 \rightarrow F_n \rightarrow \dots \rightarrow F_1 \rightarrow F_0 \rightarrow M \rightarrow 0$. 满足这个条件的最小整数 n 称为 M 的平坦维数, 记为 $\mathrm{fd}_R(M) = n$. 若不存在这样的整数, 则定义平坦维数为 ∞ , 记为 $\mathrm{fd}_R(M) = \infty$. 

定理 15.4

设 R 是环, M_R 是右 R -模, 设 $n \geq 0$, 则下列条件等价:

- (a) M 的平坦维数 $\leq n$.
- (b) $\mathrm{Tor}_{n+1}^R(M, N) = 0$ 对所有左 R -模 ${}_R N$ 成立.
- (c) $\mathrm{Tor}_n^R(M, -)$ 是左正合函子.
- (d) 给定正合列 $0 \rightarrow K_{n-1} \rightarrow X_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow X_0 \rightarrow M \rightarrow 0$, 其中 $X_k, 0 \leq k < n$ 平坦, 则有 K_{n-1} 平坦.



定理 15.5

设 R 是环, $M_R, {}_R N$ 为模, 则 $\text{Tor}_n^R(M, N)$ 可以用平坦消解计算。也就是说, 若 $F \rightarrow M \rightarrow 0$ 是平坦消解, 则 $\text{Tor}_n^R(M, N) = H_n(F \otimes_R N)$. 类似地, 若 $F' \rightarrow N \rightarrow 0$ 是平坦消解, 则 $\text{Tor}_n^R(M, N) = H_n(M \otimes_R F')$.



证明 对 n 归纳, 首先 $n = 0$ 时的情形显然。现在考虑一个如下的投射消解

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \rightarrow & P_n & \longrightarrow & P_{n-1} & \rightarrow & \cdots \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0 \\ & & \searrow & & \nearrow & & \\ & & & & K_{n-1} & & \end{array}$$

以及一个如下的平坦消解

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \rightarrow & F_n & \longrightarrow & F_{n-1} & \rightarrow & \cdots \rightarrow F_0 \rightarrow M \rightarrow 0 \\ & & \searrow & & \nearrow & & \\ & & & & T_{n-1} & & \end{array}$$

对于如下的交换图表:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & T_0 & \longrightarrow & F_0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow g & & \uparrow f & & \uparrow \text{Id} & & \\ 0 & \longrightarrow & K_0 & \longrightarrow & P_0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

由于 P_0 投射, 则推出 f 存在, 于是推出 g 存在。从而诱导如下的长正合列:

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & 0 & & & & & & & & \\ & & \parallel & & & & & & & & \\ \cdots & \rightarrow & \text{Tor}_1^R(F_0, N) & \rightarrow & \text{Tor}_1^R(M, N) & \rightarrow & T_0 \otimes_R N & \rightarrow & F_0 \otimes_R N & \rightarrow & M \otimes_R N \rightarrow 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \cdots & \rightarrow & \text{Tor}_1^R(P_0, N) & \rightarrow & \text{Tor}_1^R(M, N) & \rightarrow & K_0 \otimes_R N & \rightarrow & P_0 \otimes_R N & \rightarrow & M \otimes_R N \rightarrow 0 \\ & & \parallel & & & & & & & & \\ & & 0 & & & & & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & & 0 & & & & \\ & & & & & & \parallel & & & & \\ \cdots & \rightarrow & 0 & \rightarrow & \text{Tor}_{n+1}^R(M, N) & \xrightarrow{\cong} & \text{Tor}_n^R(T_0, N) & \rightarrow & \text{Tor}_n^R(F_0, N) & \rightarrow & \cdots \\ & & & & \cong \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ \cdots & \rightarrow & 0 & \rightarrow & \text{Tor}_{n+1}^R(M, N) & \xrightarrow{\cong} & \text{Tor}_n^R(K_0, N) & \rightarrow & \text{Tor}_n^R(P_0, N) & \rightarrow & \cdots \\ & & & & & & & & \parallel & & \\ & & & & & & & & 0 & & \end{array}$$

由此可得 $\text{Tor}_1^R(M, N) \cong \text{Ker}(T_0 \otimes_R N \rightarrow F_0 \otimes_R N) \cong H_1(F \otimes_R N)$. 且对 $n \geq 1$ 有 $\text{Tor}_n^R(T_0, N) \cong \text{Tor}_n^R(K_0, N)$. 因此结论对 $n = 1$ 时的情形也成立。假设 $n - 1$ 时的情形成立, 则当 $n \geq 2$ 时有 $\text{Tor}_n^R(M, N) \cong \text{Tor}_{n-1}^R(K_0, N) \cong \text{Tor}_{n-1}^R(T_0, N) = H_{n-1}(\tilde{F} \otimes_R N) = H_n(F \otimes_R N)$, 其中

$$\begin{array}{ccccccc} \tilde{F} : & \cdots & \longrightarrow & \tilde{F}_n & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow \tilde{F}_1 \longrightarrow \tilde{F}_0 \longrightarrow T_0 \longrightarrow 0 \\ & & & \parallel & & & \parallel & \parallel \\ & & & F_{n+1} & & & F_2 & F_1 \end{array}$$

是 T_0 的平坦消解。

第二部分

2026 春作业解答

Homework 1

习题 1.1 (Rotman P65 2.8(i))

Prove that a short exact sequence in $R\text{-Mod}$,

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \longrightarrow 0,$$

splits if and only if there exists $q : B \rightarrow A$ with $qi = 1_A$. (Note that q is a retraction $B \rightarrow \text{im } i$.)

证明 ($\Rightarrow$) 若短正合列分裂, 则存在同态 $j : C \rightarrow B$ 使得 $pj = 1_C$, 且 $B \cong A \oplus C$, 同构可取 $\Phi : A \oplus C \rightarrow B, (a, c) \mapsto i(a) + j(c)$. 令 $\Psi : B \rightarrow A \oplus C$ 为其逆同构, 而 $p\Phi(a, c) = p(i(a) + j(c)) = p(j(c)) = c, \forall a \in A, c \in C$, 故 $p\Phi = \pi_C$, 则 $p = \pi_C\Psi$, 令 $q = \pi_A\Psi : B \rightarrow A$, 则 $q(i(a)) = \pi_A(\Psi(i(a))) = \pi_A(a, 0) = a, \forall a \in A$, 从而 $qi = 1_A$.

($\Leftarrow$) 反之, 若有 $q : B \rightarrow A$ 满足 $qi = 1_A$. 我们构造 $j : C \rightarrow B$ 使 $pj = 1_C$. 由 p 满, 对任意 $c \in C$, 存在 $b \in B$ 使 $p(b) = c$. 定义 $j(c) := b - i(q(b))$. 需验证良定义: 若 b' 亦满足 $p(b') = c$, 则 $b - b' \in \text{Ker } p = \text{Im } i$, 故存在 $a \in A$ 使 $b - b' = i(a)$. 于是 $b - i(q(b)) - (b' - i(q(b')))) = i(a) - i(q(b) - q(b')) = i(a - q(i(a))) = 0$. 故 j 良定义且为 R -模同态, 并且 $p(j(c)) = p(b) - p(i(q(b))) = c - 0 = c, \forall c \in C$, 故 $pj = 1_C$. 从而短正合列分裂。

习题 1.2 (Rotman P68 2.24)

- (i) Prove that any family of R -maps $(f_j : U_j \rightarrow V_j)_{j \in J}$ can be assembled into an R -map $\varphi : \bigoplus_j U_j \rightarrow \bigoplus_j V_j$, namely, $\varphi : (u_j) \mapsto (f_j(u_j))$.
- (ii) Prove that φ is an injection if and only if each f_j is an injection.

证明 (i) 记 $\iota_j^U : U_j \rightarrow \bigoplus_k U_k$ 与 $\iota_j^V : V_j \rightarrow \bigoplus_k V_k$ 为典范嵌入, 以及 π_j^U, π_j^V 为典范投影. 定义 $g_j = \iota_j^V f_j, \forall j \in J$. 由直和的泛性质, 存在唯一的 R -模同态 $\varphi : \bigoplus_j U_j \rightarrow \bigoplus_j V_j$ 使得 $\varphi \iota_j^U = g_j, \forall j \in J$. 由于 $\bigoplus_j U_j$ 是直和, 任意 $u \in \bigoplus_j U_j$ 只有有限个分量非零, 我们可写 $u = \sum_j \iota_j^U(u_j)$ (有限和), 从而 $\varphi(u) = \sum_j \varphi(\iota_j^U(u_j)) = \sum_j \iota_j^V(f_j(u_j))$. 这恰对应于 $\varphi : (u_j) \mapsto (f_j(u_j))$.

(ii) 先证必要性, 若 φ 为单射, 取任意 j , 若 $f_j(u) = 0$, 则 $\varphi(\iota_j^U(u)) = \iota_j^V(f_j(u)) = 0$. 由 φ 为单射得 $\iota_j^U(u) = 0$, 而 ι_j^U 为嵌入, 故 $u = 0$, 从而 f_j 为单射. 再证充分性, 设每个 f_j 为单射, 若 $\varphi((u_j)) = 0$, 则对每个 j 取 π_j^V 得 $0 = \pi_j^V(\varphi((u_k))) = f_j(u_j)$, 故由 f_j 为单射知 $u_j = 0$ 对每个 j 成立, 从而 $(u_j) = 0$, 即 φ 为单射。

习题 1.3 (Rotman P95 2.31)

Assume that the following diagram commutes, and that the vertical arrows are isomorphisms.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A'' \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & B & \longrightarrow & B'' \longrightarrow 0 \end{array}$$

Prove that the bottom row is exact if and only if the top row is exact.

证明 设上行为 $0 \rightarrow A' \xrightarrow{u} A \xrightarrow{v} A'' \rightarrow 0$, 下行为 $0 \rightarrow B' \xrightarrow{u'} B \xrightarrow{v'} B'' \rightarrow 0$, 竖直同构为 $\alpha' : A' \rightarrow B'$, $\alpha : A \rightarrow B$, $\alpha'' : A'' \rightarrow B''$, 交换性给出 $\alpha u = u' \alpha'$, $\alpha'' v = v' \alpha$. 只需假设上行正合, 证明下行正合即可, 反向的证明是同理的。

(1) B' 处: 若 $u'(b') = 0$, 取 $a' = (\alpha')^{-1}(b')$, 则 $0 = u'(b') = u'(\alpha'(a')) = \alpha(u(a'))$. 由 α 为同构知 $u(a') = 0$, 再由 u 为单射得 $a' = 0$, 故 $b' = 0$. 从而 u' 为单射。

(2) B 处: 由 α, α' 均为同构, 我们有 $\alpha(\text{Im } u) = \text{Im}(\alpha u) = \text{Im}(u' \alpha') = \text{Im } u'$, 同理有 $\alpha(\text{Ker } v) = \text{Ker}(v \alpha^{-1}) = \text{Ker}(v' \alpha''^{-1}) = \text{Ker } v'$. 于是由 $\text{Im } u = \text{Ker } v$ 可知 $\text{Im } u' = \text{Ker } v'$.

(3) B'' 处: 我们有 v 是满射, 由 $v' = \alpha'' v \alpha^{-1}$ 及 α, α'' 均为同构可知 v' 是满射。

习题 1.4 (Rotman P96 2.32 (3×3 Lemma))

Consider the following commutative diagram in $R\text{-Mod}$ having exact columns.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A'' \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & B & \longrightarrow & B'' \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & C & \longrightarrow & C'' \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

If the bottom two rows are exact, prove that the top row is exact; if the top two rows are exact, prove that the bottom row is exact.

证明 设三个竖直的正合列分别为

$$0 \rightarrow A' \xrightarrow{a'} B' \xrightarrow{b'} C' \rightarrow 0, 0 \rightarrow A \xrightarrow{a} B \xrightarrow{b} C \rightarrow 0, 0 \rightarrow A'' \xrightarrow{a''} B'' \xrightarrow{b''} C'' \rightarrow 0.$$

再设水平的三行分别为

$$0 \rightarrow A' \xrightarrow{u_A} A \xrightarrow{v_A} A'' \rightarrow 0, 0 \rightarrow B' \xrightarrow{u_B} B \xrightarrow{v_B} B'' \rightarrow 0, 0 \rightarrow C' \xrightarrow{u_C} C \xrightarrow{v_C} C'' \rightarrow 0.$$

(1) 下两行正合 $\Rightarrow$ 上行正合: 先证 u_A 为单射, 若 $u_A(x) = 0$, 则交换性给出 $u_B(a'(x)) = a(u_A(x)) = 0$. 而 u_B, a' 均为单射, 故 $x = 0$, 于是 u_A 为单射。

再证 v_A 为满射, 取任意 $z \in A''$, 则 $a''(z) \in B''$, 由 v_B 为满射, 所以存在 $y \in B$ 使 $v_B(y) = a''(z)$. 令 $w = b(y) \in C$, 从而有 $v_C(w) = v_C(b(y)) = b''(v_B(y)) = b''(a''(z)) = 0$. 第三行正合给出 $\text{Ker } v_C = \text{Im } u_C$, 故存在 $w' \in C'$ 使 $u_C(w') = w$. 由第一列正合有 $b' : B' \rightarrow C'$ 为满射, 取 $y' \in B'$ 使 $b'(y') = w'$, 令 $\tilde{y} = y - u_B(y') \in B$, 则 $b(\tilde{y}) = b(y) - b(u_B(y')) = w - u_C(b'(y')) = w - u_C(w') = 0$. 则由第二列正合得 $\tilde{y} \in \text{Im } a$, 存在 $x \in A$ 使 $a(x) = \tilde{y}$. 于是 $a''(v_A(x)) = v_B(a(x)) = v_B(\tilde{y}) = v_B(y) - v_B(u_B(y')) = a''(z) - 0 = a''(z)$. 由 a'' 为单射得 $v(x) = z$, 从而 v 为满射。

最后证 $\text{Im } u_A = \text{Ker } v_A$. 由 $a'' v_A u_A(x) = v_B u_B a'(x) = 0, \forall x \in A'$, 且 a'' 为单射, 于是

$v_A u_A = 0$, 从而 $\text{Im } u_A \subseteq \text{Ker } v_A$. 现取 $x \in A$ 满足 $v_A(x) = 0$, 则 $v_B(a(x)) = a''(v_A(x)) = 0$, 故 $a(x) \in \text{Ker } v_B = \text{Im } u_B$. 取 $y' \in B'$ 使 $u_B(y') = a(x)$. 则 $u_C b'(y') = b(u_B(y')) = b(a(x)) = 0$. 由 u_C 单, 于是 $y' \in \text{Ker } b' = \text{Im } a'$, 取 $x' \in A'$ 使 $a'(x') = y'$. 于是 $a(u_A(x') - x) = a(u_A(x')) - a(x) = u_B(a'(x')) - u_B(y') = 0$. 由 a 为单射得 $u_A(x') = x$, 故 $x \in \text{Im } u_A$. 从而 $\text{Ker } v_A \subseteq \text{Im } u_A$. 综上所述我们便得到了上行正合。

(2) 上两行正合 $\Rightarrow$ 下行正合: 证明与 (1) 完全对偶。

习题 1.5 (Rotman P321 5.60)

We call $\varinjlim_I F$ or $\varprojlim_I F$ finite if the index set I is finite. Prove that if $\mathcal{A}$ is an additive category having kernels and cokernels, then $\mathcal{A}$ has all finite inverse limits and direct limits. Conclude that $\mathcal{A}$ has pullbacks, pushouts, equalizers, and coequalizers.

证明 设 $F: I \rightarrow \mathcal{A}$ 是有限图。由于 $\mathcal{A}$ 是加性范畴, 有限双积存在, 所以有限积与有限余积都存在。先构造 $\lim_I F$. 令 $P = \prod_{i \in I} F(i)$, $Q = \prod_{\alpha: i \rightarrow j} F(j)$. 记 $\pi_i: P \rightarrow F(i)$ 与 $\pi_\alpha: Q \rightarrow F(j)$ 为积投影。对每个箭头 $\alpha: i \rightarrow j$, 两族态射 $F(\alpha)\pi_i, \pi_j: P \rightarrow F(j)$ 由 Q 的积泛性质给出态射 $u, v: P \rightarrow Q$, 使得 $\pi_\alpha u = F(\alpha)\pi_i, \pi_\alpha v = \pi_j$. 令 $L = \text{Ker}(u - v)$, 核映射记为 $k: L \rightarrow P$, 并令 $p_i = \pi_i k: L \rightarrow F(i)$. 因为 $(u - v)k = 0$, 所以 $uk = vk$. 于是对每个 $\alpha: i \rightarrow j$ 都有 $F(\alpha)p_i = F(\alpha)\pi_i k = \pi_\alpha uk = \pi_\alpha vk = \pi_j k = p_j$. 故 (L, p_i) 是一个锥。

下面验证泛性质。设 (T, t_i) 是任意锥, 即 $t_i: T \rightarrow F(i)$ 且对每个 $\alpha: i \rightarrow j$ 有 $F(\alpha)t_i = t_j$. 由 P 的积泛性质, 存在唯一态射 $t: T \rightarrow P$, 使得 $\pi_i t = t_i$. 于是 $\pi_\alpha ut = F(\alpha)\pi_i t = F(\alpha)t_i = t_j = \pi_j t = \pi_\alpha vt$, 故 $ut = vt$, 即 $(u - v)t = 0$. 由核的泛性质, 存在唯一态射 $\bar{t}: T \rightarrow L$, 使得 $k\bar{t} = t$. 此时 $p_i \bar{t} = \pi_i k\bar{t} = \pi_i t = t_i$. 唯一性也由核的泛性质推出。故 L 满足逆极限的泛性质, 也即为 $L \cong \lim_I F$.

再构造 $\text{colim}_I F$. 令 $P' = \coprod_{i \in I} F(i)$, $Q' = \coprod_{\alpha: i \rightarrow j} F(i)$. 记 $\iota_i: F(i) \rightarrow P'$ 与 $\eta_\alpha: F(i) \rightarrow Q'$ 为余积嵌入。对每个箭头 $\alpha: i \rightarrow j$, 两族态射 $\iota_j F(\alpha), \iota_i: F(i) \rightarrow P'$ 由 Q' 的余积泛性质给出态射 $u', v': Q' \rightarrow P'$, 使得 $u'\eta_\alpha = \iota_j F(\alpha), v'\eta_\alpha = \iota_i$. 令 $C = \text{Coker}(u' - v')$, 余核映射记为 $q: P' \rightarrow C$, 并令 $c_i = q\iota_i: F(i) \rightarrow C$. 因为 $q(u' - v') = 0$, 所以 $qu' = qv'$. 于是对每个 $\alpha: i \rightarrow j$, 有 $c_j F(\alpha) = q\iota_j F(\alpha) = qu'\eta_\alpha = qv'\eta_\alpha = q\iota_i = c_i$. 故 (C, c_i) 是一个余锥。

下面验证泛性质。设 (T, s_i) 是任意余锥, 即 $s_i: F(i) \rightarrow T$ 且对每个 $\alpha: i \rightarrow j$ 有 $s_j F(\alpha) = s_i$. 由 P' 的余积泛性质, 存在唯一态射 $s: P' \rightarrow T$, 使得 $s\iota_i = s_i$. 于是 $su'\eta_\alpha = s\iota_j F(\alpha) = s_j F(\alpha) = s_i = s\iota_i = sv'\eta_\alpha$, 故 $su' = sv'$, 即 $s(u' - v') = 0$. 由余核的泛性质, 存在唯一态射 $\bar{s}: C \rightarrow T$, 使得 $\bar{s}q = s$. 此时 $\bar{s}c_i = \bar{s}q\iota_i = s\iota_i = s_i$. 唯一性也由余核的泛性质推出。故 C 满足正极限的泛性质, 也即为 $C \cong \text{colim}_I F$.

因此有限逆极限与有限正极限都存在。特别地, pullback 和 equalizer 作为有限逆极限存在, pushout 和 coequalizer 作为有限正极限存在。

Homework 2

习题 2.1

计算 $\text{Tor}_n^{\mathbb{Z}_6}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2)$.



解 令 $R = \mathbb{Z}_6$, 把 $\mathbb{Z}_2$ 视为 R -模, 我们有 $\mathbb{Z}_2 \cong R/(2)$. 我们验证如下序列是 R -模自由消解:

$$\cdots \xrightarrow{\cdot 3} R \xrightarrow{\cdot 2} R \xrightarrow{\cdot 3} R \xrightarrow{\cdot 2} R \longrightarrow R/(2) \longrightarrow 0.$$

首先在 R 中有 $2 \cdot 3 = 0 = 3 \cdot 2$, 并且我们有 $\text{Ker}(\cdot 2) = 3R = \text{Im}(\cdot 3)$, $\text{Ker}(\cdot 3) = 2R = \text{Im}(\cdot 2)$. 故如上序列确实为一个自由消解, 从而是投射消解. 将其与 $R/(2)$ 做张量积, 记 $M = R/(2) \cong \mathbb{Z}_2$, 则 $\cdot 2$ 在 M 上为 0, $\cdot 3$ 在 M 上为 Id , 故得到复形 $\cdots \xrightarrow{\text{Id}} M \xrightarrow{0} M \xrightarrow{\text{Id}} M \xrightarrow{0} M \rightarrow 0$. 于是 $\text{Tor}_0^{\mathbb{Z}_6}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2) \cong M \cong \mathbb{Z}_2$. 而对 $n \geq 1$, 容易验证 $\text{Tor}_n^{\mathbb{Z}_6}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2) = 0$.

习题 2.2

设 $k = \mathbb{C}$, $R = k\langle x, y \rangle / (yx - \lambda xy)$, $0 \neq \lambda \in k$. 计算 $\text{Ext}_R^n(k, R)$.



解 可以把 k 视为左 R -模 $R/(x, y)$. 我们验证如下序列是 R -模投射消解:

$$0 \rightarrow R \xrightarrow{d_2} R^2 \xrightarrow{d_1} R \rightarrow k \rightarrow 0.$$

其中 $d_1(a, b) = ax + by$, $d_2(r) = (ry, -\lambda rx)$. 首先 $d_1 d_2(r) = r y x - \lambda r x y = r(yx - \lambda xy) = 0$, 所以如上序列是复形. 由关系 $yx = \lambda xy$ 可知 R 中任意元素都可以唯一写成 $\sum_{i,j \geq 0} c_{ij} x^i y^j$ 的形式, 则若 $(a, b) \in \text{Ker } d_1$, 设 $a = \sum_{i,j \geq 0} a_{ij} x^i y^j$, $b = \sum_{i,j \geq 0} b_{ij} x^i y^j$, 则 $ax + by = \sum_{i,j \geq 0} a_{ij} \lambda^j x^{i+1} y^j + \sum_{i,j \geq 0} b_{ij} x^i y^{j+1} = 0$, 于是有 a 中所有 y 次数为 0 的项均为 0, 从而存在 $r \in R$ 使得 $a = ry$. 故 $(\lambda rx + b)y = 0$, 从而 $b = -\lambda rx$, 则 $(a, b) = d_2(r)$, 故 $\text{Ker } d_1 = \text{Im } d_2$. 类似地可验证 d_2 是单射, 同时显然有 $\text{Im } d_1 = (x, y) = \text{Ker}(R \rightarrow k)$. 故其确实为 k 的投射消解. 对其施加 $\text{Hom}_R(-, R)$, 并利用 $\text{Hom}_R(R, R) \cong R$ 和 $\text{Hom}_R(R^2, R) \cong R^2$ 可得

$$0 \rightarrow R \xrightarrow{\delta^0} R^2 \xrightarrow{\delta^1} R \rightarrow 0.$$

其中 $\delta^0(t) = (xt, yt)$, $\delta^1(a, b) = ya - \lambda xb$.

若 $t \in \text{Ker } \delta^0$, 则 $xt = yt = 0$. 由上述唯一形式知 $t = 0$. 因此 $\text{Ext}_R^0(k, R) = 0$.

若 $(a, b) \in \text{Ker } \delta^1$, 则 $ya = \lambda xb$. 把 a, b 写成如上的唯一形式, 与上述过程同理可得 a 中 x 次数为 0 的项全为 0, 从而存在 $t \in R$ 使得 $a = xt$. 代入 $ya = \lambda xb$ 得 $\lambda xyt = \lambda xb$. 于是 $b = yt$. 故 $(a, b) = (xt, yt) = \delta^0(t)$, 故 $\text{Ker } \delta^1 = \text{Im } \delta^0$. 因此 $\text{Ext}_R^1(k, R) = 0$.

由 $\delta^1(a, b) = ya - \lambda xb$ 可知 $\text{Im } \delta^1 = yR + xR$. 因此 $\text{Ext}_R^2(k, R) \cong R/(yR + xR) \cong k$.

由所取的投射消解可知 $\text{pd}_R k \leq 2$, 故 $n \geq 3$ 时 $\text{Ext}_R^n(k, R) = 0$.

习题 2.3

设 $k = \mathbb{C}$, $R = k[x]/(x^2)$. 计算内射维数 $\text{id}_R(R)$ 和整体维数 $\text{gldim}_R R$.



解 先证明 $\text{id}_R(R) = 0$. 由 Baer 判据, 只需证明 R 的任意理想 I 上的 R -模同态 $f: I \rightarrow R$ 都可

以延拓到 $\tilde{f}: R \rightarrow R$. 先确定 R 的理想. R 中任意元素可写为 $a + bx$, 且 $x^2 = 0$. 若 $a + bx \in I$ 且 $a \neq 0$, 则 $(a + bx)a^{-1}(1 - bx/a) = 1$, 故 $a + bx$ 为单位, 从而 $I = R$. 于是 R 的非零真理想只有 (x) . 因此只需考虑 $I = (x)$ 的情形. 设 $f: (x) \rightarrow R$ 为 R -模同态, 它由 $f(x)$ 决定, 并且 $0 = f(x^2) = xf(x)$. 设 $f(x) = a + bx$, 则 $xf(x) = ax = 0$, 故 $a = 0$. 因此 $f(x) = bx$. 定义 $\tilde{f}: R \rightarrow R$ 为 $\tilde{f}(1) = b$, 则 $\tilde{f}(x) = xb = bx = f(x)$, 所以 $\tilde{f}$ 是 f 的延拓, 故 $\text{id}_R(R) = 0$.

再证明 $\text{gldim}_R R = \infty$. 考虑单模 $k \cong R/(x)$. 我们验证如下序列是 R -模自由消解:

$$\cdots \xrightarrow{x} R \xrightarrow{x} R \xrightarrow{x} R \rightarrow k \rightarrow 0.$$

因为 $\text{Ker}(\cdot x) = (x) = \text{Im}(\cdot x)$, 所以该序列正合, 其确实为一个自由消解, 从而是投射消解. 对其施加 $\text{Hom}_R(-, k)$, 并利用 $\text{Hom}_R(R, k) \cong k$ 以及 x 在 $k = R/(x)$ 上作用为 0, 可以得到

$$0 \rightarrow k \xrightarrow{0} k \xrightarrow{0} k \xrightarrow{0} \cdots$$

于是对所有 $n \geq 0$ 都有 $\text{Ext}_R^n(k, k) \cong k$. 若 $\text{pd}_R(k)$ 有限, 则对充分大的 n 应有 $\text{Ext}_R^n(k, k) = 0$, 矛盾. 因此 $\text{pd}_R(k) = \infty$. 从而 $\text{gldim}_R R = \infty$.

习题 2.4

考虑左 R -模的正合列

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0.$$

证明

- (a) $\text{pd}_R(M'') \leq 1 + \max\{\text{pd}_R(M), \text{pd}_R(M')\}$.
- (b) 如果 $\text{pd}_R(M') < \text{pd}_R(M)$, 则 $\text{pd}_R(M'') = \text{pd}_R(M)$.
- (c) 如果 $\text{pd}_R(M') > \text{pd}_R(M)$, 则 $\text{pd}_R(M'') = \text{pd}_R(M') + 1$.
- (d) 如果 $\text{fd}_R(M') = n < \infty$ 且 $\text{fd}_R(M'') \leq n$, 则 $\text{fd}_R(M) = n$.



证明 对任意左 R -模 N , 对原正合列施加函子 $\text{Ext}_R^n(-, N)$ 可以得到长正合列.

(a) 设 $t = \max\{\text{pd}_R(M), \text{pd}_R(M')\}$. 若 $n \geq t + 2$, 则 $\text{Ext}_R^n(M, N) = 0$ 且 $\text{Ext}_R^{n-1}(M', N) = 0$. 由长正合列片段 $\text{Ext}_R^{n-1}(M', N) \rightarrow \text{Ext}_R^n(M'', N) \rightarrow \text{Ext}_R^n(M, N)$ 知 $\text{Ext}_R^n(M'', N) = 0$ 对所有左 R -模 N 成立, 故 $\text{pd}_R(M'') \leq t + 1 = 1 + \max\{\text{pd}_R(M), \text{pd}_R(M')\}$.

为证明 (b) (c), 先给出下面两个标准不等式, 它们同样是由长正合列得到的:

$$\text{pd}_R(M) \leq \max\{\text{pd}_R(M'), \text{pd}_R(M'')\}, \text{pd}_R(M') \leq \max\{\text{pd}_R(M), \text{pd}_R(M'') - 1\}.$$

对第一个不等式: 若 $n > \max\{\text{pd}_R(M'), \text{pd}_R(M'')\}$, 则 $\text{Ext}_R^n(M', N) = \text{Ext}_R^n(M'', N) = 0$, 由 $\text{Ext}_R^n(M'', N) \rightarrow \text{Ext}_R^n(M, N) \rightarrow \text{Ext}_R^n(M', N)$ 正合得 $\text{Ext}_R^n(M, N) = 0$.

对第二个不等式: 若 $n > \max\{\text{pd}_R(M), \text{pd}_R(M'') - 1\}$, 则 $\text{Ext}_R^n(M, N) = 0$ 且 $\text{Ext}_R^{n+1}(M'', N) = 0$, 由 $\text{Ext}_R^n(M, N) \rightarrow \text{Ext}_R^n(M', N) \rightarrow \text{Ext}_R^{n+1}(M'', N)$ 正合得 $\text{Ext}_R^n(M', N) = 0$.

(b) 若 $\text{pd}_R(M') < \text{pd}_R(M) = m < \infty$. 则由第一个不等式可知 $m \leq \text{pd}_R(M'')$. 另一方面我们可以加强 (a) 的结论为 $\text{pd}_R(M'') \leq \max\{\text{pd}_R(M), \text{pd}_R(M') + 1\}$. 从而有 $\text{pd}_R(M'') \leq m$, 故 $\text{pd}_R(M'') = m = \text{pd}_R(M)$. 而若 $\text{pd}_R(M) = \infty$, 假设 $\text{pd}_R(M'') < \infty$, 则由第一个不等式可知 $\text{pd}_R(M') = \infty$. 矛盾. 故此时也有 $\text{pd}_R(M') = \text{pd}_R(M)$.

(c) 若 $\text{pd}_R(M') > \text{pd}_R(M) = m$, 则记 $\text{pd}_R(M') = m + r$, 其中 $r \geq 1$ 且可取 ∞ . 由不等式 $\text{pd}_R(M') \leq \max\{\text{pd}_R(M), \text{pd}_R(M'') - 1\}$ 知 $m + r \leq \text{pd}_R(M'') - 1$, 即 $\text{pd}_R(M'') \geq \text{pd}_R(M') + 1$. 再由 (a) 得 $\text{pd}_R(M'') \leq 1 + \max\{m, \text{pd}_R(M')\} = \text{pd}_R(M') + 1$, 从而 $\text{pd}_R(M'') = \text{pd}_R(M') + 1$.
(d) 对任意右 R -模 X , 对短正合列施加 $\text{Tor}_n^R(X, -)$ 得到长正合列, 从而同理可得

$$\text{fd}_R(M') \leq \max\{\text{fd}_R(M), \text{fd}_R(M'') - 1\}, \text{fd}_R(M) \leq \max\{\text{fd}_R(M'), \text{fd}_R(M'')\}.$$

若 $\text{fd}_R(M') = n < \infty$ 且 $\text{fd}_R(M'') \leq n$, 则第二个不等式给出 $\text{fd}_R(M) \leq n$. 若反设 $\text{fd}_R(M) \leq n - 1$, 则第一个不等式推出 $n = \text{fd}_R(M') \leq n - 1$. 矛盾。故 $\text{fd}_R(M) = n$.

习题 2.5

设 N, N' 为左 R -模, $M = N \oplus N'$. 证明 $\text{pd}_R(N) \leq \text{pd}_R M$.



证明 设 $M = N \oplus N'$. 对任意 R -模 X 与任意 $n \geq 0$, 容易验证 $\text{Ext}_R^n(-, X)$ 对直和的可加性, 于是有 $\text{Ext}_R^n(M, X) \cong \text{Ext}_R^n(N, X) \oplus \text{Ext}_R^n(N', X)$. 若 $\text{pd}_R(M) = m$, 则任取 $n > m$, 对任意的 X 有 $\text{Ext}_R^n(M, X) = 0$, 从而 $\text{Ext}_R^n(N, X) = 0$. 故 $\text{pd}_R(N) \leq m = \text{pd}_R(M)$.

Homework 3

习题 3.1

Let $F : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : G$ be an adjoint pair.

1. If G carries epimorphisms to epimorphisms, then F preserves projective objects.
2. If F carries monomorphisms to monomorphisms, then G preserves injective objects.



证明 设 F 为左伴随函子, G 为右伴随函子, 于是对任意的 $X \in \mathcal{C}$ 与 $Y \in \mathcal{D}$ 我们有自然同构 $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(FX, Y) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, GY)$.

(1) 设 P 是 $\mathcal{C}$ 中的投射对象。要证 FP 是 $\mathcal{D}$ 中的投射对象, 只需证明对任意满态射 $e : Y \rightarrow Z$, 诱导映射 $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(FP, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FP, Z)$ 是满射。由假设, $G(e) : GY \rightarrow GZ$ 仍为满态射。由于 P 投射, 映射 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(P, GY) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(P, GZ)$ 满射。由伴随同构, 这正对应于 $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(FP, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FP, Z)$ 满射, 故 FP 投射。

(2) 设 I 是 $\mathcal{D}$ 中的内射对象。要证 GI 是 $\mathcal{C}$ 中的内射对象, 只需证明对任意单态射 $m : X \rightarrow Y$, 诱导映射 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, GI) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, GI)$ 是满射。由假设, $F(m) : FX \rightarrow FY$ 仍为单态射。由于 I 内射, 映射 $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(FY, I) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FX, I)$ 满射。由伴随同构, 这正对应于 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, GI) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, GI)$ 满射, 故 GI 内射。这样我们就完成了证明。

习题 3.2

Let $X_i \rightarrow Y_i \rightarrow Z_i \rightarrow \Sigma X_i, i \in I$ be a family of triangles in a triangulated category $\mathcal{T}$. Prove that their product and coproduct (if exist) are also triangles.



证明 设给定三角为 $X_i \xrightarrow{f_i} Y_i \xrightarrow{g_i} Z_i \xrightarrow{h_i} \Sigma X_i, i \in I$. 先证余积情形。设余积存在, 并记 $f = \coprod_{i \in I} f_i : \coprod_{i \in I} X_i \rightarrow \coprod_{i \in I} Y_i$. 由 TR2, 可将 f 补成三角 $\coprod_{i \in I} X_i \rightarrow \coprod_{i \in I} Y_i \rightarrow Z \rightarrow \Sigma(\coprod_{i \in I} X_i)$. 对每个 i , 余积嵌入 $\iota_i^X : X_i \rightarrow \coprod_j X_j$ 与 $\iota_i^Y : Y_i \rightarrow \coprod_j Y_j$ 构成交换方块, 由 (TR3), 可将其延拓为三角之间的态射, 从而得到态射 $\alpha_i : Z_i \rightarrow Z$. 由余积的泛性质, 存在唯一态射 $\alpha : \coprod_i Z_i \rightarrow Z$.

现证明 α 为同构。任取 $W \in \mathcal{T}$, 由于 $\text{Hom}_{\mathcal{T}}(\coprod_i A_i, W) \cong \prod_i \text{Hom}_{\mathcal{T}}(A_i, W)$, 对各个给定三角作用函子 $\text{Hom}_{\mathcal{T}}(-, W)$, 并取直积, 可得一条长正合列。另一方面, 由三角 $\coprod_i X_i \rightarrow \coprod_i Y_i \rightarrow Z \rightarrow \Sigma(\coprod_i X_i)$ 亦得到长正合列。两条长正合列之间存在自然交换图, 除 $\text{Hom}(Z, W)$ 与 $\text{Hom}(\coprod_i Z_i, W)$ 外, 其余对应项均为同构。由五引理可得 $\text{Hom}(Z, W) \cong \text{Hom}(\coprod_i Z_i, W)$. 该同构关于 W 自然。由 Yoneda 引理知 α 为同构。故 $\coprod_i X_i \rightarrow \coprod_i Y_i \rightarrow \coprod_i Z_i \rightarrow \Sigma(\coprod_i X_i)$ 为三角。积的情形完全类似。

习题 3.3

Given a category I and an Abelian category $\mathcal{A}$, show that the functor category $\mathcal{A}^I := \text{Fun}(I, \mathcal{A})$ is also an Abelian category.



证明 $\text{Fun}(I, \mathcal{A})$ 中的对象是函子 $F : I \rightarrow \mathcal{A}$, 态射是自然变换。因为 $\mathcal{A}$ 是加性范畴, 所以自

然变换可逐点相加, 从而 $\text{Fun}(I, \mathcal{A})$ 也是加性范畴。设 $\eta: F \rightarrow G$ 是自然变换。对每个 $i \in I$, 取 $K(i) = \text{Ker}(\eta_i: F(i) \rightarrow G(i))$ 。若 $\alpha: i \rightarrow j$ 是 I 中的态射, 由自然性有 $G(\alpha)\eta_i = \eta_j F(\alpha)$, 所以 $F(\alpha)$ 把 $\text{Ker } \eta_i$ 送入 $\text{Ker } \eta_j$ 。由核的泛性质得到态射 $K(\alpha): K(i) \rightarrow K(j)$ 。这样得到函子 $K: I \rightarrow \mathcal{A}$, 并且 $K \rightarrow F$ 满足函子范畴中核的泛性质。因此 $\text{Ker } \eta$ 逐点存在。同理对每个 $i \in I$ 取 $Q(i) = \text{Coker } \eta_i$, 由余核的泛性质可诱导 $Q(\alpha): Q(i) \rightarrow Q(j)$, 则得到函子 $Q: I \rightarrow \mathcal{A}$ 。自然变换 $G \rightarrow Q$ 满足函子范畴中余核的泛性质, 因此 $\text{Coker } \eta$ 逐点存在。最后由 $\mathcal{A}$ 是 Abelian 范畴, 对每个 i 都有典范同构 $\text{Coim } \eta_i \cong \text{Im } \eta_i$ 。像与余像也逐点构造, 且这些同构关于 i 自然, 故在函子范畴中有 $\text{Coim } \eta \cong \text{Im } \eta$ 。因此 $\text{Fun}(I, \mathcal{A})$ 是 Abelian 范畴。

习题 3.4

Let I be the category $(1 \xrightarrow{\alpha} 2)$. Let $\mathcal{T}$ be a nonzero additive category and X a nonzero object of $\mathcal{T}$. Consider two functors $F, G: I \rightarrow \mathcal{T}$, which are defined as

$$F(1) = F(2) = X, F(\alpha) = \text{id}_X, G(1) = X, G(2) = 0, G(\alpha) = 0.$$

(1) Prove that the following commutative diagram is an epimorphism in the category $\text{Fun}(I, \mathcal{T})$:

$$\begin{array}{ccc} F(1) & \xrightarrow{\text{id}_X} & F(2) \\ \text{id}_X \downarrow & & \downarrow 0 \\ G(1) & \xrightarrow{0} & G(2) \end{array}$$

(2) If moreover $\mathcal{T}$ is a triangulated category, prove that $\text{Fun}(I, \mathcal{T})$ is not a triangulated category (Hint: epimorphisms in triangulated category split).

This elegant example demonstrates that the functor category, even with a triangulated codomain, may not necessarily be triangulated itself.

证明 (1) 题中图表给出一个自然变换 $\eta: F \rightarrow G$, 其中 $\eta_1 = \text{id}_X: F(1) = X \rightarrow G(1) = X$ 以及 $\eta_2 = 0: F(2) = X \rightarrow G(2) = 0$ 。自然性即为题中方块交换。要证 η 是满态射。设 $H: I \rightarrow \mathcal{T}$ 为任意函子, 且 $\sigma, \tau: G \rightarrow H$ 为自然变换并满足 $\sigma\eta = \tau\eta$ 。在对象 1 处有 $\sigma_1\eta_1 = \tau_1\eta_1$, 由于 $\eta_1 = \text{id}_X$, 得 $\sigma_1 = \tau_1$ 。在对象 2 处, 因为 $G(2) = 0$, 从 0 到 $H(2)$ 的态射唯一, 所以 $\sigma_2 = \tau_2$ 。因此 $\sigma = \tau$, 故 η 是 $\text{Fun}(I, \mathcal{T})$ 中的满态射。

(2) 反设 $\text{Fun}(I, \mathcal{T})$ 是三角范畴。由提示, 三角范畴中的满态射必分裂, 因此 $\eta: F \rightarrow G$ 应有右逆, 即存在自然变换 $\theta: G \rightarrow F$ 使 $\eta\theta = \text{id}_G$ 。在对象 1 处, $\eta_1\theta_1 = \text{id}_{G(1)} = \text{id}_X$ 。由于 $\eta_1 = \text{id}_X$, 故 $\theta_1 = \text{id}_X$ 。另一方面, 对 I 中的箭头 $\alpha: 1 \rightarrow 2$, 自然性给出 $F(\alpha)\theta_1 = \theta_2 G(\alpha)$ 。代入 $F(\alpha) = \text{id}_X$ 与 $G(\alpha) = 0$, 得到 $\theta_1 = 0$ 。于是 $\text{id}_X = 0$, 这说明 X 是零对象, 矛盾。因此 $\text{Fun}(I, \mathcal{T})$ 不可能是三角范畴。

习题 3.5

Let $\mathcal{T}$ be a triangulated, $\mathcal{A}$ be an Abelian category and $H: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{A}$ be a cohomological functor. Prove that the full subcategory of $\mathcal{T}$ consisting of objects $\{X \in \mathcal{T}, H^i(X) = 0, \forall i \in \mathbb{Z}\}$ is a triangulated category.

证明 我们记 $\mathcal{S} = \{X \in \mathcal{T} \mid H^i(X) = 0, \forall i \in \mathbb{Z}\}$, 其中 $H^i(X)$ 按通常方式记为 $H(\Sigma^i X)$. 显然 $\mathcal{S}$ 是 $\mathcal{T}$ 的满子范畴, 且对同构封闭. 先证 $\mathcal{S}$ 对平移封闭. 若 $X \in \mathcal{S}$, 则对任意 $i \in \mathbb{Z}$ 有 $H^i(\Sigma X) = H^{i+1}(X) = 0$, 故 $\Sigma X \in \mathcal{S}$. 同理 $\Sigma^{-1}X \in \mathcal{S}$. 再证 $\mathcal{S}$ 对锥封闭. 设 $f: X \rightarrow Y$ 是 $\mathcal{S}$ 中的态射, 在 $\mathcal{T}$ 中补成三角 $X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow \Sigma X$. 因为 H 是上同调函子, 对每个 i 有长正合列片段 $H^i(X) \rightarrow H^i(Y) \rightarrow H^i(Z) \rightarrow H^{i+1}(X)$. 由于 $X, Y \in \mathcal{S}$, 两端 $H^i(X), H^i(Y), H^{i+1}(X)$ 均为 0, 于是 $H^i(Z) = 0$. 这对一切 $i \in \mathbb{Z}$ 成立, 故 $Z \in \mathcal{S}$. 因此 $\mathcal{S}$ 含有零对象, 对平移和有限直和封闭, 并且任意 $\mathcal{S}$ 中的态射在 $\mathcal{T}$ 中取锥后仍落在 $\mathcal{S}$ 中. 把 $\mathcal{T}$ 中的三角作为 $\mathcal{S}$ 中的三角, 三角范畴公理由 $\mathcal{T}$ 中的相应公理继承得到. 因此 $\mathcal{S}$ 是三角范畴.

习题 3.6

Show that every commutative square on the left in the diagram below can be completed to the diagram on the right, in which all the rows and columns are exact triangles and all the squares commute, except the one marked “—” which anticommutes.

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{i} & B \\
 \downarrow u & & \downarrow \\
 A' & \longrightarrow & B'
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccccccc}
 A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{j} & C & \xrightarrow{k} & \Sigma A \\
 \downarrow u & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \Sigma u \\
 A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & \Sigma A' \\
 \downarrow v & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \Sigma v \\
 A'' & \longrightarrow & B'' & \longrightarrow & C'' & \longrightarrow & \Sigma A'' \\
 \downarrow w & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \Sigma w \\
 \Sigma A & \xrightarrow{\Sigma i} & \Sigma B & \xrightarrow{\Sigma j} & \Sigma C & \xrightarrow{\Sigma k} & \Sigma^2 A
 \end{array}$$

证明 记给定交换方块的右侧态射为 $b: B \rightarrow B'$, 则 $bi = i'u$. 先将题中各态射补成三角

$$\begin{aligned}
 A &\xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C \xrightarrow{k} \Sigma A, \quad A' \xrightarrow{i'} B' \xrightarrow{j'} C' \xrightarrow{k'} \Sigma A', \\
 A &\xrightarrow{u} A' \xrightarrow{v} A'' \xrightarrow{w} \Sigma A, \quad B \xrightarrow{b} B' \xrightarrow{v'} B'' \xrightarrow{w'} \Sigma B.
 \end{aligned}$$

令 $d = bi = i'u: A \rightarrow B'$, 并将 d 补成三角 $A \xrightarrow{d} B' \xrightarrow{s} D \xrightarrow{t} \Sigma A$. 对可复合态射 $A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{b} B'$ 应用八面体公理. 由于 $bi = d$, 可以得到态射 $a: C \rightarrow D, b_1: D \rightarrow B''$ 和 $c_1: B'' \rightarrow \Sigma C$, 使得 $C \xrightarrow{a} D \xrightarrow{b_1} B'' \xrightarrow{c_1} \Sigma C$ 是三角, 且八面体中的各个方块交换.

再对可复合态射 $A \xrightarrow{u} A' \xrightarrow{i'} B'$ 应用八面体公理. 由于 $i'u = d$, 可以得到态射 $a': A'' \rightarrow D$ 和 $b_2: D \rightarrow C'$ 以及 $c_2: C' \rightarrow \Sigma A''$, 使得 $A'' \xrightarrow{a'} D \xrightarrow{b_2} C' \xrightarrow{c_2} \Sigma A''$ 是三角, 且相应方块交换.

令 $\gamma = b_2 a: C \rightarrow C', \delta = b_1 a': A'' \rightarrow B''$. 由上述两个八面体中的交换关系可得 $\gamma j = j' b, k' \gamma = (\Sigma u) k$ 以及 $\delta v = v' i', w' \delta = (\Sigma i) w$. 因此 (u, b, γ) 给出第一行到第二行的三角态射, 而 (i, i', δ) 给出第一列到第二列的三角态射.

将 δ 补成三角 $A'' \xrightarrow{\delta} B'' \xrightarrow{\rho} C'' \xrightarrow{\sigma} \Sigma A''$. 另一方面, 将三角 $C \xrightarrow{a} D \xrightarrow{b_1} B'' \xrightarrow{c_1} \Sigma C$ 旋转一次, 得到三角 $D \xrightarrow{b_1} B'' \xrightarrow{c_1} \Sigma C \xrightarrow{-\Sigma a} \Sigma D$. 现在对可复合态射 $A'' \xrightarrow{a'} D \xrightarrow{b_1} B''$ 应用八面体公理. 由于 $b_1 a' = \delta$, 且 a', b_1, δ 的锥分别为 $C', \Sigma C, C''$, 可得态射 $\lambda: C' \rightarrow C''$ 和 $\mu: C'' \rightarrow \Sigma C$, 使得 $C' \xrightarrow{\lambda} C'' \xrightarrow{\mu} \Sigma C \xrightarrow{-\Sigma \gamma} \Sigma C'$ 是三角. 将其反向旋转, 得到三角 $C \xrightarrow{\gamma} C' \xrightarrow{\lambda} C'' \xrightarrow{\mu} \Sigma C$. 这便给出了交换图中的第三列.

八面体公理中的交换关系还给出 $\lambda j' = \rho v', \mu \rho = (\Sigma j)w', \sigma \lambda = (\Sigma v)k'$. 而在右下角有 $(\Sigma w)\sigma = -(\Sigma k)\mu$. 因此除右下角方块反交换外, 其余相邻方块均交换。

最后, 最下方一行是第一行的平移, 最右侧一列是第一列的平移, 因而它们也都是三角。于是给定的交换方块可以补成题中所示图表, 其中所有行和列均为三角, 所有方块均交换, 只有标记为 “-” 的右下角方块反交换。

Homework 4

习题 4.1

If S is a rightmultiplicative system and $\mathcal{C}$ admits finite coproducts, then $\mathcal{C}[S^{-1}]$ admits finite coproducts and the localization functor $Q : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}[S^{-1}]$ preserves finite coproducts. 

证明 设 $X_1, \dots, X_m$ 是 $\mathcal{C}$ 中的有限族对象, 令 X 为它们在 $\mathcal{C}$ 中的余积。记结构态射为典范嵌入。我们证明 QX 连同这些结构态射的像给出 $\mathcal{C}[S^{-1}]$ 中的余积。

由右分式描述知 $\mathcal{C}[S^{-1}]$ 中的态射可以用右分式表示。给定一族态射 $QX_i \rightarrow Y$, 右 Ore 条件允许我们把有限多个分式取公共分母。于是这族态射可由 $\mathcal{C}$ 中一族相容的态射表示。由于 X 是 $\mathcal{C}$ 中的余积, 这族态射唯一诱导出一个态射 $X \rightarrow Y'$, 再与公共分母合成得到一个分式 $QX \rightarrow Y$. 这说明每一族态射 $QX_i \rightarrow Y$ 都诱导出一个态射 $QX \rightarrow Y$.

唯一性同样由右分式的等价关系和 $\mathcal{C}$ 中余积的唯一性得到。因此 QX 满足有限余积的泛性质。故 $\mathcal{C}[S^{-1}]$ 有有限余积, 并且 Q 保持有限余积。

习题 4.2

Let $\mathcal{C}$ is an additive category and S be a right multiplicative system in $\mathcal{C}$, then $\mathcal{C}[S^{-1}]$ is an additive category and the localization functor $Q : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}[S^{-1}]$ is an additive functor. 

证明 先说明 $\mathcal{C}[S^{-1}]$ 是预加性范畴。设 $f_1 s_1^{-1}, f_2 s_2^{-1} : X \rightarrow Y$ 是两个态射, 其中 $X \xleftarrow{s_1} X_1 \xrightarrow{f_1} Y$, $X \xleftarrow{s_2} X_2 \xrightarrow{f_2} Y$, 且 $s_1, s_2 \in S$. 由右 Ore 条件, 存在对象 Z 以及态射 $t_1 : Z \rightarrow X_1, t_2 : Z \rightarrow X_2$, 使得 $s = s_1 t_1 = s_2 t_2 \in S$. 定义 $f_1 s_1^{-1} + f_2 s_2^{-1} := (f_1 t_1 + f_2 t_2) s^{-1}$. 若另一组公共分母由 $s' = s_1 u_1 = s_2 u_2$ 给出, 则由右乘法系的相容性条件可取态射 r_1, r_2 , 使得 $t_1 r_1 = u_1 r_2$ 以及 $t_2 r_1 = u_2 r_2$. 于是 $(f_1 t_1 + f_2 t_2) r_1 = f_1 t_1 r_1 + f_2 t_2 r_1 = f_1 u_1 r_2 + f_2 u_2 r_2 = (f_1 u_1 + f_2 u_2) r_2$. 故所得右分式与公共分母的选择无关。若将 $f_i s_i^{-1}$ 换成等价的代表元 $f'_i (s'_i)^{-1}$, 则由右分式的等价关系可对这些代表取共同细化。在该细化下, 两组对应的分子相同, 故分子之和也相同, 从而所得右分式仍然等价。因此上述加法与右分式代表元的选择无关。零元定义为 $0 \cdot 1_X^{-1}$, 而 $f s^{-1}$ 的负元定义为 $(-f) s^{-1}$. 将有限多个右分式取公共分母后, 交换律、结合律及逆元性质都归结为 $\mathcal{C}$ 中相应 Hom 群的交换群性质。因此每个 $\text{Hom}_{\mathcal{C}[S^{-1}]}(X, Y)$ 都是交换群。

下面验证复合与加法相容。设 $a = h r^{-1} : X \rightarrow Y$, 并且将 $b, c : Y \rightarrow Z$ 取公共分母后写成 $b = f s^{-1}, c = g s^{-1}$, 其中 $r, s \in S$. 由右 Ore 条件, 存在态射 t, q , 使得 $t \in S$ 且 $h t = s q$. 由右分式复合的定义有 $(b + c) a = ((f + g) s^{-1})(h r^{-1}) = (f + g) q (r t)^{-1} = (f q + g q) (r t)^{-1} = (f s^{-1})(h r^{-1}) + (g s^{-1})(h r^{-1}) = b a + c a$. 再设 $a_1, a_2 : X \rightarrow Y$. 取公共分母后, 可写成 $a_1 = h_1 r^{-1}, a_2 = h_2 r^{-1}$, 从而 $a_1 + a_2 = (h_1 + h_2) r^{-1}$. 由右 Ore 条件及有限次共同细化, 存在 $p \in S$ 以及态射 q_1, q_2 , 使得 $h_i p = s q_i, i = 1, 2$. 则 $b(a_1 + a_2) = (f s^{-1})((h_1 + h_2) r^{-1}) = f(q_1 + q_2)(r p)^{-1} = (f q_1 + f q_2)(r p)^{-1} = b a_1 + b a_2$. 因此复合对加法双线性, 从而 $\mathcal{C}[S^{-1}]$ 是预加性范畴。

由于 $\mathcal{C}$ 是加性范畴, 它有有限余积。由上一题可知, $\mathcal{C}[S^{-1}]$ 有有限余积, 并且局部化函

子 Q 保持有限余积。在预加性范畴中，有限余积自动为有限双积，故 $\mathcal{C}[S^{-1}]$ 是加性范畴。

最后证明 Q 是加性函子。对任意态射 $f, g : X \rightarrow Y$ 有 $Q(f + g) = (f + g)1_X^{-1} = f1_X^{-1} + g1_X^{-1} = Q(f) + Q(g)$. 故 Q 保持加法，即 $Q : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}[S^{-1}]$ 是加性函子。

习题 4.3

Let I be a small category and $F : I \rightarrow \mathcal{C}$ be a functor from I to a category $\mathcal{C}$.

(1) Prove that the colimit of F can be characterised by the coequalizer of the following diagram:

$$\bigoplus_{i,j \in I} \bigoplus_{\alpha \in \text{Hom}(i,j)} F(i) \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} \bigoplus_{i \in I} F(i)$$

where the morphism f is determined by $\text{id}_{F(i)} : F(i) \rightarrow F(i)$ and the morphism g is determined by $F(\alpha) : F(i) \rightarrow F(j)$. Thus we have that arbitrary colimit exists in $\mathcal{C}$ if and only if coequalizer and arbitrary coproduct exist in $\mathcal{C}$. In particular, if $\mathcal{C}$ is abelian category, the existence of arbitrary colimits is equivalent to the existence of cokernels and arbitrary coproducts.

(2) Give the dual statement of (1) for limits and prove it.



证明 (1) 设 $B = \bigoplus_{i \in I} F(i)$, 并且设 $A = \bigoplus_{\alpha: i \rightarrow j} F(i)$. 映射 $f : A \rightarrow B$ 在属于箭头 $\alpha : i \rightarrow j$ 的那个直和分量 $F(i)$ 上由典范嵌入 $F(i) \rightarrow B$ 给出。而映射 $g : A \rightarrow B$ 在同一个分量上由 $F(\alpha) : F(i) \rightarrow F(j)$ 再接典范嵌入 $F(j) \rightarrow B$ 给出。现设 $q : B \rightarrow L$ 是 f, g 的余等化子。记 $\iota_i : F(i) \rightarrow B$ 为典范嵌入，则 $q\iota_i : F(i) \rightarrow L$ 构成从 F 到 L 的余锥。对任意箭头 $\alpha : i \rightarrow j$, 余等化子关系 $qf = qg$ 给出 $q\iota_i = q\iota_j F(\alpha)$. 反过来，若 $\varphi_i : F(i) \rightarrow T$ 是一族余锥态射，则由余积泛性质得到唯一态射 $\varphi : B \rightarrow T$, 满足 $\varphi\iota_i = \varphi_i$. 余锥条件正是 $\varphi f = \varphi g$. 因此由余等化子的泛性质， φ 唯一分解为 $B \xrightarrow{q} L \rightarrow T$. 这正是余极限的泛性质，所以 $L \cong \text{colim } F$. 于是只要任意余积和余等化子存在，任意余极限就存在。反过来，余积和余等化子本身都是特殊的余极限，所以任意余极限存在也推出它们存在。若 $\mathcal{C}$ 是 Abelian 范畴，则任意两条平行箭头的余等化子就是其差的余核。故在 Abelian 范畴中，任意余极限存在等价于任意余积和余核存在。(2) 对偶地，如果 $\mathcal{C}$ 有任意积和等化子，则任意极限存在。具体来说，令 $B = \prod_{i \in I} F(i)$, $A = \prod_{\alpha: i \rightarrow j} F(j)$. 我们定义 $f, g : B \rightarrow A$ 如下：在属于箭头 $\alpha : i \rightarrow j$ 的那个分量上， f 由投影 $B \rightarrow F(j)$ 给出， g 由投影 $B \rightarrow F(i)$ 再接 $F(\alpha) : F(i) \rightarrow F(j)$ 给出。则 $\lim F$ 是 f, g 的等化子。证明与 (1) 对偶。若 $e : L \rightarrow B$ 是 f, g 的等化子，则各投影 $B \rightarrow F(i)$ 与 e 复合得到一族锥态射 $L \rightarrow F(i)$. 等化子条件 $fe = ge$ 恰好表示这些态射与所有 $F(\alpha)$ 相容。若 $T \rightarrow F(i)$ 是任意锥，则由积的泛性质得到唯一态射 $T \rightarrow B$, 锥条件正是这个态射被 f, g 等化。因此它唯一分解经由 L , 故 $L \cong \lim F$. 所以任意极限存在等价于任意积和等化子存在。若 $\mathcal{C}$ 是 Abelian 范畴，则等化子是差的核。故在 Abelian 范畴中，任意极限存在等价于任意积和核存在。

习题 4.4 (Problem 4)

Let $\mathcal{A}$ be an abelian category with enough projective objects and $\text{Ch}(\mathcal{A})$ be the category of cochain complexes. Prove that a complex P is a projective object in $\text{Ch}(\mathcal{A})$ if and only if it is a split exact complex of projective objects. (Hint: To see that P must be split exact, consider

the surjection from $\text{Cone}(\text{id}_P)$ to ΣP . To see that split exact complexes are projective objects, consider the special case $0 \rightarrow P_1 \xrightarrow{\cong} P_0 \rightarrow 0$



证明 先设 P 是 $\mathbf{Ch}(\mathcal{A})$ 中的投射对象。我们先证明每个 P^n 都是 $\mathcal{A}$ 中的投射对象。

对 $A \in \mathcal{A}$, 记 $D^{n-1}(A)$ 为只在次数 $n-1, n$ 非零且微分为 Id_A 的复形。则有自然同构 $\text{Hom}_{\mathbf{Ch}(\mathcal{A})}(P, D^{n-1}(A)) \cong \text{Hom}_{\mathcal{A}}(P^n, A)$. 若 $U \rightarrow V$ 是 $\mathcal{A}$ 中的满态射, 则 $D^{n-1}(U) \rightarrow D^{n-1}(V)$ 是 $\mathbf{Ch}(\mathcal{A})$ 中的满态射。由 P 的投射性, $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(P^n, U) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(P^n, V)$ 满射。故 P^n 投射。

再证明 P 是分裂正合复形。因为平移函子 Σ 是自等价, 所以 ΣP 也是投射对象。有自然的满态射 $\text{Cone}(\text{Id}_P) \rightarrow \Sigma P$. 由 ΣP 的投射性, $\text{Id}_{\Sigma P}$ 可提升到 $\text{Cone}(\text{Id}_P) \rightarrow \Sigma P$ 的一个截面。因此 ΣP 是 $\text{Cone}(\text{Id}_P)$ 的直和项。而 $\text{Cone}(\text{Id}_P)$ 是可缩复形, 故是分裂正合复形。分裂正合复形的直和项仍是分裂正合复形, 所以 ΣP 是分裂正合复形。于是 P 也是分裂正合复形。

反过来, 设 P 是分裂正合复形, 且每个 P^n 都是投射对象。记 $Z^n(P) = \text{Ker}(d_P^n)$. 由于 P 是分裂正合的, 故短正合列 $0 \rightarrow Z^n(P) \rightarrow P^n \rightarrow Z^{n+1}(P) \rightarrow 0$ 分裂。故每个 $Z^n(P)$ 都是 P^n 的直和项, 从而也是投射对象。

先看基本情形。若复形只有两项 $0 \rightarrow T \xrightarrow{\text{Id}_T} T \rightarrow 0$, 且 T 投射, 则这个复形是 $\mathbf{Ch}(\mathcal{A})$ 中的投射对象。事实上, 给定复形中的满态射 $E \rightarrow F$ 和一个链映射 $0 \rightarrow T \xrightarrow{\text{Id}_T} T \rightarrow 0$ 到 F , 只需在最低非零次数上提升一个态射 $T \rightarrow F^n$ 到 E^n , 这可由 T 的投射性完成, 另一项由链映射条件唯一决定。一般的分裂正合复形可由这些基本两项复形按各个 $Z^n(P)$ 拼成。在每个次数上只涉及相邻两个分量, 因此上述提升可以逐次数进行, 并且链映射条件由分裂正合分解保证相容。由于每个 $Z^n(P)$ 都是投射对象, 任意到商复形的链映射都能逐项提升。故对任意满态射 $E \rightarrow F$, 映射 $\text{Hom}_{\mathbf{Ch}(\mathcal{A})}(P, E) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{Ch}(\mathcal{A})}(P, F)$ 满射。故 P 是 $\mathbf{Ch}(\mathcal{A})$ 中的投射对象。