

线性代数 B2 课程讲义

陈洪佳

中国科学技术大学数学科学学院

目录

2	行列式	5
2.1	行列式: 线性代数(B1)回顾	5
2.2	Laplace展开定理	5
2.3	行列式计算	7
2.3.1	化为三角形	7
2.3.2	建立递推公式	8
2.3.3	加边	12
2.3.4	拆行	13
2.3.5	视行列式为某些元素的多项式	15
2.3.6	Laplace展开	18
2.3.7	公式法	19
2.3.8	反对称矩阵	19
3	矩阵	23
3.1	矩阵: 线性代数(B1)回顾	23
3.2	Binet-Cauchy公式	23
3.3	分块矩阵	26
3.4	一些例子	30
3.4.1	A^k 和 e^A	30
3.4.2	矩阵的逆	31
3.4.3	秩与相抵	32
3.4.4	线性方程组	39
3.5	矩阵的广义逆	40
4	线性空间	47
4.1	线性空间: 线性代数(B1)回顾	47
4.2	同构	47
4.3	子空间	49
4.4	直和	52
4.5	商空间	53
4.6	一些例子	54
5	线性变换	59

5.1	线性变换: 线性代数(B1)回顾	59
5.2	多项式简介	59
5.2.1	多项式基本概念	59
5.2.2	最大公因式	60
5.2.3	不可约多项式与唯一分解	64
5.2.4	多项式的同余理论	65
5.2.5	多项式的根与韦达定理	67
5.3	一些例子	69
5.4	不变子空间	73
5.5	特征值与特征向量	79
5.6	特征子空间	87

Chapter 2

行列式

§2.1 行列式: 线性代数(B1)回顾

参考课程PPT.

§2.2 Laplace展开定理

定义 2.2.1. 设方阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$. 子式 $A \begin{pmatrix} i_1, \dots, i_r \\ j_1, \dots, j_r \end{pmatrix}$ 的余子式即 A 删除第 $i_1, \dots, i_r$ 行和第 $j_1, \dots, j_r$ 列后得到的子方阵行列式. 更具体地, 若 $(i_1, \dots, i_n)$ 和 $(j_1, \dots, j_n)$ 是 $\{1, \dots, n\}$ 的两个排列且 $i_{r+1} < \dots < i_n, j_{r+1} < \dots < j_n$, 则子式 $A \begin{pmatrix} i_1, \dots, i_r \\ j_1, \dots, j_r \end{pmatrix}$ 的余子式即 $A \begin{pmatrix} i_{r+1}, \dots, i_n \\ j_{r+1}, \dots, j_n \end{pmatrix}$, 同时称

$$(-1)^{i_1 + \dots + i_r + j_1 + \dots + j_r} A \begin{pmatrix} i_{r+1}, \dots, i_n \\ j_{r+1}, \dots, j_n \end{pmatrix}$$

为它的代数余子式.

下面的定理就是按行 $i_1, \dots, i_r$ 展开的 Laplace 公式:

定理 2.2.1. 设 $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n$. 则对于方阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$,

$$\det A = \sum_{\text{行为第 } i_1, \dots, i_r \text{ 行}} \text{子式} \times \text{对应的代数余子式}.$$

更具体地说,

$$\det A = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq n} A \begin{pmatrix} i_1, \dots, i_r \\ j_1, \dots, j_r \end{pmatrix} (-1)^{i_1 + \dots + i_r + j_1 + \dots + j_r} A \begin{pmatrix} i_{r+1}, \dots, i_n \\ j_{r+1}, \dots, j_n \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

这里 $(i_1, \dots, i_n), (j_1, \dots, j_n)$ 是 $\{1, \dots, n\}$ 的排列, 且 $i_{r+1} < \dots < i_n$ 和 $j_{r+1} < \dots < j_n$.

证明. 设 $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$. 先考虑 $(i_1, i_2, \dots, i_r) = (1, 2, \dots, r)$ 的情形, 此时 $(i_{r+1}, \dots, i_n) = (r+1, \dots, n)$. 对于 $1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq n$, 记 $I = \{j_1, \dots, j_r\}$, 定义集合 S 为 I 的所有排列.

则有

$$\begin{aligned}
 \Delta &= \det(\alpha_1, \dots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n) \\
 &= \det \left(\sum_{k_1=1}^n a_{1k_1} e_{k_1}, \dots, \sum_{k_r=1}^n a_{rk_r} e_{k_r}, \alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n \right) \\
 &= \sum_{k_1=1}^n \cdots \sum_{k_r=1}^n a_{1k_1} \cdots a_{rk_r} \det(e_{k_1}, \dots, e_{k_r}, \alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n) \\
 &= \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_r \leq n} \sum_{(k_1, \dots, k_r) \in S} a_{1k_1} a_{2k_2} \cdots a_{rk_r} \det(e_{k_1}, \dots, e_{k_r}, \alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n) \\
 &= \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_r \leq n} A \begin{pmatrix} 1, \dots, r \\ j_1, \dots, j_r \end{pmatrix} (-1)^{1+\cdots+r+j_1+\cdots+j_r} A \begin{pmatrix} r+1, \dots, n \\ j_{r+1}, \dots, j_n \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

其中最后一步由如下引理给出:

引理: 设 $1 \leq j_1 < \cdots < j_r \leq n$, 则有如下等式

$$\begin{aligned}
 &\sum_{(k_1, \dots, k_r) \in S} a_{1k_1} a_{2k_2} \cdots a_{rk_r} \det(e_{k_1}, \dots, e_{k_r}, \alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n) \\
 &= A \begin{pmatrix} 1, \dots, r \\ j_1, \dots, j_r \end{pmatrix} (-1)^{1+\cdots+r+j_1+\cdots+j_r} A \begin{pmatrix} r+1, \dots, n \\ j_{r+1}, \dots, j_n \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

证明. 令 $\beta_i = a_{ij_1} e_{j_1} + \cdots + a_{ij_r} e_{j_r}$, 其中 $1 \leq i \leq r$. 考虑行列式

$$\Delta = \det(\beta_1, \dots, \beta_r, \alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n).$$

一方面, 经过 $j_1 - 1$ 次相邻两列对换将第 j_1 列换到第 1 列, 再经过 $j_2 - 2$ 次相邻两列对换将第 j_2 列换到第 2 列, 以此类推, 经过 $j_1 - 1 + \cdots + j_r - r$ 次对换后第 $j_1, \dots, j_r$ 列分别换到第 $1, \dots, r$ 列, 立即有

$$\begin{aligned}
 \Delta &= (-1)^{j_1-1+j_2-2+\cdots+j_r-r} \begin{vmatrix} a_{1j_1} & \cdots & a_{1j_r} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{rj_1} & \cdots & a_{rj_r} & 0 & \cdots & 0 \\ * & * & * & a_{r+1,j_{r+1}} & \cdots & a_{r+1,j_n} \\ * & * & * & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & * & a_{n,j_{r+1}} & \cdots & a_{n,j_n} \end{vmatrix} \\
 &= A \begin{pmatrix} 1, \dots, r \\ j_1, \dots, j_r \end{pmatrix} (-1)^{1+\cdots+r+j_1+\cdots+j_r} A \begin{pmatrix} r+1, \dots, n \\ j_{r+1}, \dots, j_n \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

另一方面, 由行列式性质有

$$\begin{aligned}
 \Delta &= \det(\beta_1, \dots, \beta_r, \alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n) \\
 &= \det \left(\sum_{k_1 \in I} a_{1k_1} e_{k_1}, \dots, \sum_{k_r \in I} a_{rk_r} e_{k_r}, \alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n \right) \\
 &= \sum_{k_1 \in I} \cdots \sum_{k_r \in I} a_{1k_1} \cdots a_{rk_r} \det(e_{k_1}, \dots, e_{k_r}, \alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n) \\
 &= \sum_{(k_1, \dots, k_r) \in S} a_{1k_1} a_{2k_2} \cdots a_{rk_r} \det(e_{k_1}, \dots, e_{k_r}, \alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n).
 \end{aligned}$$

□

对于一般情况, 可以经过 $i_1 - 1$ 次相邻行对换将第 i_1 行换到第1行, 其他行相对次序不变, 以此类推, 经 $i_1 - 1 + \cdots + i_r - r$ 次对换后第 $i_1, \cdots, i_r$ 行换到第 $1, \cdots, r$ 行, 原行列式与新行列式的差别是 $(-1)^{i_1 + \cdots + i_r + 1 + \cdots + r}$ 倍, 故一般情况的公式由特殊情况给出. $\square$

§2.3 行列式计算

§2.3.1 化为三角形

例 2.3.1 (p77 例2.6.1 (2) [陈发来-欧阳毅]). $\Delta = \det A(x, a) = \begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}.$

解1. 此时

$$\begin{aligned} \Delta &= (x + (n-1)a) \begin{vmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ 1 & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a & \cdots & x \end{vmatrix} = (x + (n-1)a) \begin{vmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & x-a \end{vmatrix} \\ &= (x + (n-1)a)(x-a)^{n-1}. \end{aligned} \quad \square$$

解2. 利用特征多项式的性质: 注意到方阵 $A(x, a)$ 为对称阵, 且 Δ 是 x 的 n 次首一多项式. 由于 $\text{rank}((x-a)I_n - A(x, a)) = 1$ 并且 $\det((x + (n-1)a)I_n - A(x, a)) = 0$, 立即有 $\Delta = (x + (n-1)a)(x-a)^{n-1}$. $\square$

解3. 应用关系式

$$\lambda^n \det(\lambda I_m + AB) = \lambda^m \det(\lambda I_n + BA).$$

有

$$(x-a)\Delta = (x-a) \det((x-a)I_n + \begin{pmatrix} a \\ \vdots \\ a \end{pmatrix} (1, \cdots, 1)) = (x-a)^n (x-a+na),$$

从而 $\Delta = (x + (n-1)a)(x-a)^{n-1}$. $\square$

例 2.3.2 (p74 例2 [炯书]). 计算 n 阶行列式 Δ , 其中

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & a+d & \cdots & a+(n-2)d & a+(n-1)d \\ a+d & a+2d & \cdots & a+(n-1)d & a \\ a+2d & a+3d & \cdots & a & a+d \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a+(n-1)d & a & \cdots & a+(n-3)d & a+(n-2)d \end{vmatrix}.$$

解. 将第 $2, 3, \dots, n$ 列都加到第 1 列, 得

$$\Delta = \begin{vmatrix} S & a+d & \cdots & a+(n-2)d & a+(n-1)d \\ S & a+2d & \cdots & a+(n-1)d & a \\ S & a+3d & \cdots & a & a+d \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ S & a & \cdots & a+(n-3)d & a+(n-2)d \end{vmatrix},$$

其中

$$S = na + \frac{n(n-1)}{2}d.$$

提取第 1 列的公因子 S , 有

$$\Delta = S \begin{vmatrix} 1 & a+d & \cdots & a+(n-2)d & a+(n-1)d \\ 1 & a+2d & \cdots & a+(n-1)d & a \\ 1 & a+3d & \cdots & a & a+d \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & a & \cdots & a+(n-3)d & a+(n-2)d \end{vmatrix}.$$

从第 2 行开始, 每一行减去上一行 (即 $r_{i+1} \mapsto r_{i+1} - r_i, i = 1, 2, \dots, n-1$), 得

$$\begin{aligned} \Delta &= S \begin{vmatrix} d & d & \cdots & d & (1-n)d \\ d & d & \cdots & (1-n)d & d \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ d & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (1-n)d & d & \cdots & \cdots & d \end{vmatrix} \\ &= S d^{n-1} (-1)^{\frac{(n-2)(n-1)}{2}} \det A(1-n, 1) \\ &= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (nd)^{n-1} \left(a + \frac{n-1}{2}d \right). \end{aligned} \quad \square$$

§2.3.2 建立递推公式

例 2.3.3 (§2.5 [陈发来-欧阳毅]; p75 例3 [炯书]; p127 例4, p148 例3 [李尚志]). 计算 n 阶 Vandermonde 行列式

$$\Delta_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

解. 对行列式进行行变换: 从第 n 行开始, 依次将后一行减去前一行乘以 x_1 , 即对 $i = n, n-1, \dots, 2$, 执行 $r_i \mapsto r_i - x_1 r_{i-1}$. 得到

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ 0 & x_2(x_2 - x_1) & x_3(x_3 - x_1) & \cdots & x_n(x_n - x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & x_3^{n-2}(x_3 - x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}.$$

按第一列展开, 得

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ x_2(x_2 - x_1) & x_3(x_3 - x_1) & \cdots & x_n(x_n - x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & x_3^{n-2}(x_3 - x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}.$$

从每一列中提取公因子 $(x_i - x_1)$ ($i = 2, \dots, n$), 得

$$\Delta_n = \prod_{i=2}^n (x_i - x_1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

右边的行列式正是 $n-1$ 阶 Vandermonde 行列式 $\Delta_{n-1}(x_2, x_3, \dots, x_n)$. 因此得到递推关系

$$\Delta_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=2}^n (x_i - x_1) \cdot \Delta_{n-1}(x_2, x_3, \dots, x_n).$$

反复递推, 可得

$$\Delta_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

□

例 2.3.4 (p78 例2.6.2 [陈发来-欧阳毅]; p149 例4 [李尚志]). 计算下述柯西方阵 C_n 的行列式 Δ_n :

$$C_n = C_n(a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_n) = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1 + b_1} & \frac{1}{a_1 + b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1 + b_n} \\ \frac{1}{a_2 + b_1} & \frac{1}{a_2 + b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2 + b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_n + b_1} & \frac{1}{a_n + b_2} & \cdots & \frac{1}{a_n + b_n} \end{pmatrix}.$$

解. 这个解法主要利用递推关系. 我们有

$$\begin{aligned}
 \Delta_n &= \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_j} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{a_1-a_2}{(a_2+b_1)(a_1+b_1)} & \cdots & \frac{a_1-a_2}{(a_2+b_j)(a_1+b_j)} & \cdots & \frac{1}{(a_2+b_n)(a_1+b_n)} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \frac{a_1-a_n}{(a_n+b_1)(a_1+b_1)} & \cdots & \frac{a_1-a_n}{(a_n+b_j)(a_1+b_j)} & \cdots & \frac{a_1-a_n}{(a_n+b_n)(a_1+b_n)} \end{vmatrix} \\
 &= \frac{\prod_{2 \leq i \leq n} (a_1 - a_i)}{\prod_{1 \leq j \leq n} (a_1 + b_j)} \begin{vmatrix} \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix} \\
 &= \frac{\prod_{2 \leq i \leq n} (a_1 - a_i)(b_1 - b_i)}{\prod_{1 \leq j \leq n} (a_1 + b_j)(a_j + b_1)} \Delta_{n-1},
 \end{aligned}$$

其中

$$\Delta_{n-1} = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix}.$$

由递推关系, 故得

$$\Delta_n = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{\prod_{k \leq i \leq n} (a_k - a_i)(b_k - b_i)}{\prod_{k \leq j \leq n} (a_k + b_j)(a_j + b_k)} \Delta_1 = \frac{\prod_{1 \leq k < i \leq n} (a_k - a_i)(b_k - b_i)}{\prod_{1 \leq k, j \leq n} (a_k + b_j)}. \quad \square$$

例 2.3.5 (p76 例4 [炯书]). 求 n 阶三对角行列式 Δ_n , 其中未写出的元素都是零, $bc \neq 0$:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & b & & \\ c & a & b & \\ & c & a & \ddots \\ & & \ddots & \ddots & b \\ & & & c & a \end{vmatrix}_{n \times n}.$$

解. 将行列式 Δ_n 按第一行展开, 得到

$$\Delta_n = a \begin{vmatrix} a & b & & \\ c & a & b & \\ & c & a & \ddots \\ & & \ddots & \ddots & b \\ & & & c & a \end{vmatrix}_{(n-1) \times (n-1)} - b \begin{vmatrix} c & b & & \\ a & a & b & \\ & c & a & \ddots \\ & & \ddots & \ddots & b \\ & & & c & a \end{vmatrix}_{(n-1) \times (n-1)}.$$

第二个行列式按第一行展开, 得到

$$\begin{vmatrix} c & b & & \\ & a & b & \\ & c & a & \ddots \\ & & \ddots & \ddots & b \\ & & & c & a \end{vmatrix}_{(n-1) \times (n-1)} = c\Delta_{n-2}.$$

因此

$$\Delta_n = a\Delta_{n-1} - bc\Delta_{n-2}.$$

从而得到递推方程

$$\Delta_n - a\Delta_{n-1} + bc\Delta_{n-2} = 0, \quad (2.5.1)$$

初始条件为

$$\Delta_0 = 1, \quad \Delta_1 = a.$$

递推方程 (2.5.1) 的特征方程为

$$x^2 - ax + bc = 0,$$

其两根记为 α, β , 于是

$$\alpha + \beta = a, \quad \alpha\beta = bc.$$

由 (2.5.1) 得

$$\Delta_n - (\alpha + \beta)\Delta_{n-1} + \alpha\beta\Delta_{n-2} = 0.$$

因此

$$\Delta_n - \alpha\Delta_{n-1} = \beta(\Delta_{n-1} - \alpha\Delta_{n-2}) = \cdots = \beta^{n-1}(\Delta_1 - \alpha\Delta_0) = \beta^n,$$

$$\Delta_n - \beta\Delta_{n-1} = \alpha(\Delta_{n-1} - \beta\Delta_{n-2}) = \cdots = \alpha^{n-1}(\Delta_1 - \beta\Delta_0) = \alpha^n.$$

当 $\alpha \neq \beta$ 时, 由上述两式相减得

$$\Delta_{n-1} = \frac{\beta^n - \alpha^n}{\beta - \alpha},$$

从而

$$\Delta_n = \frac{\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}}{\beta - \alpha}.$$

当 $\alpha = \beta$ 时, 由 $2\alpha = a, \alpha^2 = bc \neq 0$, 可知 $\alpha = \frac{a}{2} \neq 0$. 由

$$\frac{\Delta_n}{\alpha^n} - \frac{\Delta_{n-1}}{\alpha^{n-1}} = 1,$$

累加得

$$\frac{\Delta_n}{\alpha^n} = n + \Delta_0 = n + 1.$$

因此

$$\Delta_n = (n + 1)\alpha^n = (n + 1) \left(\frac{a}{2}\right)^n.$$

综上所述,

$$\Delta_n = \begin{cases} \frac{\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}}{\beta - \alpha}, & \alpha \neq \beta, \\ (n+1) \left(\frac{a}{2}\right)^n, & \alpha = \beta, \end{cases}$$

其中 α, β 是方程 $x^2 - ax + bc = 0$ 的两个根. □

§2.3.3 加边

例 2.3.6 (p80 例2.6.4 [陈发来-欧阳毅]; p145 例1 [李尚志]). 计算

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda_1 + a_1 b_1 & a_1 b_2 & \cdots & a_1 b_n \\ a_2 b_1 & \lambda_2 + a_2 b_2 & \cdots & a_2 b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n b_1 & a_n b_2 & \cdots & \lambda_n + a_n b_n \end{vmatrix}.$$

解1. 这个行列式可以通过添加一条边来解决. 若 λ_i 全不为 0, 则

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 1 & -b_1 & -b_2 & \cdots & -b_n \\ 0 & \lambda_1 + a_1 b_1 & a_1 b_2 & \cdots & a_1 b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_n b_1 & a_n b_2 & \cdots & \lambda_n + a_n b_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -b_1 & -b_2 & \cdots & -b_n \\ a_1 & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & \vdots & 0 & \cdots & \lambda_n \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 + \sum \frac{a_i b_i}{\lambda_i} & -b_n & \cdots & -b_1 \\ 0 & \lambda_1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^n \lambda_i + \sum_{i=1}^n \left(a_i b_i \prod_{j \neq i} \lambda_j \right). \end{aligned}$$

若存在 $\lambda_i = 0$, 则利用连续性有 $\Delta = a_i b_i \prod_{j \neq i} \lambda_j$. □

解2. 这个方法应用恒等式 $\det(I_n - AB) = \det(I_m - BA)$, 其中 $A \in F^{n \times m}$, $B \in F^{m \times n}$.

令 $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. 若 λ_i 全不为0, 则

$$\begin{aligned} \det \left(\Lambda + \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} (b_1, \dots, b_n) \right) &= \det(\Lambda) \det \left(I + \Lambda^{-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} (b_1, \dots, b_n) \right) \\ &= \det(\Lambda) \det \left(1 + (b_1, \dots, b_n) \Lambda^{-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \right) \\ &= \lambda_1 \cdots \lambda_n \left(1 + \sum \frac{a_i b_i}{\lambda_i} \right) = \prod_{i=1}^n \lambda_i + \sum_{i=1}^n \left(a_i b_i \prod_{j \neq i} \lambda_j \right). \end{aligned}$$

若存在 $\lambda_i = 0$, 则运用连续性. □

例 2.3.7 (p78 例6 [炯书]). 求 n 阶行列式

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} c_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & c_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & c_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & c_n \end{vmatrix}.$$

解1. 添加一行一列到行列式 Δ_n :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & -x_1 & -x_2 & -x_3 & \cdots & -x_n \\ 0 & c_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ 0 & x_1 & c_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ 0 & x_1 & x_2 & c_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & c_n \end{vmatrix}.$$

再将第 1 行加到其它各行, 得到

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & -x_1 & -x_2 & -x_3 & \cdots & -x_n \\ 1 & c_1 - x_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & c_2 - x_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & c_3 - x_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & c_n - x_n \end{vmatrix}. \quad (2.5.3)$$

$$\Delta_n = \begin{cases} \prod_{i=1}^n (c_i - x_i) + \sum_{j=1}^n x_j \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n (c_i - x_i), & \text{若 } c_i \neq x_i \ (1 \leq i \leq n), \\ (c_1 - x_1) \cdots (c_{i-1} - x_{i-1}) x_i (c_{i+1} - x_{i+1}) \cdots (c_n - x_n), & \text{若 } \exists i \text{ 使 } c_i = x_i. \quad \square \end{cases}$$

解2. 取 $a_i = 1, b_i = x_i, \lambda_i = c_i - x_i$, 直接应用例 2.3.6 结论即可. $\square$

§2.3.4 拆行

例 2.3.8 (p79 例7 [炯书]; p152 例4 [李尚志]).

$$\Delta_n(x, y, a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \cdots & x \\ y & a_2 & x & \cdots & x \\ y & y & a_3 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y & y & y & \cdots & a_n \end{vmatrix}.$$

解1. 将最后一列元素拆分: $a_n = x + (a_n - x)$, 则行列式可拆为两个行列式之和:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & x & \cdots & x & x \\ y & a_2 & \cdots & x & x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y & y & \cdots & a_{n-1} & x \\ y & y & \cdots & y & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & x & \cdots & x & 0 \\ y & a_2 & \cdots & x & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y & y & \cdots & a_{n-1} & 0 \\ y & y & \cdots & y & a_n - x \end{vmatrix}.$$

对第一个行列式, 将最后一行乘以 -1 加到上面各行, 得到

$$\begin{vmatrix} a_1 - y & x - y & \cdots & x - y & 0 \\ 0 & a_2 - y & \cdots & x - y & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} - y & 0 \\ y & y & \cdots & y & x \end{vmatrix} = x \prod_{i=1}^{n-1} (a_i - y).$$

第二个行列式按最后一行展开, 得

$$(a_n - x)\Delta_{n-1}(x, y, a_1, \dots, a_{n-1}).$$

因此得到递推关系

$$\Delta_n = x \prod_{i=1}^{n-1} (a_i - y) + (a_n - x)\Delta_{n-1}. \quad (1)$$

同理, 考虑转置行列式 (或对最后一行拆分时将 a_n 拆为 $y + (a_n - y)$), 可得另一递推

$$\Delta_n = y \prod_{i=1}^{n-1} (a_i - x) + (a_n - y)\Delta_{n-1}. \quad (2)$$

由 (1)(2) 相减得

$$(y - x)\Delta_{n-1} = y \prod_{i=1}^{n-1} (a_i - x) - x \prod_{i=1}^{n-1} (a_i - y),$$

即

$$\Delta_{n-1}(x, y, a_1, \dots, a_{n-1}) = \frac{y \prod_{i=1}^{n-1} (a_i - x) - x \prod_{i=1}^{n-1} (a_i - y)}{y - x}.$$

将此式代入 (1) 即得

$$\Delta_n(x, y, a_1, \dots, a_n) = \frac{y \prod_{i=1}^n (a_i - x) - x \prod_{i=1}^n (a_i - y)}{y - x}.$$

□

解2. 定义

$$f(t) = \begin{vmatrix} 1 & t & t & t & \cdots & t \\ 1 & a_1 & x & x & \cdots & x \\ 1 & y & a_2 & x & \cdots & x \\ 1 & y & y & a_3 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & y & y & y & \cdots & a_n \end{vmatrix} = \alpha t + \beta.$$

则有

$$\Delta_n(x, y, a_1, \dots, a_n) = f(0) = \beta.$$

另外, 我们有

$$f(t) = \begin{vmatrix} 1 & t & t & t & \cdots & t \\ 0 & a_1 - t & x - t & x - t & \cdots & x - t \\ 0 & y - t & a_2 - t & x - t & \cdots & x - t \\ 0 & y - t & y - t & a_3 - t & \cdots & x - t \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & y - t & y - t & y - t & \cdots & a_n - t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 - t & x - t & x - t & \cdots & x - t \\ y - t & a_2 - t & x - t & \cdots & x - t \\ y - t & y - t & a_3 - t & \cdots & x - t \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y - t & y - t & y - t & \cdots & a_n - t \end{vmatrix}.$$

因此

$$f(x) = \alpha x + \beta = \prod_{i=1}^n (a_i - x), \quad f(y) = \alpha y + \beta = \prod_{i=1}^n (a_i - y).$$

立即可得

$$\Delta_n(x, y, a_1, \dots, a_n) = \frac{y \prod_{i=1}^n (a_i - x) - x \prod_{i=1}^n (a_i - y)}{y - x}.$$

□

§2.3.5 视行列式为某些元素的多项式

例 2.3.9 (p81 例2.6.6 [陈发来-欧阳毅]; p81 例8 [炯书]). 求 n 阶行列式

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x \end{vmatrix}.$$

解1. 把 Δ_n 中元素 x 看成未定元, 元素 $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ 看成常数, 则 Δ_n 是关于 x 的多项式 $f(x)$. 由行列式的展开式可知, $f(x)$ 的次数为 n , 首项系数为 1.

把其它各列加到第一列, 得到

$$f(x) = \begin{vmatrix} x + \sum_{i=1}^{n-1} a_i & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ x + \sum_{i=1}^{n-1} a_i & x & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ x + \sum_{i=1}^{n-1} a_i & a_2 & x & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x + \sum_{i=1}^{n-1} a_i & a_2 & a_3 & \cdots & x \end{vmatrix}.$$

由此看出, 当 $x = -\sum_{i=1}^{n-1} a_i$ 时, 第一列元素全为零, 故

$$f\left(-\sum_{i=1}^{n-1} a_i\right) = 0.$$

所以 $x = -\sum_{i=1}^{n-1} a_i$ 是 $f(x)$ 的一个根.

把 $x = a_i$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$) 代入 $f(x)$, 得到

$$f(a_i) = \begin{vmatrix} a_i & a_1 & a_2 & \cdots & a_{i-2} & a_{i-1} & a_i & a_{i+1} & \cdots & a_{n-1} \\ a_1 & a_i & a_2 & \cdots & a_{i-2} & a_{i-1} & a_i & a_{i+1} & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{i-1} & a_i & a_i & a_{i+1} & \cdots & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{i-1} & a_i & a_i & a_{i+1} & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{i-1} & a_i & a_{i+1} & a_{i+2} & \cdots & a_i \end{vmatrix}.$$

其中第 i 行和第 $i+1$ 行相同 (当 $i = n-1$ 时, 第 $n-1$ 行和第 n 行相同), 所以 $f(a_i) = 0$. 因此 a_i 是 $f(x)$ 的根.

于是

$$f(x) = c \left(x + \sum_{i=1}^{n-1} a_i \right) (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_{n-1}).$$

因为 $f(x)$ 的首项系数为 1, 所以 $c = 1$. 因此

$$\Delta_n = \left(x + \sum_{i=1}^{n-1} a_i \right) \prod_{i=1}^{n-1} (x - a_i).$$

□

解2.

$$\begin{aligned} \Delta_n &= \left(x + \sum_{i=1}^{n-1} a_i \right) \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ 1 & x & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ 1 & a_2 & x & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_2 & a_3 & \cdots & x \end{vmatrix} \\ &= \left(x + \sum_{i=1}^{n-1} a_i \right) \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ 0 & x - a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 - x & x - a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & x - a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & a_{n-1} - x & x - a_{n-1} \end{vmatrix} \\ &= \left(x + \sum_{i=1}^{n-1} a_i \right) \prod_{i=1}^{n-1} (x - a_i). \end{aligned}$$

□

例 2.3.10 (p71 推论2.5.5 [陈发来-欧阳毅]; p82 例9 [炯书]). 求 n 阶行列式 Δ_n :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{k-1} & x_2^{k-1} & \cdots & x_n^{k-1} \\ x_1^{k+1} & x_2^{k+1} & \cdots & x_n^{k+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}.$$

解. 在 Δ_n 中添加一行一列构成如下的 $n+1$ 阶 Vandermonde 行列式 Δ :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n & x \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 & x^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^{k-1} & x_2^{k-1} & \cdots & x_n^{k-1} & x^{k-1} \\ x_1^k & x_2^k & \cdots & x_n^k & x^k \\ x_1^{k+1} & x_2^{k+1} & \cdots & x_n^{k+1} & x^{k+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n & x^n \end{vmatrix}.$$

由 Vandermonde 行列式公式,

$$\Delta = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \prod_{i=1}^n (x - x_i). \quad (1)$$

把 x 看成未定元, 则 Δ 是关于 x 的多项式. 将 Δ 按最后一列展开, 则 Δ_n 正好是展开式中 x^k 项的系数 (相差一个符号). 事实上, 最后一列的元素为 $1, x, x^2, \dots, x^n$, 其中 x^k 对应的余子式正是去掉第 $k+1$ 行和最后一列后得到的行列式, 即 Δ_n , 其余子式符号为 $(-1)^{(k+1)+(n+1)} = (-1)^{n+k}$. 因此

$$\Delta = \sum_{j=0}^n (-1)^{n+j} \cdot (\text{去掉第 } j+1 \text{ 行和最后一列的行列式}) x^j.$$

其中 x^k 项的系数为 $(-1)^{n+k} \Delta_n$, 故

$$\Delta_n = (-1)^{n+k} \cdot [x^k] \Delta.$$

由 (1), $\Delta = \prod_{i < j} (x_j - x_i) \cdot \prod_{i=1}^n (x - x_i)$. 展开 $\prod_{i=1}^n (x - x_i)$, 得

$$\prod_{i=1}^n (x - x_i) = x^n - e_1 x^{n-1} + e_2 x^{n-2} - \cdots + (-1)^n e_n,$$

其中 $e_r = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_r}$. 所以 x^k 的系数为 $(-1)^{n-k} e_{n-k}$. 于是

$$[x^k] \Delta = \prod_{i < j} (x_j - x_i) \cdot (-1)^{n-k} e_{n-k}.$$

因此

$$\Delta_n = (-1)^{n+k} \cdot (-1)^{n-k} \prod_{i < j} (x_j - x_i) e_{n-k} = \prod_{i < j} (x_j - x_i) e_{n-k}.$$

即

$$\Delta_n = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{n-k} \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_{n-k}}.$$

□

§2.3.6 Laplace展开

例 2.3.11 (p76 例5 [炯书]). 设 $bc b_1 c_1 \neq 0$, 共 $m+n$ 行, 未写出的元素均为零. 计算

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & & & & & & & & & \\ c & a & b & & & & & & & & \\ & c & a & \ddots & & & & & & & \\ & & \ddots & \ddots & b & & & & & & \\ & & & c & a & b & & & & & \\ & & & & c_1 & a_1 & b_1 & & & & \\ & & & & & c_1 & a_1 & b_1 & & & \\ & & & & & & c_1 & a_1 & \ddots & & \\ & & & & & & & \ddots & \ddots & b_1 & \\ & & & & & & & & c_1 & a_1 & \end{vmatrix}$$

其中左上块为 m 阶三对角矩阵, 右下块为 n 阶三对角矩阵,, 且在交接处右上角有一个 b (位于第 m 行第 $m+1$ 列), 左下角有一个 c_1 (位于第 $m+1$ 行第 m 列).

解. 按前 m 行作 Laplace 展开, 得到

$$\begin{aligned} \Delta &= (-1)^{1+2+\dots+m+1+2+\dots+m} \cdot \begin{vmatrix} a & b & & & & & & & & & \\ c & a & b & & & & & & & & \\ & c & a & \ddots & & & & & & & \\ & & \ddots & \ddots & b & & & & & & \\ & & & c & a & & & & & & \end{vmatrix}_m \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & & & & & & & & & \\ c_1 & a_1 & b_1 & & & & & & & & \\ & c_1 & a_1 & \ddots & & & & & & & \\ & & \ddots & \ddots & b_1 & & & & & & \\ & & & c_1 & a_1 & & & & & & \end{vmatrix}_n \\ &+ (-1)^{1+\dots+m+1+\dots+(m-1)+(m+1)} \cdot \begin{vmatrix} a & b & & & & & & & & & \\ c & a & b & & & & & & & & \\ & c & a & \ddots & & & & & & & \\ & & \ddots & \ddots & b & & & & & & \\ & & & c & a & & & & & & \\ & & & & c & b & & & & & \end{vmatrix}_m \cdot \begin{vmatrix} c_1 & b_1 & & & & & & & & & \\ a_1 & b_1 & & & & & & & & & \\ c_1 & a_1 & \ddots & & & & & & & & \\ & \ddots & \ddots & b_1 & & & & & & & \\ & & c_1 & a_1 & & & & & & & \end{vmatrix}_n. \end{aligned}$$

记 m 阶三对角行列式为

$$\Delta_m(a, b, c) = \begin{vmatrix} a & b & & & \\ c & a & b & & \\ & c & a & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & b \\ & & & c & a \end{vmatrix}_m.$$

则上式可化简为

$$\Delta = \Delta_m(a, b, c)\Delta_n(a_1, b_1, c_1) - bc_1\Delta_{m-1}(a, b, c)\Delta_{n-1}(a_1, b_1, c_1).$$

□

注. 若 $a_1 = a, b_1 = b, c_1 = c$, 则有

$$\Delta_{m+n} = \Delta_m\Delta_n - bc\Delta_{m-1}\Delta_{n-1}.$$

§2.3.7 公式法

- $\det(AB) = \det A \cdot \det B$, 或者 Binet-Cauchy 公式.
- $\lambda^n \det(\lambda I_m + AB) = \lambda^m \det(\lambda I_n + BA)$.

例 2.3.12. 求行列式

$$\Delta = \det(a_i + b_j), \quad \Delta = \det(\delta_{ij} + a_i + b_j).$$

§2.3.8 反对称矩阵

定义 2.3.1. 设 $A = (a_{ij})$ 为 n 阶方阵, 若满足

$$a_{ji} = -a_{ij} \quad (1 \leq i, j \leq n),$$

则称 A 为反对称矩阵 (斜对称矩阵). 显然, 其主对角元 $a_{ii} = 0$.

例 2.3.13 ((2): p86 题3 [炯书]; (1)(3): p147 例2 [李尚志]). 设 $A = (a_{ij})$ 为 n 阶反对称矩阵.

- (1). 若 $n = 2m + 1$ 为奇数, 则 $\det A = 0$.
- (2). 若 $n = 2m$ 为偶数, 将 $\det A$ 视为 $\{a_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq n\}$ 的多项式, 则存在多项式 $\text{Pf}(A) \in \mathbb{F}[a_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq n]$, 使得 $\det A = (\text{Pf}(A))^2$.
- (3). 若 $n = 2m$ 为偶数, 则对任意 $\lambda \in \mathbb{F}$ 有 $\det(a_{ij} + \lambda) = \det A$.

证明. (1). 由反对称性以及行列式的性质, 立即有:

$$\det(A) = \det(A^T) = \det(-A) = (-1)^{2m+1} \det(A) = -\det A.$$

从而 $\det A = 0$.

(2). 我们对 m 进行归纳. $m = 1$, 即 $n = 2$. 则

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ -a_{12} & 0 \end{pmatrix},$$

立即有 $\det A = a_{12}^2$. 令 $\text{Pf}(A) = a_{12}$, 命题成立.

假设对 $2(m-1)$ 阶反对称矩阵命题成立, 现考虑 $2m$ 阶反对称矩阵 A . 对 A 分别实施如下变换: 当 $j = 3, 4, \dots, 2m$

$$\text{第 } j \text{ 列} - \frac{a_{1j}}{a_{12}} \cdot \text{第 } 2 \text{ 列}, \quad \text{第 } j \text{ 行} - \frac{a_{2j}}{a_{21}} \cdot \text{第 } 1 \text{ 行},$$

则 a_{ij} 变为

$$a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{1j}a_{i2}}{a_{12}} - \frac{a_{2j}a_{i1}}{a_{21}}.$$

由于 A 是反对称的, 立即有

$$a'_{ji} = a_{ji} - \frac{a_{1i}a_{j2}}{a_{12}} - \frac{a_{2i}a_{j1}}{a_{21}} = -a_{ij} + \frac{a_{i1}a_{2j}}{a_{21}} + \frac{a_{i2}a_{1j}}{a_{12}} = -a'_{ij}$$

对所有 $3 \leq i, j \leq 2m$ 成立. 也就是

$$B = (a'_{ij})_{(2m-2) \times (2m-2)} = \frac{1}{a_{12}} (a_{12}a_{ij} - a_{1j}a_{i2} + a_{2j}a_{i1})$$

是 $(2m-2)$ 阶反对称方阵. 由归纳假设存在多项式 $f \in \mathbb{F}[a_{ij} | 1 \leq i < j \leq n]$ 使得

$$A = a_{12}^2 \det B = a_{12}^{4-2m} f^2 = (a_{12}^{2-m} f)^2.$$

由于 $\mathbb{F}[a_{ij} | 1 \leq i < j \leq n]$ 是唯一分解整环, 则有 $\text{Pf}(A) = a_{12}^{2-m} f \in \mathbb{F}[a_{ij} | 1 \leq i < j \leq n]$.

注. 若 $A \in \mathbb{R}^{2m \times 2m}$, $A^T = -A$, 则有 $\det A \geq 0$.

(3). 通过加边有

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) &= \begin{vmatrix} 0+\lambda & a_{12}+\lambda & \cdots & a_{1n}+\lambda \\ -a_{12}+\lambda & 0+\lambda & \cdots & a_{2n}+\lambda \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{1n}+\lambda & -a_{2n}+\lambda & \cdots & 0+\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & \cdots & \lambda \\ 0 & 0+\lambda & \cdots & a_{1n}+\lambda \\ 0 & -a_{12}+\lambda & \cdots & a_{2n}+\lambda \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & -a_{1n}+\lambda & \cdots & 0+\lambda \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & \lambda & \cdots & \lambda \\ -1 & 0 & \cdots & a_{12} \\ -1 & -a_{12} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -a_{1n} & \cdots & 0 \end{vmatrix} = \Delta_1 + \Delta_2 \end{aligned}$$

其中

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \lambda & \cdots & \lambda \\ -1 & 0 & \cdots & a_{12} \\ -1 & -a_{12} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -a_{1n} & \cdots & 0 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & 0 & \cdots & a_{12} \\ -1 & -a_{12} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -a_{1n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

是 $n+1$ (奇数) 阶反对称方阵的行列式的 λ 倍, 等于 0.

而

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -1 & -a_{12} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -a_{1n} & -a_{2n} & \cdots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \cdots & 0 \end{vmatrix} = |A|.$$

因此

$$\Delta(\lambda) = \Delta_1 + \Delta_2 = 0 + |A| = |A|.$$

(3). **证明2.** 将 A 视为 $\{a_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq n\}$ 的反对称方阵, 故可设为可逆的, 并且反对称方阵的逆也是反对称的. 记

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} (1, 1, \dots, 1).$$

则有

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) &= \det(A + \lambda J) = \det(A) \det \left(I_n + \lambda A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} (1, \dots, 1) \right) \\ &= \det(A) \det \left(1 + \lambda (1, \dots, 1) A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \det A. \end{aligned} \quad \square$$

事实上, 多项式 $\text{Pf}(A)$ 有如下形式:

定义 2.3.2. 设 $A = (a_{ij})$ 为 $2m$ 阶反对称矩阵. 定义

$$\text{Pf}(A) = \sum_{\sigma} \text{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)\sigma(2)} a_{\sigma(3)\sigma(4)} \cdots a_{\sigma(2m-1)\sigma(2m)},$$

其中求和遍历所有置换 $\sigma \in S_{2m}$ 将集合 $\{1, 2, \dots, 2m\}$ 分成 m 个无序对 $\{\sigma(1), \sigma(2)\}, \dots, \{\sigma(2m-1), \sigma(2m)\}$, 满足 $\sigma(1) < \sigma(3) < \cdots < \sigma(2m-1)$, 以及 $\sigma(2i-1) < \sigma(2i)$, $1 \leq i \leq m$, 其中 $\text{sgn}(\sigma)$ 是置换 σ 的符号. 更简洁地, 我们有

$$\text{Pf}(A) = \frac{1}{2^m m!} \sum_{\pi \in S_{2m}} \text{sgn}(\pi) \prod_{i=1}^m a_{\pi(2i-1)\pi(2i)}.$$

例 2.3.14 (p40 习题3 [李尚志]). 证明:

$$\begin{vmatrix} a_{11} + x_1 & \cdots & a_{1n} + x_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + x_1 & \cdots & a_{nn} + x_n \end{vmatrix} = \det A + \sum_{j=1}^n x_j \sum_{k=1}^n A_{kj},$$

其中 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, A_{jk} 是 a_{jk} 在 $\det A$ 中的代数余子式.

证明. 将行列式中每个元素 $x_j + a_{ij}$ 拆分为 x_j 与 a_{ij} 之和. 由行列式的多重线性性, 行列式可展开为 2^n 个行列式之和, 每个行列式的第 j 列要么全为 x_j , 要么取 A 的第 j 列.

- 若有两列及以上取全 x_j , 则这两列成比例, 行列式为0.
- 若恰有一列 (设为第 j 列) 取 x_j , 其余列取 A 的对应列, 则此行列式等于 x_j 乘以 A 中第 j 列全为1、其余列不变的行列式. 按第 j 列展开, 等于 $x_j \sum_{k=1}^n A_{kj}$.
- 若所有列均取 A 的对应列, 则得 $\det A$.

因此原行列式 $= \det A + \sum_{j=1}^n x_j \sum_{k=1}^n A_{kj}$. □

例 2.3.15 (p51 习题8 [陈发来-欧阳毅]; p86 习题5 [炯书]). 设 n 阶方阵 $A = (a_{ij})$ 的元素都是复数, 并且对任意 $i = 1, \dots, n$,

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|,$$

则方阵 A 称为主对角占优矩阵. 证明主对角占优矩阵的行列式不为零.

证1. 打洞+归纳法. □

证2. 假设 $\det A = 0$, 则齐次线性方程组 $Ax = 0$ 有非零解. 取非零解 $x = (x_1, \dots, x_n)^T$, 并选取指标 k 使得

$$|x_k| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| > 0.$$

考虑第 k 个方程:

$$a_{kk}x_k = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n a_{kj}x_j.$$

两边取模, 得

$$|a_{kk}||x_k| \leq \sum_{j \neq k} |a_{kj}||x_j| \leq \sum_{j \neq k} |a_{kj}| \cdot |x_k|.$$

由于 $|x_k| > 0$, 两边同时除以 $|x_k|$, 得到

$$|a_{kk}| \leq \sum_{j \neq k} |a_{kj}|,$$

这与题设的主对角占优条件

$$|a_{kk}| > \sum_{j \neq k} |a_{kj}|$$

矛盾. 因此假设不成立, $\det A \neq 0$. □

Chapter 3

矩阵

§3.1 矩阵: 线性代数(B1)回顾

参考课程PPT.

§3.2 Binet-Cauchy公式

定理 3.2.1 (Binet-Cauchy). 设 $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{F}^{n \times m}$, 则

$$\det(AB) = \begin{cases} 0, & n < m, \\ \det A \det B, & m = n, \\ \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_m \leq n} A \begin{pmatrix} 1, & 2, & \dots, & m \\ j_1, & j_2, & \dots, & j_m \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} j_1, & j_2, & \dots, & j_m \\ 1, & 2, & \dots, & m \end{pmatrix}, & n > m. \end{cases}$$

证明. 记 $A = (a_{ij})$, B 的行向量依次为 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$, 则

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \det \left(\sum_{j=1}^n a_{1j} \beta_j, \sum_{j=1}^n a_{2j} \beta_j, \dots, \sum_{j=1}^n a_{mj} \beta_j \right) \\ &= \sum_{1 \leq j_1, \dots, j_m \leq n} a_{1j_1} \cdots a_{mj_m} \det(\beta_{j_1}, \dots, \beta_{j_m}) \\ &= \sum_{j_1, \dots, j_m \text{ 两两不等}} a_{1j_1} \cdots a_{mj_m} \det(\beta_{j_1}, \dots, \beta_{j_m}) \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n} \sum_{\substack{(i_1, \dots, i_m) \\ (j_1, \dots, j_m)}} a_{1j_1} \cdots a_{mj_m} (-1)^{\tau(j_1, \dots, j_m)} \det(\beta_{i_1}, \dots, \beta_{i_m}) \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n} A \begin{pmatrix} 1, \dots, m \\ i_1, \dots, i_m \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} i_1, \dots, i_m \\ 1, \dots, m \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

其中, $(i_1, \dots, i_m)$ 表示 $(j_1, \dots, j_m)$ 是 $\{i_1, \dots, i_m\}$ 的排列. □

利用 Binet-Cauchy 公式, 可以证明以下定理.

定理 3.2.2. 设 $A \in \mathbb{F}^{p \times q}$, $B \in \mathbb{F}^{q \times s}$, $C = AB$. 则矩阵 C 的 r 阶子式满足

$$C \begin{pmatrix} i_1, i_2, \dots, i_r \\ j_1, j_2, \dots, j_r \end{pmatrix} = \begin{cases} 0, & r > q, \\ \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_r \leq q} A \begin{pmatrix} i_1, i_2, \dots, i_r \\ k_1, k_2, \dots, k_r \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} k_1, k_2, \dots, k_r \\ j_1, j_2, \dots, j_r \end{pmatrix}, & r \leq q. \end{cases}$$

证明. 设 $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $C = AB = (c_{ij})$, 其中

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^q a_{ik} b_{kj}.$$

则

$$C \begin{pmatrix} i_1, i_2, \dots, i_r \\ j_1, j_2, \dots, j_r \end{pmatrix} = \det(A_1 B_1) = \begin{vmatrix} \sum_{k_1=1}^q a_{i_1 k_1} b_{k_1 j_1} & \sum_{k_2=1}^q a_{i_1 k_2} b_{k_2 j_2} & \cdots & \sum_{k_r=1}^q a_{i_1 k_r} b_{k_r j_r} \\ \sum_{k_1=1}^q a_{i_2 k_1} b_{k_1 j_1} & \sum_{k_2=1}^q a_{i_2 k_2} b_{k_2 j_2} & \cdots & \sum_{k_r=1}^q a_{i_2 k_r} b_{k_r j_r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k_1=1}^q a_{i_r k_1} b_{k_1 j_1} & \sum_{k_2=1}^q a_{i_r k_2} b_{k_2 j_2} & \cdots & \sum_{k_r=1}^q a_{i_r k_r} b_{k_r j_r} \end{vmatrix}.$$

对矩阵 A 的子矩阵

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{i_1 1} & a_{i_1 2} & \cdots & a_{i_1 q} \\ a_{i_2 1} & a_{i_2 2} & \cdots & a_{i_2 q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_r 1} & a_{i_r 2} & \cdots & a_{i_r q} \end{pmatrix}$$

和矩阵 B 的子矩阵

$$B_1 = \begin{pmatrix} b_{1 j_1} & b_{1 j_2} & \cdots & b_{1 j_r} \\ b_{2 j_1} & b_{2 j_2} & \cdots & b_{2 j_r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{q j_1} & b_{q j_2} & \cdots & b_{q j_r} \end{pmatrix}$$

应用 Binet-Cauchy 公式即得定理. □

现在举例说明上述定理的应用.

例 3.2.1 (p73 例2.5.3 [陈发来-欧阳毅]; p102 例1 [炯书]). n 阶方阵

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_0 \end{pmatrix}$$

称为循环矩阵, 求 A 的行列式.

解. 设 ω 是 n 次本原单位根, 即 $\omega^i \neq 1, 1 \leq i \leq n-1$, 但 $\omega^n = 1$. 令

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}.$$

取 n 阶矩阵

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \cdots & \omega^{n-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \cdots & \omega^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{n-1} & \omega^{2(n-1)} & \cdots & \omega^{(n-1)^2} \end{pmatrix}.$$

容易验证

$$AB = B \operatorname{diag}(f(1), f(\omega), f(\omega^2), \dots, f(\omega^{n-1})).$$

两端取行列式, 由定理 3.2.1,

$$\det A \det B = \left(\prod_{i=0}^{n-1} f(\omega^i) \right) \det B.$$

显然 Vandermonde 行列式

$$\det B = \prod_{0 \leq i < j \leq n-1} (\omega^j - \omega^i) \neq 0.$$

因此

$$\det A = \prod_{i=0}^{n-1} f(\omega^i).$$

□

例 3.2.2 (p68 例2.4.3 [陈发来-欧阳毅]; p103 例3 [炯书]; p213 例6 [李尚志]). 利用行列式证明 Cauchy 不等式: 对实数 a_i, b_i ,

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right),$$

其中等号成立当且仅当 $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$.

证明. 取 $2 \times n$ 实矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}.$$

则

$$AA^T = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_i^2 & \sum_{i=1}^n a_i b_i \\ \sum_{i=1}^n a_i b_i & \sum_{i=1}^n b_i^2 \end{pmatrix}.$$

因此

$$\det(AA^T) = \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2.$$

另一方面, 由 Binet-Cauchy 公式,

$$\det(AA^T) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} A \begin{pmatrix} 1, 2 \\ i, j \end{pmatrix} A^T \begin{pmatrix} i, j \\ 1, 2 \end{pmatrix} = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(A \begin{pmatrix} 1, 2 \\ i, j \end{pmatrix} \right)^2 \geq 0.$$

所以

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 \geq 0.$$

即得 Cauchy 不等式. 等号成立当且仅当对所有 $i < j$,

$$A\begin{pmatrix} 1, 2 \\ i, j \end{pmatrix} = a_i b_j - a_j b_i = 0,$$

$$\text{即 } \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}.$$

□

§3.3 分块矩阵

例 3.3.1 (Schur 公式). (1). 设 $A \in \mathbb{F}^{m \times m}$, $B \in \mathbb{F}^{m \times n}$, $C \in \mathbb{F}^{p \times m}$, $D \in \mathbb{F}^{p \times n}$, 若 A 可逆, 则有

$$\begin{pmatrix} I_m & \mathbf{0} \\ -CA^{-1} & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ \mathbf{0} & D - CA^{-1}B \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & -A^{-1}B \\ \mathbf{0} & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ C & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} I_m & \mathbf{0} \\ -CA^{-1} & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & -A^{-1}B \\ \mathbf{0} & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}.$$

(2). 设 $A \in \mathbb{F}^{m \times m}$, $B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ 均可逆, 则有

$$\begin{pmatrix} I_m & S \\ \mathbf{0} & I_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I_m & -S \\ \mathbf{0} & I_n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} I_m & \mathbf{0} \\ T & I_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I_m & \mathbf{0} \\ -T & I_n \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} A & S \\ \mathbf{0} & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}SB^{-1} \\ \mathbf{0} & B^{-1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ T & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & \mathbf{0} \\ -B^{-1}TA^{-1} & B^{-1} \end{pmatrix}.$$

例 3.3.2 (p68 例2.4.3 [陈发来-欧阳毅]; p110 例2 [炯书]). 设 $A, B, C, D \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 并且 $AC = CA$. 证明

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - CB).$$

证明. 首先, 若 A 可逆, 则对 Schur 公式两边取行列式, 即得

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A) \cdot \det(D - CA^{-1}B) = \det(AD - ACA^{-1}B) = \det(AD - CB).$$

对于一般情况, 令 $A_x = xI + A$. 则 $f(x) = \det A_x$ 作为 x 的 n 次多项式最多有 n 个根. 若 $f(x) \neq 0$, 则 A_x 可逆. 由 $A_x C = CA_x$ 故 $\det \begin{pmatrix} A_x & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A_x D - CB)$. 由于等式两边作为 x 的多项式最多有 n 个点取值不一样, 那么它们必然是同一个多项式. 令 $x = 0$ 即得欲证. □

例 3.3.3 (p61 例2.3.3 [陈发来-欧阳毅]; p111 例3 [炯书]; p207 例3, p227 例3 [李尚志]). 设 $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{F}^{n \times m}$. 则

- (1). 证明: $\det(I_m - AB) = \det(I_n - BA)$.
- (2). 证明: 如果 $I_m - AB$ 可逆, 那么 $I_n - BA$ 可逆. 并求此时 $I_n - BA$ 的逆.

证明. 对等式

$$\begin{pmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m & \mathbf{0} \\ B & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A \\ \mathbf{0} & I_n - BA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m & A \\ \mathbf{0} & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m - AB & \mathbf{0} \\ B & I_n \end{pmatrix}$$

取行列式即得 $\det(I_m - AB) = \det(I_n - BA)$. 这说明 $I_m - AB$ 可逆, 当且仅当 $I_n - BA$ 可逆.

现在设 $I_m - AB$ 可逆. 由上述等式得

$$\begin{pmatrix} I_m & A \\ \mathbf{0} & I_n - BA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m & \mathbf{0} \\ -B & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & A \\ \mathbf{0} & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m - AB & \mathbf{0} \\ B & I_n \end{pmatrix}.$$

两边求逆, 即得

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} I_m & -A(I_n - BA)^{-1} \\ \mathbf{0} & (I_n - BA)^{-1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} I_m - AB & \mathbf{0} \\ B & I_n \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} I_m & -A \\ \mathbf{0} & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & \mathbf{0} \\ B & I_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (I_m - AB)^{-1} & \mathbf{0} \\ -B(I_m - AB)^{-1} & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m - AB & -A \\ B & I_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I_m & -(I_m - AB)^{-1}A \\ \mathbf{0} & I + B(I_n - AB)^{-1}A \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

因此

$$(I_n - BA)^{-1} = I_n + B(I_m - AB)^{-1}A. \quad \square$$

注. 注意如下性质: 若

$$\frac{1}{1 - xy} = 1 + xy + xyxy + xyxyxy + \cdots$$

则有

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - yx} &= 1 + yx + yxyx + yxyxyx + yxyxyxyx + \cdots = 1 + y(1 + xy + xyxy + \cdots)x \\ &= 1 + y \cdot \frac{1}{1 - xy} \cdot x. \end{aligned}$$

解2. 猜测, $(I_n - BA)^{-1} = I_n + B(I_m - AB)^{-1}A$. 计算有

$$\begin{aligned} (I_n - BA)(I_n + B(I_m - AB)^{-1}A) &= I_n - BA + (B - BAB)(I_m - AB)^{-1}A \\ &= I_n - BA + B(I_m - AB)(I_m - AB)^{-1}A = I_n. \end{aligned}$$

猜测成立. □

解3. 设 $X(I_m - AB) = I_m$, $(I_n - BA)Y = I_n$. 首先有 $Y - BAY = I_n$, 等式两边左乘 A 立即得到 $AY - ABAY = A$, 也就是 $(I_m - AB)AY = A$. 等式两边再左乘 X , 立即得到 $XA = X(I_m - AB)AY = AY$. 代入上式, 则有

$$Y = I_n + BAY = I_n + BXA = I_n + B(I_m - AB)^{-1}A. \quad \square$$

例 3.3.4 (p114 习题11, p121 例2, [炯书]). 设 $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{F}^{n \times m}$, $\lambda \in \mathbb{F}$. 证明

$$\lambda^n \det(\lambda I_m - AB) = \lambda^m \det(\lambda I_n - BA).$$

证明. 设 $\text{rank } A = r$. 则存在可逆矩阵 $P \in \mathbb{F}^{m \times m}$, $Q \in \mathbb{F}^{n \times n}$, 使得

$$A = P \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} Q = PCQ, \quad QBQ \triangleq \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix},$$

其中 $B_{11} \in \mathbb{F}^{r \times r}$, 记矩阵 $\begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ 为 C . 于是

$$\begin{aligned} \lambda^n \det(\lambda I_m - AB) &= \lambda^n \det(\lambda I_m - PCQB) = \lambda^n \det(P(\lambda I_m - CQBQ)P^{-1}) \\ &= \lambda^n \det(\lambda I_m - CQBQ) = \lambda^n \det\left(\lambda I_m - \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\right) \\ &= \lambda^n \det\begin{pmatrix} \lambda I_r - B_{11} & -B_{12} \\ \mathbf{0} & \lambda I_{m-r} \end{pmatrix} \\ &= \lambda^{m+n-r} \det(\lambda I_r - B_{11}). \end{aligned}$$

另一方面,

$$\begin{aligned} \lambda^m \det(\lambda I_n - BA) &= \lambda^m \det(\lambda I_n - BPCQ) = \lambda^m \det(Q^{-1}(\lambda I_n - QBPC)Q) \\ &= \lambda^m \det(\lambda I_n - QBPC) = \lambda^m \det\left(\lambda I_n - \begin{pmatrix} B_{11} & \mathbf{0} \\ B_{21} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\right) \\ &= \lambda^m \det\begin{pmatrix} \lambda I_r - B_{11} & \mathbf{0} \\ -B_{21} & \lambda I_{n-r} \end{pmatrix} \\ &= \lambda^{m+n-r} \det(\lambda I_r - B_{11}). \end{aligned}$$

于是得到

$$\lambda^n \det(\lambda I_m - AB) = \lambda^m \det(\lambda I_n - BA). \quad \square$$

例 3.3.5 (p111 例4 [炯书]). n 阶方阵 A 的 n 个子式

$$A \begin{pmatrix} 1, 2, \dots, k \\ 1, 2, \dots, k \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

称为方阵 A 的**顺序主子式**. 设方阵 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 的顺序主子式都是正的, 而非对角元都是负的. 证明: 逆矩阵 A^{-1} 的每个元素都是正的.

证明. 对阶数 n 用归纳法. 当 $n = 1$ 时, 结论显然成立. 设结论对 $n - 1$ 阶方阵成立, 并设 A 是 n 阶方阵. 把方阵 A 分块为

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & \alpha \\ \beta^T & a_{nn} \end{pmatrix},$$

其中 α 与 β 是 $(n - 1) \times 1$ 矩阵, A_1 是 A 的 $n - 1$ 阶子矩阵.

由假设,

$$\det A_1 = A \begin{pmatrix} 1, 2, \dots, (n-1) \\ 1, 2, \dots, (n-1) \end{pmatrix} > 0,$$

因此 A_1 可逆. 由 Schur 公式,

$$\begin{pmatrix} I_{n-1} & \mathbf{0} \\ -\beta^T A_1^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & \alpha \\ \beta^T & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{n-1} & -A_1^{-1}\alpha \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & a_{nn} - \beta^T A_1^{-1}\alpha \end{pmatrix}.$$

两端取行列式, 得到

$$\det A = (a_{nn} - \beta^T A_1^{-1}\alpha) \det A_1.$$

因为 $\det A_1 > 0$, $\det A > 0$, 故

$$a_{nn} - \beta^T A_1^{-1}\alpha > 0.$$

由于

$$\begin{pmatrix} I_{n-1} & \mathbf{0} \\ -\beta^T A_1^{-1} & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I_{n-1} & \mathbf{0} \\ \beta^T A_1^{-1} & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} I_{n-1} & -A_1^{-1}\alpha \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I_{n-1} & A_1^{-1}\alpha \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}.$$

因此

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & \alpha \\ \beta^T & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{n-1} & \mathbf{0} \\ \beta^T A_1^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & a_{nn} - \beta^T A_1^{-1}\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{n-1} & A_1^{-1}\alpha \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}.$$

于是由“穿脱原理”:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1 & \alpha \\ \beta^T & a_{nn} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I_{n-1} & -A_1^{-1}\alpha \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (a_{nn} - \beta^T A_1^{-1}\alpha)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{n-1} & \mathbf{0} \\ -\beta^T A_1^{-1} & 1 \end{pmatrix}.$$

展开得

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} + (a_{nn} - \beta^T A_1^{-1}\alpha)^{-1} A_1^{-1}\alpha \beta^T A_1^{-1} & -(a_{nn} - \beta^T A_1^{-1}\alpha)^{-1} A_1^{-1}\alpha \\ -(a_{nn} - \beta^T A_1^{-1}\alpha)^{-1} \beta^T A_1^{-1} & (a_{nn} - \beta^T A_1^{-1}\alpha)^{-1} \end{pmatrix}.$$

由于 $a_{nn} - \beta^T A_1^{-1}\alpha > 0$, 故 A^{-1} 的 (n, n) 元是正的. 由归纳假设, A_1^{-1} 的每个元素都是正的, 而 α 与 β^T 的每个元素都是负的, 从而

$$-(a_{nn} - \beta^T A_1^{-1}\alpha)^{-1} \beta^T A_1^{-1} \quad \text{与} \quad -(a_{nn} - \beta^T A_1^{-1}\alpha)^{-1} A_1^{-1}\alpha$$

的每个元素都是正的.

最后, 由于 α 与 β^T 的每个元素都是负的, 因此 $\alpha \beta^T$ 的每个元素都是正的. 又 A_1^{-1} 的每个元素都是正的, 所以

$$A_1^{-1} + (a_{nn} - \beta^T A_1^{-1}\alpha)^{-1} A_1^{-1}\alpha \beta^T A_1^{-1}$$

的每个元素都是正的. 因此, A^{-1} 的所有元素均为正. □

§3.4 一些例子

§3.4.1 A^k 和 e^A

例 3.4.1 (p184 §4.5.3 [李尚志]). $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 定义 $e^A := \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m \frac{A^k}{k!}$. 设复方阵 A, B 可交换, 则 $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$.

证明. 首先证明极限 $\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m \frac{A^k}{k!}$ 存在. 对 n 阶方阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, 定义 A 的范数 $|A| := \max\{|a_{ij}|\}$. 根据矩阵加法和乘法运算, 立得

$$|A+B| \leq |A| + |B|, \quad |AB| \leq n|A||B|.$$

这就说明

$$|A^i B^j| \leq n^{i+j-1} |A|^i |B|^j.$$

此外, 根据定义, 显然有

$$\sum_{i=1}^{\infty} |A_i| \text{收敛} \implies \sum_{i=1}^{\infty} A_i \text{收敛}.$$

回到例子的情形, 令 $|A| = M, |B| = N$. 由 $|A^k| \leq n^{k-1} M^k$, 而级数 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^{k-1} M^k}{k!}$ 收敛, 故可得 $e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ 收敛.

下面证明若 $AB = BA$, 则 $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$. 我们有

$$\sum_{k=0}^{l+m} \frac{(A+B)^k}{k!} - \sum_{i=0}^l \sum_{j=0}^m \frac{A^i B^j}{i! j!} = \left(\sum_{i=l+1}^{l+m} \sum_{j=0}^{l+m-i} + \sum_{j=m+1}^{l+m} \sum_{i=0}^{l-m-j} \right) \frac{A^i B^j}{i! j!}.$$

故

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^{l+m} \frac{(A+B)^k}{k!} - \sum_{i=0}^l \sum_{j=0}^m \frac{A^i B^j}{i! j!} \right| &\leq \left(\sum_{i=l+1}^{l+m} \sum_{j=0}^{l+m-i} + \sum_{j=m+1}^{l+m} \sum_{i=0}^{l-m-j} \right) \frac{n^{i+j-1} M^i N^j}{i! j!} \\ &\leq \sum_{i=l+1}^{l+m} \frac{n^{i-1} M^i}{i!} \sum_{j=0}^m \frac{n^j N^j}{j!} + \sum_{j=m+1}^{l+m} \frac{n^{j-1} N^j}{j!} \sum_{i=0}^l \frac{n^i M^i}{i!} \\ &\leq e^{nN} \sum_{i=l+1}^{l+m} \frac{n^{i-1} M^i}{i!} + e^{nM} \sum_{j=m+1}^{l+m} \frac{n^{j-1} N^j}{j!}. \end{aligned}$$

令 $l, m \rightarrow \infty$, 即例题得证. □

例 3.4.2. 设

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}_{n \times n} = J_n(\lambda).$$

求 A^k 和 e^A .

解. 由于 $A = \lambda I_n + N$, 由牛顿二项式展开定理, 立即有

$$A^k = \lambda^k I_n + \binom{k}{1} \lambda^{k-1} N + \binom{k}{2} \lambda^{k-2} N^2 + \cdots = \sum_{i=0}^{\min(k, n-1)} \binom{k}{i} \lambda^{k-i} N^i.$$

从而

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \binom{k}{i} \lambda^{k-i} N^i}{k!} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i!} \sum_{k=i}^{\infty} \frac{\lambda^{k-i}}{(k-i)!} N^i = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{e^\lambda}{i!} N^i.$$

特别地, $n = 2$ 时有

$$e^A = \begin{pmatrix} e^\lambda & e^\lambda \\ 0 & e^\lambda \end{pmatrix} = e^\lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

若 $n = 3$ 则有

$$e^A = \begin{pmatrix} e^\lambda & e^\lambda & \frac{e^\lambda}{2} \\ 0 & e^\lambda & e^\lambda \\ 0 & 0 & e^\lambda \end{pmatrix} = e^\lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad \square$$

注. (1). 若 $A = \text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_k)$, 其中 A_i 均为方阵, 则有

$$e^A = \text{diag}(e^{A_1}, e^{A_2}, \dots, e^{A_k}).$$

(2). 若存在可逆方阵 P 使得 $A = PJP^{-1}$, 则由定义立即有 $e^A = Pe^JP^{-1}$.

§3.4.2 矩阵的逆

例 3.4.3 (p49 例2.1.2 [陈发来-欧阳毅]; p118 例1 [炯书]; p189 例1 (3) [李尚志]). 求 A^{-1} , 其中

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

解1. 对增广矩阵 $(A | I)$ 做初等行变换: $(A | I) \xrightarrow{\text{行变换}} (I | A^{-1})$. □

解2. 对增广矩阵 $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \alpha^T & 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A & \mathbf{0} & I_n \end{array} \right)$ 做初等行变换化为: $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \mathbf{0} & 1 & -\alpha^T A^{-1} \\ \mathbf{0} & I_n & \mathbf{0} & A^{-1} \end{array} \right)$. □

解3. 因为

$$A + I = J = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} (1 \cdots 1) = \alpha \cdot \alpha^T,$$

那么 $(A + I)^2 = n(A + I)$, 即 $A^2 + (2 - n)A + (1 - n)I$. 所以

$$A^{-1} = \frac{1}{n-1} (A + (n-2)I) = \begin{pmatrix} \frac{2-n}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} \\ \frac{1}{n-1} & \frac{2-n}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{2-n}{n-1} \end{pmatrix}. \quad \square$$

解4. 由上述例题, 有

$$(I_n - BA)^{-1} = I_n + B(I_m - AB)^{-1}A.$$

因此

$$A^{-1} = (-I_n + J)^{-1} = -(I_n - \alpha \cdot \alpha^T)^{-1} = -(I_n + (1-n)^{-1}\alpha \cdot \alpha^T) = \frac{1}{n-1}J - I_n. \quad \square$$

例 3.4.4 (p49 例2.1.3 [陈发来-欧阳毅]). 求矩阵 A 的逆, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & \\ 1 & 2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

解1. 记 $A = A_n$, $\det(A) = \Delta_n$. 由三对角方阵行列式, 立即有 $\Delta_n = \Delta_2 - \Delta_1 = 1$, $\det(A) = n+1$. 更一般地, 我们有

$$\Delta_{m+n} = \Delta_m \Delta_n - bc \Delta_{m-1} \Delta_{n-1}.$$

计算可得 $i \leq j$ 时, 有

$$M_{ij} = \Delta_{i-1} \Delta_{n-j} = i(n+1-j).$$

那么根据 $M_{ij} = M_{ji}$, 可知

$$A^{-1} = \left((-1)^{i+j} (\min(i, j) - \frac{ij}{n+1}) \right). \quad \square$$

解2. 定义方阵 $B = (b_{ij})_{n \times n}$, 满足

$$b_{ij} = \begin{cases} (-1)^{i+j} \Delta_{i-1} \Delta_{n-j} = (-1)^{i+j} i(n+1-j), & i \leq j, \\ (-1)^{i+j} \Delta_{j-1} \Delta_{n-i} = (-1)^{i+j} j(n+1-i), & i > j. \end{cases}$$

也就是 $b_{ij} = (-1)^{i+j} (\min(i, j)(n+1) - ij)$. 设 $C = AB = (c_{ij})_{n \times n}$. 则立即有

$$\begin{aligned} (-1)^{i+j-1} c_{ij} &= (-1)^{i+j-1} \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = (-1)^{i+j-1} (a_{i,i-1} b_{i-1,j} + a_{i,i} b_{i,j} + a_{i,i+1} b_{i+1,j}) \\ &= (n+1) (\min(i-1, j) - 2\min(i, j) + \min(i+1, j)) - (i-1)j + 2ij - (i+1)j \\ &= \delta_{ij} (n+1). \end{aligned}$$

因此有 $B = A^*$. $\square$

§3.4.3 秩与相抵

例 3.4.5 (p125 例1 [炯书]). 矩阵 $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ 列满秩当且仅当存在 m 阶可逆方阵 P , 使得

$$A = P \begin{pmatrix} I_n \\ \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

其中 $\mathbf{0}$ 是 $(m-n) \times n$ 零矩阵.

证明. 充分性显然. 下面证明必要性. 因为 A 是列满秩的, 即 $\text{rank } A = n$. 因此存在 m 阶与 n 阶可逆方阵 R 与 T , 使得

$$A = R \begin{pmatrix} I_n \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} T.$$

由分块矩阵的乘法,

$$A = R \begin{pmatrix} T \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_{m-n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} I_n \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}. \quad \square$$

例 3.4.6 (p125 例2 [炯书]). 设 $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$. 证明 $\text{rank } A = r \geq 1$ 的充分必要条件是, 存在列满秩的 $m \times r$ 矩阵 B 与行满秩的 $r \times n$ 矩阵 C , 使得 $A = BC$.

证明. 必要性: 设 $\text{rank } A = r$, 则存在 m 阶与 n 阶可逆方阵 P 与 Q , 使得

$$A = P \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} Q = P \begin{pmatrix} I_r \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}_{m \times r} \cdot \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \end{pmatrix}_{r \times n} Q = B \cdot C.$$

并且有

$$\text{rank } B = \text{rank } P \begin{pmatrix} I_r \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \text{rank } \begin{pmatrix} I_r \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = r,$$

$$\text{rank } C = \text{rank } \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \end{pmatrix}_{r \times n} Q = \text{rank } \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \end{pmatrix}_{r \times n} = r,$$

即 B 与 C 分别是列满秩与行满秩的, 并且 $A = BC$.

充分性: 设 $A = BC$, 其中 B 与 C 分别是列满秩与行满秩的. 则由上例

$$B = P \begin{pmatrix} I_r \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}_{m \times r}, \quad C^T = Q^T \begin{pmatrix} I_r \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}_{n \times r},$$

其中 P 为 m 阶可逆方阵, Q^T 是 n 阶可逆方阵. 于是

$$A = P \begin{pmatrix} I_r \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}_{m \times r} \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \end{pmatrix}_{r \times n} Q = P \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} Q.$$

所以 $\text{rank } A = r$. $\square$

注. 任意矩阵可分解为列满秩矩阵与行满秩矩阵的乘积, 故上述结论也称为矩阵的**满秩分解定理**.

例 3.4.7 (p82 例2.6.8 [陈发来-欧阳毅]). 证明 $r(AB) = r(A)$ 当且仅当存在矩阵 X 使 $ABX = A$.

证明. 若 $ABX = A$, 则

$$r(A) = r(ABX) \leq r(AB) \leq r(A) \implies r(AB) = r(A).$$

另一方面, 设 $r(AB) = r(A)$. 则 $A = P \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} Q$, 其中 P, Q 为可逆阵. 记 $QB = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$

其中 C_1 的行数是 r , 则 $AB = P \begin{pmatrix} C_1 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$. 由 $r(AB) = r$ 知 C_1 是行满秩矩阵. 令 D_1 是它的一个右逆. 则 $X = (D_1 \ \mathbf{0})Q$ 满足 $ABX = A$. $\square$

注. 由上述例题, 立即有

$$r(A^k) = r(A^{k+1}) \implies \exists X, A^k = A^{k+1}X \implies A^{k+1} = A^{k+2}X.$$

立即有

$$r(A^{k+1}) = r(A^{k+2}X) \leq r(A^{k+2}) \leq r(A^{k+1}).$$

例 3.4.8 (p126 例3 [炯书]). 设 A 是给定 $m \times n$ 矩阵, X 是 $m \times n$ 矩阵, 求方程 $A^T X = X^T A$ 的所有解 X .

证明. 设 $\text{rank } A = r$, 取定 m 阶与 n 阶可逆方阵 P 与 Q , 使得

$$A = P \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} Q.$$

代入原矩阵方程, 得到

$$Q^T \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} P^T X = X^T P \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} Q \iff \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} P^T X Q^{-1} = (P^T X Q^{-1})^T \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

记

$$P^T X Q^{-1} = Y = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{11}^T & \mathbf{0} \\ Y_{12}^T & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

因此, $Y_{11}^T = Y_{11}$, $Y_{12} = \mathbf{0}$. 于是,

$$X = (P^T)^{-1} Y Q = (P^T)^{-1} \begin{pmatrix} Y_{11} & \mathbf{0} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} Q \quad (3.1)$$

其中 Y_{11} 是任意的 r 阶对称方阵, Y_{21} 与 Y_{22} 分别是任意的 $(m-r) \times r$ 与 $(m-r) \times (n-r)$ 矩阵. 这说明, 原矩阵方程的解 X 应具有形式 (3.1).

反之, 形如(3.1)的矩阵 X 一定是原矩阵方程的解. 因此, (3.1)给出了原矩阵方程的所有解. $\square$

例 3.4.9 (p128 例5 [炯书]; p232 习题2 [李尚志]). 证明, n 阶幂等方阵 A (即适合 $A^2 = A$) 的秩等于它的迹.

证明1. 设 $\text{rank } A = r$, 则存在 n 阶可逆方阵 P 和 Q , 使得

$$A = P \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} Q.$$

因为方阵 A 是幂等的, 所以,

$$P \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} Q P \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} Q = P \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} Q \implies \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} Q P \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

记

$$Q P = R = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} R_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \implies R_{11} = I_r, \quad Q = \begin{pmatrix} I_r & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

于是

$$A = P \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} I_r & R_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

立即有 $\text{tr}(A) = r = r(A)$. □

证明2. 考虑方阵 A 的特征值, 若 α 是 A 属于特征值 λ 的特征向量, 则有

$$\lambda\alpha = A\alpha = A^2\alpha = \lambda^2\alpha \implies \lambda^2 = \lambda \implies \lambda = 1, 0.$$

由任意方阵相似于上三角阵, 故存在可逆方阵 P 使得

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} B & C \\ \mathbf{0} & D \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ 0 & 1 & \ddots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & * \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{r \times r}, D = \begin{pmatrix} 0 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \ddots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

再由幂等性

$$A^2 = A \implies B^2 = B, D^2 = D \implies B(I_r - B) = \mathbf{0}, D(I_{n-r} - D) = \mathbf{0}.$$

由于 B 和 $I_{n-r} - D$ 可逆, 立即有 $B = I_r, D = \mathbf{0}$. □

例 3.4.10 (p82 例2.6.7 [陈发来-欧阳毅]). 设 $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$. 证明: $A^2 = A \iff r(A) + r(I_n - A) = n$.

证明1. 设 $A = P \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} Q$, 其中 P, Q 可逆. 记 $QP = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix}$. 则

$$A = P \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} QPP^{-1} = P \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} P^{-1},$$

$$A^2 = P \begin{pmatrix} R_{11}^2 & R_{11}R_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} P^{-1}, \quad I_n - A = P \begin{pmatrix} I_r - R_{11} & -R_{12} \\ \mathbf{0} & I_{n-r} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

首先, 若 $A^2 = A$, 则 $R_{11}(R_{11}, R_{12}) = (R_{11}, R_{12})$, 所以 $r = r(R_{11}, R_{12}) \leq r(R_{11}) \leq r$. 这说明 $r(R_{11}) = r$ 即 R_{11} 可逆. 再由 $R_{11}^2 = R_{11}$ 有 $R_{11} = I_r$. 因此 $r(I_n - A) = n - r$.

另一方面, 由于 $r(I_n - A) \geq r(I_{n-r}) + r(I_r - R_{11})$, 若 $r(I_n - A) = n - r$, 则 $R_{11} = I_r$ 且 $A^2 = A$. □

证明2. 考虑 $2n$ 阶方阵如下广义初等变换

$$\begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_n - A \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} A & A \\ \mathbf{0} & I_n - A \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} A & I_n \\ \mathbf{0} & I_n - A \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} A & I_n \\ A^2 - A & \mathbf{0} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} I_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A^2 - A \end{pmatrix}.$$

立即有题目结论. □

更一般地, 我们有

例 3.4.11 (p130 例7 [炯书]). 设 n 阶方阵 $A_1, A_2, \dots, A_k$ 满足

$$A_1 + A_2 + \dots + A_k = I_n.$$

证明, 方阵 $A_1, A_2, \dots, A_k$ 为幂等的充分必要条件是,

$$\text{rank } A_1 + \text{rank } A_2 + \dots + \text{rank } A_k = n.$$

证明. 必要性: 设方阵 $A_1, A_2, \dots, A_k$ 幂等, 则由例 (3.4.10), $\text{rank } A_i = \text{tr } A_i$. 故

$$\text{rank } A_1 + \text{rank } A_2 + \dots + \text{rank } A_k = \text{tr } A_1 + \text{tr } A_2 + \dots + \text{tr } A_k = n.$$

充分性: 当 $k = 2$ 时, 由例 (3.4.10) 立即可得结论.

现在转到一般的 k . 记 $B_i = A_1 + \dots + A_{i-1} + A_{i+1} + \dots + A_k$, 则对于 $1 \leq i \leq k$,

$$A_i + B_i = I_n.$$

因为

$$\text{rank } B_i \leq \text{rank } A_1 + \dots + \text{rank } A_{i-1} + \text{rank } A_{i+1} + \dots + \text{rank } A_k = n - \text{rank } A_i,$$

即

$$\text{rank } A_i + \text{rank } B_i \leq n.$$

另一方面,

$$\text{rank } A_i + \text{rank } B_i \geq \text{rank}(A_i + B_i) = \text{rank } I_n = n.$$

因此, 对于 $1 \leq i \leq k$,

$$\text{rank } A_i + \text{rank } B_i = n.$$

这说明, 方阵 A_i 与 B_i 满足 $k = 2$ 时的条件, 从而方阵 A_i 是幂等的, $i = 1, 2, \dots, k$. □

例 3.4.12 (Frobenius秩不等式: p63例2.3.8 [陈发来-欧阳毅]; p129例6 [炯书]; p223例6 [李尚志]).

设 $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{F}^{n \times p}$, $C \in \mathbb{F}^{p \times q}$. 证明,

$$\text{rank } AB + \text{rank } BC - \text{rank } B \leq \text{rank } ABC, \quad (3.2)$$

其中等式成立的充分必要条件是矩阵

$$\begin{pmatrix} AB & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & BC \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} AB & \mathbf{0} \\ B & BC \end{pmatrix}$$

相抵.

证明. 首先, (3.2) 等价于

$$\text{rank } AB + \text{rank } BC \leq \text{rank } ABC + \text{rank } B. \iff \text{rank} \begin{pmatrix} AB & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & BC \end{pmatrix} \leq \text{rank} \begin{pmatrix} ABC & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B \end{pmatrix}.$$

由于

$$\begin{pmatrix} I_m & A \\ \mathbf{0} & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ABC & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_q & \mathbf{0} \\ -C & I_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -I_q \\ I_p & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AB & \mathbf{0} \\ B & BC \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

因此有

$$\operatorname{rank} \begin{pmatrix} ABC & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B \end{pmatrix} = \operatorname{rank} \begin{pmatrix} AB & \mathbf{0} \\ B & BC \end{pmatrix}.$$

立即可得

$$\operatorname{rank} \begin{pmatrix} AB & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & BC \end{pmatrix} \leq \operatorname{rank} \begin{pmatrix} AB & \mathbf{0} \\ B & BC \end{pmatrix} = \operatorname{rank} \begin{pmatrix} ABC & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B \end{pmatrix}.$$

容易看出, 等式成立的充分必要条件是上式等号成立, 即相抵. $\square$

特别, 当 B 取为 n 阶单位方阵时, Frobenius 秩不等式即为

$$\operatorname{rank} A + \operatorname{rank} C - n \leq \operatorname{rank} AC.$$

更进一步有

$$\operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B - n \leq \operatorname{rank} AB \leq \min\{\operatorname{rank} A, \operatorname{rank} B\},$$

其中 $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{F}^{n \times p}$. 这就是 **Sylvester 秩不等式**.

例 3.4.13 (Roth 1952: p82 例2.6.9 [陈发来-欧阳毅]; p132 例8 [炯书]). 证明:

$$r \begin{pmatrix} A & B \\ \mathbf{0} & D \end{pmatrix} = r(A) + r(D) \iff \text{存在 } X, Y \text{ 使得 } B = AX + YD.$$

证明. 先证充分性. 若存在 X, Y 使得 $B = AX + YD$, 则

$$\begin{pmatrix} A & B \\ \mathbf{0} & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & Y \\ \mathbf{0} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & X \\ \mathbf{0} & I \end{pmatrix}.$$

比较两边的秩即得 $r \begin{pmatrix} A & B \\ \mathbf{0} & D \end{pmatrix} = r(A) + r(D)$.

再证必要性. 设 $A = P_1 \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} Q_1$, $D = P_2 \begin{pmatrix} I_s & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} Q_2$. 则

$$\begin{pmatrix} P_1^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Q_1^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ \mathbf{0} & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_2^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & P_2^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} & B_1 & B_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & B_3 & B_4 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & I_s & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

由于右边矩阵的秩是 $r + s \geq r(I_r) + r(I_s) + r(B_4)$, 故 $B_4 = \mathbf{0}$. 因此

$$B = P_1 \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & \mathbf{0} \end{pmatrix} Q_2 = A Q_1^{-1} \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} Q_2 + P_1 \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ B_3 & \mathbf{0} \end{pmatrix} P_2^{-1} D. \quad \square$$

例 3.4.14 (p127 例4 [炯书]). 证明, 秩为 r 的 n 阶实对称方阵 S (即适合 $S^T = S$) 至少有一个 r 阶主子式不为零, 而且所有非零的 r 阶主子式都同号.

证明. 因为 $\text{rank } S = r$, 所以存在 n 阶可逆方阵 P 与 Q , 使得

$$S = P \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} Q.$$

由 $S^T = S$ 得到

$$Q^T \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} P^T = P \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} Q \iff P^{-1}Q^T \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} (P^{-1}Q^T)^T.$$

记

$$P^{-1}Q^T = R = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix},$$

其中 R_{11} 是 r 阶方阵, 代入上式得到 $R_{11}^T = R_{11}$, $R_{21} = \mathbf{0}$. 于是

$$P^{-1}Q^T = \begin{pmatrix} R_{11} & \mathbf{0} \\ R_{12}^T & R_{22} \end{pmatrix} \iff Q^T = P \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ \mathbf{0} & R_{22} \end{pmatrix} \iff Q = \begin{pmatrix} R_{11} & \mathbf{0} \\ R_{12}^T & R_{22}^T \end{pmatrix} P^T.$$

因此,

$$S = P \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{11} & \mathbf{0} \\ R_{12}^T & R_{22}^T \end{pmatrix} P^T = P \begin{pmatrix} R_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} P^T.$$

由于方阵 P 可逆, 所以,

$$\text{rank } S = \text{rank} \begin{pmatrix} R_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \text{rank } R_{11} = r.$$

由于 R_{11} 是 r 阶的, 因此 R_{11} 是可逆对称方阵.

现在设 $S \begin{pmatrix} i_1, i_2, \dots, i_r \\ i_1, i_2, \dots, i_r \end{pmatrix}$ 是方阵 S 的任意 r 阶主子式, $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n$. 由 Binet-Cauchy 公式,

$$S \begin{pmatrix} i_1, i_2, \dots, i_r \\ i_1, i_2, \dots, i_r \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} i_1, i_2, \dots, i_r \\ 1, 2, \dots, r \end{pmatrix}^2 \det R_{11}. \quad (3.4)$$

由此可以看出, 如果方阵 S 的所有 r 阶主子式都为零, 则

$$P \begin{pmatrix} i_1, i_2, \dots, i_r \\ 1, 2, \dots, r \end{pmatrix} = 0.$$

于是对行列式 $\det P$ 的前 r 列作 Laplace 展开, 得到

$$\det P = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n} P \begin{pmatrix} i_1, i_2, \dots, i_r \\ 1, 2, \dots, r \end{pmatrix} (-1)^* P \begin{pmatrix} i_{r+1}, i_{r+2}, \dots, i_n \\ r+1, r+2, \dots, n \end{pmatrix} = 0,$$

这和方阵 P 可逆矛盾. 因此, 方阵 S 至少有一个 r 阶主子式不为零.

另外, 由式 (3.4) 可以看出, 方阵 S 的任意 r 阶非零主子式都和行列式 $\det R_{11}$ 同号. 因此, 对称方阵 S 的所有 r 阶非零主子式都同号. $\square$

§3.4.4 线性方程组

定理 3.4.1 (齐次方程组解的结构定理). 设 $\text{rank } A = r$, 则当 $r = n$ 时, 齐次线性方程组 $Ax = \mathbf{0}$ 只有零解. 当 $r < n$ 时, 齐次方程组 $Ax = \mathbf{0}$ 有非零解, 而且通解依赖于 $n - r$ 个独立参数.

具体地说, 设

$$A = P \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} Q,$$

其中 P 和 Q 分别是 m 阶和 n 阶可逆方阵, 并且是取定的. 则齐次方程组 $Ax = \mathbf{0}$ 的通解为

$$x = t_{r+1}Q^{-1}\varepsilon_{r+1} + \cdots + t_nQ^{-1}\varepsilon_n,$$

其中 $t_{r+1}, \dots, t_n$ 是任意的数, ε_i 是 n 维列向量, 并且对于 $i = r+1, \dots, n$,

$$\varepsilon_i = (0, \dots, 0, \underset{i}{1}, 0, \dots, 0)^T.$$

定理 3.4.2 (非齐次方程组的相容性定理). 给定线性方程组 $Ax = \beta$. 则方程组有解的充分必要条件是它的系数矩阵 A 和增广矩阵 (A, β) 的秩相等.

证明. 设 $\text{rank } A = r$, 则存在 m 阶和 n 阶可逆方阵 P 和 Q , 使得

$$A = P \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} Q.$$

必要性: 设方程组有解 x_0 . 则

$$Ax_0 = P \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} Qx_0 = \beta \implies \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} Qx_0 = P^{-1}\beta.$$

记 $Qx_0 = (y_1, y_2)^T$, $P^{-1}\beta = (z_1, z_2)^T$, 其中 y_1 和 z_1 都是 r 维行向量. 由上式得到,

$$(y_1, \mathbf{0})^T = (z_1, z_2)^T.$$

因此, $y_1 = z_1$, $z_2 = \mathbf{0}$. 所以,

$$\begin{aligned} \text{rank}(A, \beta) &= \text{rank } P \left(\begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} Q, P^{-1}\beta \right) = \text{rank } P \left(\begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} Q, \begin{pmatrix} z_1^T \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \right) \\ &= \text{rank } P \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} & z_1^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} = r = \text{rank } A. \end{aligned}$$

充分性: 设 $\text{rank}(A, \beta) = \text{rank } A$. 由于

$$\begin{aligned} (A, \beta) &= \left(P \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} Q, \beta \right) = P \left(\begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} Q, P^{-1}\beta \right) \\ &= P \left(\begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, P^{-1}\beta \right) \begin{pmatrix} Q & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} & z_1^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & z_2^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

其中 $P^{-1}\beta = (z_1, z_2)^T$, z_1 为 r 维行向量, 所以,

$$\text{rank}(A, \beta) = \text{rank} \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} & z_1^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & z_2^T \end{pmatrix} = \text{rank } A = r \implies z_2 = \mathbf{0}.$$

取

$$x_0 = Q^{-1} \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}_{n \times m} P^{-1}\beta = Q^{-1} \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1^T \\ z_2^T \end{pmatrix},$$

则

$$Ax_0 = P \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} Q \cdot Q^{-1} \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1^T \\ z_2^T \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1^T \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} z_1^T \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = P(P^{-1}\beta) = \beta.$$

所以 x_0 是方程组 $Ax = \beta$ 的解. □

定理 3.4.3 (非齐次方程组解的结构定理). 设线性方程组 $Ax = \beta$ 有解, 并且 $\text{rank } A = r$. 当 $r = n$ 时, 方程组的解是唯一的; 当 $r < n$ 时, 方程组 $Ax = \beta$ 的通解依赖于 $n - r$ 个独立参数, 并且它的通解由方程组的一个特解 (即一个确定的解) 和相应的齐次方程组 $Ax = \mathbf{0}$ 的通解构成.

具体地说, 设系数矩阵

$$A = P \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} Q,$$

其中 P 和 Q 分别是 m 阶和 n 阶可逆方阵, 并且是取定的, 则方程组 $Ax = \beta$ 的通解为

$$x = Q^{-1} \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}_{n \times m} P^{-1}\beta + t_{r+1}Q^{-1}\varepsilon_{r+1} + \cdots + t_nQ^{-1}\varepsilon_n,$$

其中 $t_{r+1}, \dots, t_n$ 和 $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ 的意义同上述定理.

§3.5 矩阵的广义逆

给定 $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$, 未知矩阵 $X = (x_{ij}) \in \mathbb{F}^{n \times m}$.

定理 3.5.1. 矩阵方程 $AXA = A$ 恒有解. 具体地说, 设 $\text{rank } A = r$, 而且

$$A = P \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}_{m \times n} Q,$$

其中 P 和 Q 分别是取定的 m 阶和 n 阶可逆矩阵. 则矩阵方程 $AXA = A$ 的通解为

$$X = Q^{-1} \begin{pmatrix} I_r & B \\ C & D \end{pmatrix}_{n \times m} P^{-1}, \quad (3.5)$$

其中 $B \in \mathbb{F}^{r \times (m-r)}$, $C \in \mathbb{F}^{(n-r) \times r}$ 和 $D \in \mathbb{F}^{(n-r) \times (m-r)}$ 是任意的.

证明. 直接验证上述矩阵是矩阵方程 $AXA = A$ 的解. 反之, 设矩阵 X 是矩阵方程的解, 则有

$$P \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} QXP \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} Q = P \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} Q \iff \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} QXP \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

记

$$QXP = \begin{pmatrix} E & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

其中 E, B, C, D 分别是 $r \times r, r \times (m-r), (n-r) \times r$ 和 $(n-r) \times (m-r)$ 矩阵. 因此,

$$\begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

所以, $E = I_r$. 于是,

$$QXP = \begin{pmatrix} I_r & B \\ C & D \end{pmatrix} \iff X = Q^{-1} \begin{pmatrix} I_r & B \\ C & D \end{pmatrix} P^{-1}. \quad \square$$

当 A 为可逆方阵时, 矩阵方程 $AXA = A$ 的解显然为 $X = A^{-1}$. 于是引出如下的定义.

定义 3.5.1. 矩阵方程 $AXA = A$ 的解 X 称为矩阵 A 的**广义逆**, 记为 A^- .

注. 由定理, 任意矩阵 A 的广义逆 A^- 总存在. 而且一般地说, 矩阵 A 的广义逆 A^- 并不唯一. 事实上, 由于

$$A^- = Q^{-1} \begin{pmatrix} I_r & B \\ C & D \end{pmatrix} P^{-1},$$

其中矩阵 B, C 和 D 是任意的, 所以, $\text{rank } A^- \geq \text{rank } A$. 而且对任意正整数 $k, r \leq k \leq \min\{m, n\}$, 总可以分别取 B 和 C 为 $r \times (m-r)$ 和 $(n-r) \times r$ 零矩阵, 并取 D 为秩等于 $k-r$ 的 $(n-r) \times (m-r)$ 矩阵, 则矩阵 A 的这个广义逆 A^- 的秩 $\text{rank } A^- = k$.

另外, 由定理可知, 矩阵 A 具有唯一的广义逆 A^- 的充分必要条件是, 矩阵 A 为可逆方阵.

例 3.5.1 (非齐次线性方程组的**相容性定理**). 证明方程组 $Ax = \beta$ 有解的充分必要条件是 $\beta = AA^- \beta$, 其中 $A \in \mathbb{F}^{m \times n}, \beta \in \mathbb{F}^{m \times 1}$ 已知, $x \in \mathbb{F}^{n \times 1}$ 为未知向量, 而 A^- 是矩阵 A 的广义逆.

证明. 设方程 $Ax = \beta$ 有解 x_0 , 则 $\beta = Ax_0$. 因此,

$$AA^- \beta = AA^-(Ax_0) = (AA^-A)x_0 = Ax_0 = \beta.$$

反之, 设 $\beta = AA^- \beta$ 成立. 取 $x_0 = A^- \beta$. 于是 $Ax_0 = AA^- \beta = \beta$. □

例 3.5.2 (非齐次线性方程组解的**结构定理**). 设方程 $Ax = \beta$ 有解. 则它的通解为

$$x = A^- \beta + (I_n - A^- A)z,$$

其中 A^- 是矩阵 A 的某个取定的广义逆, 而 z 是任意 $n \times 1$ 矩阵.

证明. 因为方程 $Ax = \beta$ 有解, 因此由上述例题, 对于矩阵 A 的取定的广义逆 A^- , $AA^- \beta = \beta$. 取 $x = A^- \beta + (I_n - A^- A)z$, 则

$$Ax = AA^- \beta + A(I_n - A^- A)z = \beta + (A - AA^- A)z = \beta.$$

即 $x = A^- \beta + (I_n - A^- A)z$ 是方程 $Ax = \beta$ 的解.

反之, 设 x_0 是方程 $Ax = \beta$ 的解, 即 $Ax_0 = \beta$. 取 $z = x_0$, 则

$$A^- \beta + (I_n - A^- A)x_0 = A^- Ax_0 + x_0 - A^- Ax_0 = x_0,$$

即 x_0 可表为所说的形式. □

例 3.5.3 (齐次线性方程组解的结构定理). 方程 $Ax = \mathbf{0}$ 恒有解, 而且它的通解为

$$x = (I_n - A^-A)z,$$

其中 A^- 是矩阵 A 的某个取定的广义逆, 而 z 是任意的 $n \times 1$ 矩阵.

对非齐次线性方程组 $Ax = \beta$, $\beta \neq \mathbf{0}$, 还可以用广义逆给出另一种形式的通解.

例 3.5.4. 设方程 $Ax = \beta$ 有解, 其中 $\beta \neq \mathbf{0}$. 则它的通解为 $x = A^-\beta$, 这里 A^- 是矩阵 A 的任意一个广义逆.

证明. 因为方程 $Ax = \beta$ 有解, 因此可设它的一个解为 x_0 . 取 $x = A^-\beta$, 则

$$Ax = AA^-\beta = AA^-(Ax_0) = (AA^-A)x_0 = Ax_0 = \beta.$$

因此, 对矩阵 A 的任意一个广义逆 A^- , $x = A^-\beta$ 都是方程 $Ax = \beta$ 的解.

反之, 设 x_0 是方程 $Ax = \beta$ 的解, 下面将证明, 存在矩阵 A 的一个广义逆 A^- , 使得 $x_0 = A^-\beta$. 事实上, 设 $\text{rank } A = r$, 且

$$A = P \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}_{m \times n} Q.$$

由定理 3.5.1,

$$A^- = Q^{-1} \begin{pmatrix} I_r & B \\ C & D \end{pmatrix}_{n \times m} P^{-1}.$$

于是, 由 $Ax_0 = \beta$ 得到,

$$\begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}_{m \times n} Qx_0 = P^{-1}\beta.$$

记

$$Qx_0 = y = (y_1, y_2)^T, \quad P^{-1}\beta = z = (z_1, z_2)^T,$$

其中 y_1 和 z_1 是 $r \times 1$ 矩阵. 由上式得到, $y_1 = z_1$, $z_2 = \mathbf{0}$. 由于方阵 P 可逆, $\beta \neq \mathbf{0}$, 因此 $z = P^{-1}\beta \neq \mathbf{0}$, 所以, z_1 至少有一个元素不为零. 记 $z_1 = (c_1, c_2, \dots, c_r)$, 且设 $c_i \neq 0$. 在

$$A^- = Q^{-1} \begin{pmatrix} I_r & B \\ C & D \end{pmatrix} P^{-1}$$

中, 取矩阵 B 和 D 分别是 $r \times (m-r)$ 和 $(n-r) \times (m-r)$ 零矩阵, 取 $(n-r) \times r$ 矩阵 C 的第 i 列为 $c_i^{-1}y_2^T$, 其它列为零. 所得到的广义逆仍记为 A^- . 于是

$$A^-\beta = Q^{-1} \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ C & \mathbf{0} \end{pmatrix}_{n \times m} P^{-1}\beta = Q^{-1} \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ C & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1^T \\ z_2^T \end{pmatrix} = Q^{-1}(y_1, y_2)^T = Q^{-1}Qx_0 = x_0,$$

这就证明, 方程 $Ax = \beta$ 的通解为 $x = A^-\beta$. □

这几个例子表明, 利用矩阵的广义逆来讨论线性方程组的解是非常方便的, 而且通解的形式特别简洁. 特别, 例 3.5.4 表明, 当 $\beta \neq \mathbf{0}$ 时, 方程 $Ax = \beta$ 的通解为 $x = A^- \beta$. 这和方程 $Ax = \beta$ 的系数矩阵是可逆方阵的情形相类似, 因为这时方程 $Ax = \beta$ 的解为 $x = A^{-1}\beta$.

矩阵的广义逆不只是上面所说的一种类型. 还有许多其它类型的广义逆. 除上面的 A^- 外, 矩阵的 Moore-Penrose 广义逆也是经常遇到的.

考虑矩阵方程组

$$(P) \quad \begin{cases} AXA = A, & (P_1) \\ XAX = X, & (P_2) \\ (AX)^T = AX, & (P_3) \\ (XA)^T = XA, & (P_4) \end{cases}$$

其中 $m \times n$ 矩阵 A 是给定的, 而 $n \times m$ 矩阵 X 是未知的. 方程组 (P) 称为 **Penrose 方程组**.

定理 3.5.2. 对任意给定的矩阵 $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$, Penrose 方程组 (P) 总有解, 且唯一. 具体地说, 设矩阵 $A = BC$, 其中 B 和 C 分别是列满秩和行满秩矩阵, 则 Penrose 方程组 (P) 的唯一解为

$$X = C^T(CC^T)^{-1}(B^TB)^{-1}B^T. \quad (3.6)$$

证明. 把式 (3.6) 代入 Penrose 方程组 (P) 的每个方程, 容易看出, 每个方程都成为等式, 即矩阵 X 的确是 Penrose 方程组 (P) 的解.

设矩阵 X_1 和 X_2 都是 Penrose 方程组 (P) 的解. 那么,

$$\begin{aligned} X_1 &= X_1AX_1 && \text{由方程 } (P_2) \\ &= X_1AX_2AX_1 && \text{由方程 } (P_1) \\ &= X_1(AX_2)^T(AX_1)^T = X_1(AX_1AX_2)^T && \text{由方程 } (P_3) \\ &= X_1(AX_2)^T && \text{由方程 } (P_1) \\ &= X_1AX_2 && \text{由方程 } (P_3) \\ &= X_1AX_2AX_2 && \text{由方程 } (P_1) \\ &= (X_1A)^T(X_2A)^TX_2 = (X_2AX_1A)^TX_2 && \text{由方程 } (P_4) \\ &= (X_2A)^TX_2 && \text{由方程 } (P_1) \\ &= X_2AX_2 && \text{由方程 } (P_4) \\ &= X_2. && \text{由方程 } (P_1) \end{aligned}$$

这就证明了 Penrose 方程组 (P) 的解的唯一性. □

有必要说明的是式 (3.6) 的由来. 事实上, 设 $\text{rank } A = r$, 则存在 m 阶和 n 阶可逆方阵 P 和 Q , 使得

$$A = P \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}_{m \times n} Q = P \begin{pmatrix} I_r \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}_{m \times r} \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \end{pmatrix}_{r \times n} Q = BC,$$

其中

$$B = P \begin{pmatrix} I_r \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}_{m \times r}, \quad C = \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \end{pmatrix}_{r \times n} Q$$

分别是列满秩和行满秩矩阵. 由定理 3.5.1, 方程 (P_1) 的解为

$$X = Q^{-1} \begin{pmatrix} I_r & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}_{n \times m} P^{-1},$$

其中 X_{12} , X_{21} 和 X_{22} 分别是 $r \times (m-r)$, $(n-r) \times r$ 和 $(n-r) \times (m-r)$ 矩阵.

把矩阵 X 代入方程 (P_2) , 得到,

$$\begin{aligned} Q^{-1} \begin{pmatrix} I_r & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} P^{-1} P \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} Q Q^{-1} \begin{pmatrix} I_r & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} P^{-1} &= Q^{-1} \begin{pmatrix} I_r & X_{12} \\ X_{21} & X_{21} X_{12} \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= Q^{-1} \begin{pmatrix} I_r & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} P^{-1}. \end{aligned}$$

由此得到, $X_{22} = X_{21} X_{12}$. 因此,

$$X = Q^{-1} \begin{pmatrix} I_r & X_{12} \\ X_{21} & X_{21} X_{12} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

把矩阵 A 和 X 分别代入方程 (P_3) 和 (P_4) , 得到,

$$\begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ X_{12}^T & \mathbf{0} \end{pmatrix} P^T P = P^T P \begin{pmatrix} I_r & X_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ X_{21} & \mathbf{0} \end{pmatrix} Q Q^T = Q Q^T \begin{pmatrix} I_r & X_{12}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

记

$$P^T P = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{12}^T & R_{22} \end{pmatrix}_{m \times m}, \quad Q Q^T = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12}^T & S_{22} \end{pmatrix}_{n \times n},$$

其中 R_{11} 和 S_{11} 都是 r 阶方阵. 由于矩阵 R_{11} 是矩阵 P^T 的前 r 行和矩阵 P 的前 r 列的乘积, 因此,

$$R_{11} = \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \end{pmatrix}_{r \times m} P^T P \begin{pmatrix} I_r \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}_{m \times r} = B^T B.$$

另一方面, 由 Binet-Cauchy 公式,

$$\begin{aligned} \det R_{11} &= P^T P \begin{pmatrix} 1, 2, \dots, r \\ 1, 2, \dots, r \end{pmatrix} = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq m} P^T \begin{pmatrix} 1, 2, \dots, r \\ i_1, i_2, \dots, i_r \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} i_1, i_2, \dots, i_r \\ 1, 2, \dots, r \end{pmatrix} \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq m} \left| P \begin{pmatrix} i_1, i_2, \dots, i_r \\ 1, 2, \dots, r \end{pmatrix} \right|^2. \end{aligned}$$

如果 $\det R_{11} = 0$, 则由上式, 方阵 P 的前 r 列上的每个 r 阶子式都为零. 因此, 对行列式 $\det P$ 的前 r 列作 Laplace 展开, 可以看出, $\det P = 0$, 和方阵 P 可逆矛盾. 所以, 方阵 R_{11} 可逆. 同理可证, 方阵 S_{11} 可逆, 并且 $S_{11} = C C^T$.

把分块方阵 $P^T P$ 和 $Q Q^T$ 分别代入式 (3.7), 得到,

$$X_{12} = R_{11}^{-1} R_{12}, \quad X_{21} = S_{12}^T S_{11}^{-1}.$$

因此

$$\begin{aligned}
 X &= Q^{-1} \begin{pmatrix} I_r & R_{11}^{-1} R_{12} \\ S_{12}^T S_{11}^{-1} & S_{12}^T S_{11}^{-1} R_{11}^{-1} R_{12} \end{pmatrix} P^{-1} = Q^{-1} \begin{pmatrix} I_r \\ S_{12}^T S_{11}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & R_{11}^{-1} R_{12} \end{pmatrix} P^{-1} \\
 &= Q^{-1} \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12}^T & S_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_{11}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{11}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{12}^T & R_{22} \end{pmatrix} P^{-1} \\
 &= Q^{-1} (Q Q^T) \begin{pmatrix} I_r \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} S_{11}^{-1} R_{11}^{-1} \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \end{pmatrix} (P^T P) P^{-1} \\
 &= \left(Q^T \begin{pmatrix} I_r \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \right) S_{11}^{-1} R_{11}^{-1} \left(\begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \end{pmatrix} P^T \right) = C^T (C C^T)^{-1} (B^T B)^{-1} B^T.
 \end{aligned}$$

这表明, 如果矩阵 X 是 Penrose 方程组 (P) 的解, 则矩阵 X 应具有形式 (3.6).

基于定理 3.5.2, 可以引进如下定义.

定义 3.5.2. 对于给定的 $m \times n$ 矩阵 A , Penrose 方程组 (P) 的解 X 称为矩阵 A 的 **Moore-Penrose 广义逆**, 记为 A^+ .

显然当 A 为 n 阶可逆方阵时, Penrose 方程组 (P) 的解为 A^{-1} , 故此时 $A^+ = A^{-1}$. 定理 3.5.2 表明, 对任意给定的 $m \times n$ 矩阵 A , 它的 Moore-Penrose 广义逆 A^+ 总是存在的. 甚至对 $m \times n$ 零矩阵 $\mathbf{0}$, 它的 Moore-Penrose 广义逆 $\mathbf{0}^+$ 也存在, 并且 $\mathbf{0}^+ = \mathbf{0}$, 这里 $\mathbf{0}$ 是 $n \times m$ 零矩阵. 特别, 一阶零矩阵即是数 0, 所以, 数 0 的 Moore-Penrose 广义逆为数 0.

Moore-Penrose 广义逆和逆矩阵的有些性质是相同的, 例如,

$$(A^+)^+ = A, \quad (A^T)^+ = (A^+)^T, \quad (\lambda A)^+ = \lambda^+ A^+.$$

但是, 也有一些性质不同, 例如, 对逆矩阵成立的**穿脱原理**对 Moore-Penrose 广义逆**并不成立**.

广义逆的概念早在 1920 年即已出现. 1935 年, E. H. Moore 作了系统的研究. 但是, 由于当时应用不广, 故有湮没的危险. 直到 1955 年, R. Penrose (罗杰·彭罗斯, 诺贝尔物理学奖 2020) 又重新研究了广义逆. 由于近年来广义逆的应用日趋广泛, 特别是在数理统计和计算数学等的应用, 它才引起普遍重视. 有兴趣的读者可以参阅有关专著 (例如, I. Ben 的名著 **Generalized Inverses**).

Chapter 4

线性空间

§4.1 线性空间: 线性代数(B1)回顾

参考课程PPT.

§4.2 同构

例 4.2.1. 设 V 为数域 $\mathbb{F}$ 上 n 维线性空间, $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ 为一组基. 对任意

$$\alpha = \sum_{i=1}^n x_i \alpha_i \in V,$$

定义

$$\varphi : V \rightarrow \mathbb{F}^n, \quad \alpha \mapsto (x_1, \dots, x_n).$$

则易知

(1). $\forall \alpha, \beta \in V, \varphi(\alpha + \beta) = \varphi(\alpha) + \varphi(\beta).$

(2). $\varphi(\lambda \alpha) = \lambda \varphi(\alpha), \forall \lambda \in \mathbb{F}, \alpha \in V.$

(3). φ 既单又满, 即

- $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta) \iff \alpha = \beta.$
- $\forall x = (x_1, \dots, x_n), \exists \alpha = \sum x_i \alpha_i, \varphi(\alpha) = x.$

若定义

$$\psi : \mathbb{F}^n \rightarrow V, \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^n x_i \alpha_i,$$

则

$$\varphi \circ \psi = \text{id}_{\mathbb{F}^n}, \quad \psi \circ \varphi = \text{id}_V.$$

例 4.2.2. 更一般, 设 V 线性空间, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 为 V 中向量. 定义

$$\psi : \mathbb{F}^n \rightarrow V, \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^n x_i \alpha_i \in V.$$

则

$$\psi(\lambda \alpha + \mu \beta) = \lambda \psi(\alpha) + \mu \psi(\beta), \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{F}, \alpha, \beta \in \mathbb{F}^n.$$

定义 4.2.1 (同态与同构). (1). 设 V 与 W 是数域 $\mathbb{F}$ 上的两个线性空间. 若从 V 到 W 的映射 φ , 使得对任意 $\alpha, \beta \in V, \lambda \in \mathbb{F}$, 满足

$$\varphi(\alpha + \beta) = \varphi(\alpha) + \varphi(\beta), \quad \varphi(\lambda\alpha) = \lambda\varphi(\alpha),$$

则称 φ 为线性空间 V 到 W 的**线性映射(同态)**.

(2). 设 V 与 W 是数域 $\mathbb{F}$ 上的两个线性空间. 如果存在 V 到 W 的既单又满的线性映射(可逆) φ , 则称线性空间 V 与 W **同构**, 而映射 φ 称为 V 到 W 上的一个**同构映射**.

满足上述定义中条件 $\varphi(\alpha + \beta) = \varphi(\alpha) + \varphi(\beta)$ 的映射 φ 称为保加法的; 满足条件 $\varphi(\lambda\alpha) = \lambda\varphi(\alpha)$ 的映射称为保乘法的. 因此同构映射 φ 是线性空间 V 到 W 上的保加法与保乘法的一一映射(即双射).

由同构映射的定义, 易知线性空间 V 到 W 上的同构映射 φ 具有下列性质.

命题 4.2.1. 设 $\varphi: V \rightarrow W$ 是线性空间同构, 则

- (1). $\varphi(\alpha) = 0 \iff \alpha = 0$.
- (2). $\varphi(\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \cdots + \lambda_k\alpha_k) = \lambda_1\varphi(\alpha_1) + \lambda_2\varphi(\alpha_2) + \cdots + \lambda_k\varphi(\alpha_k)$.
- (3). 向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in V$ 线性相(无)关 $\iff \varphi(\alpha_1), \varphi(\alpha_2), \dots, \varphi(\alpha_k) \in W$ 线性相(无)关.
- (4). 若 V 与 W 都是有限维线性空间, 则

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \text{ 是 } V \text{ 的基} \iff \{\varphi(\alpha_1), \varphi(\alpha_2), \dots, \varphi(\alpha_n)\} \text{ 是 } W \text{ 的基},$$

从而 $\dim V = \dim W$.

注. 如果线性空间的映射 φ 满足: 对任意 $\alpha, \beta \in V, \lambda, \mu \in \mathbb{F}$,

$$\varphi(\lambda\alpha + \mu\beta) = \lambda\varphi(\alpha) + \mu\varphi(\beta),$$

则映射 φ 称为**保线性关系的**.

命题 4.2.2. 数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间之间的同构关系满足**自反性、对称性和传递性**, 也就是同构关系是数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间之间的一种**等价关系**.

由于按照同构关系可以对线性空间进行分类: 彼此同构的线性空间归在同一个类, 彼此不同构的线性空间归在不同的类. 和矩阵在相抵关系下分类相类似, 基本的问题是: 如何判定数域 $\mathbb{F}$ 上的两个线性空间 V 和 W 是否属于同一个类, 即如何判定线性空间 V 和 W 是否同构? 在线性空间的同构类中怎样选取代表元?

对此, 有

定理 4.2.1. 数域 $\mathbb{F}$ 上的任意一个 n 维线性空间 V 都同构于数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 维向量空间 $\mathbb{F}^n$.

定理 4.2.2. 数域 $\mathbb{F}$ 上的有限维线性空间 V 与 W 同构当且仅当 $\dim V = \dim W$.

定理 4.2.2 给出了数域 $\mathbb{F}$ 上的有限维线性空间 V 和 W 属于同一个同构类的判别准则. 定理 4.2.1 表明, 在数域 $\mathbb{F}$ 上的所有 n 维线性空间构成的同构类中, 可以取 n 维向量空间 $\mathbb{F}^n$ 作为它的代表元. 尽管数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 维线性空间比较抽象, 但从结构上看, 可以用数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 维向量空间来理解.

§4.3 子空间

定义 4.3.1 (子空间). 设 W 是数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间 V 的非空向量集合. 如果 W 对于线性空间 V 的向量加法和纯量与向量的乘法是封闭的, 即对任意 $\alpha, \beta \in W, \lambda \in \mathbb{F}$, 有

$$\alpha + \beta \in W, \quad \lambda\alpha \in W,$$

则 W 称为线性空间 V 的子空间.

例 4.3.1. $\mathbb{F}_n[x]$ 为所有次数小于 n 的 $\mathbb{F}$ 上多项式集合, 则 $\mathbb{F}_n$ 为 $\mathbb{F}[x]$ 的子空间, 且

$$\{1, x, \dots, x^{n-1}\}$$

为一组基, 且 $\dim \mathbb{F}_n = n$.

例 4.3.2. 记 $m \leq n-1$, 取定 $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{F}$ 互不相同, 记

$$W = \{f(x) \in \mathbb{F}_n \mid f(x_1) = \dots = f(x_m) = 0\}.$$

则 W 为 $\mathbb{F}_n$ 的子空间, 求 $\dim W$.

例 4.3.3. 令

$$W = \{f(x) \in \mathbb{F}[x] \mid f(x) = f(-x)\},$$

则 $W \subseteq \mathbb{F}[x]$.

例 4.3.4. $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$, 令

$$V_A = \{x \in \mathbb{F}^n \mid Ax = 0\} \subseteq \mathbb{F}^n,$$

则

$$\dim V_A = n - \text{rank}(A).$$

定义 4.3.2. 设 $V_\lambda \subset V$ 为 V 的一族子空间, 则 $\bigcap_{\lambda \in I} V_\lambda$ 称为 V_λ 的交.

定理 4.3.1. $\bigcap_{\lambda \in I} V_\lambda$ 为 V 的子空间.

证明. 非空 + 封闭. □

定义 4.3.3. 设 V_1, V_2 为 V 的子空间, 定义

$$V_1 + V_2 = \{\alpha_1 + \alpha_2 \mid \alpha_i \in V_i\}$$

为 V_1 与 V_2 的和.

定理 4.3.2. $V_1 + V_2$ 为 V 的子空间.

注. (1). $V_1 + V_2$ 为包含 $V_1 \cup V_2$ 的最小子空间.

(2). $V_1 + \dots + V_k \triangleq \{\alpha_1 + \dots + \alpha_k \mid \alpha_i \in V_i\}.$

定理 4.3.3 (维数公式). 设 $V_1, V_2 \leq V$, 则

$$\dim V_1 + \dim V_2 = \dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2).$$

证明. $V_1 \cap V_2 \subset V_1 \subset V_1 + V_2$. □

推论 4.3.1.

$$\dim(V_1 + V_2) \leq \dim V_1 + \dim V_2.$$

并且, 当 V_1 和 V_2 都是有限维线性空间时, 等号成立当且仅当

$$V_1 \cap V_2 = \{0\}.$$

推论 4.3.2.

$$\dim(V_1 \cap V_2) \geq \dim V_1 + \dim V_2 - \dim V.$$

推论 4.3.3.

$$\dim V_1 + \dim V_2 > \dim V,$$

则

$$V_1 \cap V_2 \neq \{0\}.$$

例 4.3.5. $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{F}^{n \times p}$, 证明

$$\text{rank } A + \text{rank } B - n \leq \text{rank}(AB).$$

证明. 令

$$V_A = \{x \in \mathbb{F}^n \mid Ax = 0\}, \quad V_B = \{y \in \mathbb{F}^p \mid By = 0\}, \quad V_{AB} = \{z \in \mathbb{F}^p \mid ABz = 0\}.$$

则 $V_B \subseteq V_{AB}$.

定义

$$V_0 = \{x \in \mathbb{F}^n \mid \exists y \in V_{AB}, x = By\} \subseteq V_A.$$

于是

$$\dim V_0 \leq \dim V_A = n - \text{rank}(A).$$

Claim:

$$\dim V_0 = \dim V_{AB} - \dim V_B = (p - \text{rank}(AB)) - (p - \text{rank}(B)) = \text{rank}(B) - \text{rank}(AB).$$

取 V_B 的一组基 $\{y_1, \dots, y_s\}$, 并扩充为 V_{AB} 的一组基 $\{y_1, \dots, y_s, y_{s+1}, \dots, y_t\}$. 则

$$V_0 = \langle By_1, \dots, By_s, By_{s+1}, \dots, By_t \rangle = \langle By_{s+1}, \dots, By_t \rangle.$$

可证 $By_{s+1}, \dots, By_t$ 线性无关. 若 $\sum_{i=s+1}^t \lambda_i By_i = 0$, 则

$$B \left(\sum_{i=s+1}^t \lambda_i y_i \right) = 0,$$

即有

$$\sum_{i=s+1}^t \lambda_i y_i \in V_B \implies \sum_{i=s+1}^t \lambda_i y_i = \sum_{j=1}^s \mu_j y_j,$$

由基的线性无关性得 $\lambda_i = \mu_j = 0$. 因此

$$\dim V_0 = t - s = \dim V_{AB} - \dim V_B.$$

从而

$$\operatorname{rank}(B) - \operatorname{rank}(AB) \leq n - \operatorname{rank}(A),$$

即

$$\operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B - n \leq \operatorname{rank}(AB).$$

□

例 4.3.6. 设 $|\mathbb{F}| = +\infty$, $V_1, \dots, V_k$ 为 V 的真子空间, 则

$$V_1 \cup \dots \cup V_k \neq V.$$

证明. 对 k 归纳. $k=1$ 显然. 设命题对 k 成立.

(反证法). 设存在 V 的真子空间 $V_1, \dots, V_k, V_{k+1}$, 使得

$$V_1 \cup \dots \cup V_k \cup V_{k+1} = V.$$

若

$$V_{k+1} \subseteq V_1 \cup \dots \cup V_k,$$

由归纳假设矛盾. 从而存在

$$\beta \in V_{k+1}, \quad \beta \notin V_1 \cup \dots \cup V_k.$$

由于 $V_{k+1} \subsetneq V$, 故存在

$$v \in V \setminus V_{k+1}.$$

取 $\lambda_1, \dots, \lambda_{k+2} \in \mathbb{F}$ 互不相同, 令

$$\alpha_i = \beta + \lambda_i v \in V.$$

则存在 $i \neq j$, $1 \leq t \leq k+1$, 使得 α_i, α_j 落在同一个子空间 V_t 中.

若 $\alpha_i, \alpha_j \in V_{k+1}$, 则

$$v = \frac{\alpha_i - \alpha_j}{\lambda_j - \lambda_i} \in V_{k+1},$$

矛盾.

若 $\alpha_i, \alpha_j \in V_t$, $1 \leq t \leq k$, 则

$$\beta = \frac{\alpha_j \lambda_i - \alpha_i \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j} \in V_t,$$

矛盾. 故

$$V_1 \cup \dots \cup V_k \neq V.$$

□

§4.4 直和

定义 4.4.1. 设 V_1, V_2 为线性空间 V 的子空间. 若 $V_1 \cap V_2 = 0$, 则和 $V_1 + V_2$ 称为 V_1 与 V_2 的直和, 记为

$$V_1 \oplus V_2.$$

定理 4.4.1. 下列命题等价 (TFAE):

- (1). 和 $V_1 + V_2$ 为直和;
- (2). $V_1 + V_2$ 中每个向量都可唯一表示为 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_i \in V_i$;
- (3). $V_1 + V_2$ 中零向量可唯一表示为 $0 = 0_1 + 0_2, 0_i \in V_i$;
- (4). $\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$.

证明. 证明思路:

$$(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (1).$$

□

定理 4.4.2. 设 $V_1 \leq V$, 且 $\dim V < +\infty$, 则存在子空间 V_2 , 使 $V = V_1 \oplus V_2$.

注. 如果 V_1 和 V_2 是线性空间 V 的子空间, 并且 $V = V_1 \oplus V_2$, 则 V_2 称为 V_1 的补. 定理说明: 对线性空间 V 的每一个子空间 V_1 , 它的补是存在的, 并且补的维数为 $\dim V - \dim V_1$. 特别地, 补空间不一定唯一.

定义 4.4.2. 设 $V_1, \dots, V_k \leq V$. 如果 $V_1 + \dots + V_k$ 中每个向量都可唯一表示为

$$\alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_k, \quad \alpha_i \in V_i,$$

则和 $V_1 + \dots + V_k$ 称为子空间 $V_1, \dots, V_k$ 的直和, 记为 $V_1 \oplus \dots \oplus V_k$.

定理 4.4.3. 下列命题等价:

- (1). 和 $V_1 + \dots + V_k$ 为直和;
- (2). $V_1 + \dots + V_k$ 中零向量表示唯一;
- (3). $V_j \cap (V_1 + \dots + V_{j-1} + V_{j+1} + \dots + V_k) = 0$;
- (4). $(V_1 + \dots + V_{j-1}) \cap V_j = 0$.
- (5). $\dim(V_1 + \dots + V_k) = \dim V_1 + \dots + \dim V_k$;

证明. 证明思路:

$$(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (1), \quad (4) \Rightarrow (5) \Rightarrow (4).$$

□

定义 4.4.3. 设 W_1, W_2 为 $\mathbb{F}$ 上线性空间, 定义集合 (笛卡尔积或直积)

$$W = W_1 \times W_2 = \{(\alpha_1, \alpha_2) \mid \alpha_i \in W_i\}.$$

在 W 上定义

$$(\alpha_1, \alpha_2) + (\beta_1, \beta_2) \triangleq (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2), \quad \lambda(\alpha_1, \alpha_2) \triangleq (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2).$$

则 W 成为 $\mathbb{F}$ 上线性空间.

注. (1). 取

$$\widetilde{W}_1 = \{(\alpha, 0) \mid \alpha \in W_1\}, \quad \widetilde{W}_2 = \{(0, \alpha) \mid \alpha \in W_2\}.$$

则 $\widetilde{W}_1, \widetilde{W}_2$ 为 $W = W_1 \times W_2$ 的子空间, 且满足 $\widetilde{W}_1 \cap \widetilde{W}_2 = \{(0, 0)\}$. 又

$$(\alpha_1, \alpha_2) = (\alpha_1, 0) + (0, \alpha_2) \in \widetilde{W}_1 + \widetilde{W}_2,$$

故

$$W = \widetilde{W}_1 \oplus \widetilde{W}_2.$$

(2). 若定义

$$\varphi_1 : W_1 \rightarrow W, \quad \alpha \mapsto (\alpha, 0),$$

则 φ_1 为同构, 从而 $W_1 \cong \widetilde{W}_1$. 同理有 $W_2 \cong \widetilde{W}_2$. 因此在同构意义下, 直积 $W_1 \times W_2$ 就是直和 $W_1 \oplus W_2$.

§4.5 商空间

定义 4.5.1. 设 W 为 V 的子空间. 对 $\alpha, \beta \in V$, 若 $\alpha - \beta \in W$, 则称 α 与 β 模 W 同余, 记

$$\alpha \equiv \beta \pmod{W}.$$

注. (1). V 中向量模 W 同余关系为 V 上的等价关系.

(2). 对 $\alpha \in V$, 记 $\bar{\alpha}$ 为 α 所在模 W 同余等价类, 即

$$\bar{\alpha} = \alpha + W = \{\alpha + \gamma \mid \gamma \in W\}.$$

则有

$$\bar{\alpha} = \bar{\beta} \iff \alpha \equiv \beta \pmod{W}, \quad \bar{\alpha} \cap \bar{\beta} \neq \emptyset \iff \bar{\alpha} = \bar{\beta}.$$

定义 4.5.2. 记 V/W 为所有模 W 同余类的集合, 则 V/W 非空. 在其上定义

$$\bar{\alpha} + \bar{\beta} = \overline{\alpha + \beta}, \quad \lambda \bar{\alpha} = \overline{\lambda \alpha}.$$

注. 上述运算与代表元选取无关.

证明. 若 $\alpha_1 \equiv \alpha_2, \beta_1 \equiv \beta_2$, 则由定义有 $\alpha_1 - \alpha_2 \in W, \beta_1 - \beta_2 \in W$, 从而

$$(\alpha_1 + \beta_1) - (\alpha_2 + \beta_2) \in W \implies \overline{\alpha_1 + \beta_1} = \overline{\alpha_2 + \beta_2}.$$

又

$$\lambda \alpha_1 - \lambda \alpha_2 = \lambda(\alpha_1 - \alpha_2) \in W \implies \overline{\lambda \alpha_1} = \overline{\lambda \alpha_2}. \quad \square$$

定义 4.5.3. V/W 在加法与数乘下成为 $\mathbb{F}$ 上线性空间, 称为 V 关于子空间 W 的商空间.

定理 4.5.1. 若 $W < V$ 为子空间, 取定 W 的补空间 W' , 使 $W \oplus W' = V$. 定义自然映射

$$\varphi : W' \rightarrow V/W, \quad \alpha \mapsto \bar{\alpha}.$$

则 φ 为同构, 即 $W' \cong V/W$.

证明. 首先有

$$\varphi(\alpha + \beta) = \overline{\alpha + \beta} = \bar{\alpha} + \bar{\beta} = \varphi(\alpha) + \varphi(\beta), \quad \varphi(\lambda\alpha) = \overline{\lambda\alpha} = \lambda\bar{\alpha} = \lambda\varphi(\alpha).$$

另外, 若 $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$, 则

$$\bar{\alpha} = \bar{\beta} \iff \beta - \alpha \in W.$$

又 $\alpha, \beta \in W'$, 故 $\beta - \alpha \in W'$, 于是

$$\beta - \alpha \in W \cap W' = \{0\},$$

即 $\alpha = \beta$. 故 φ 为单射.

对任意 $\bar{\alpha} \in V/W$, 由 $V = W \oplus W'$ 存在 $\beta \in W, \gamma \in W'$, 使 $\alpha = \beta + \gamma$. 于是

$$\gamma - \alpha = -\beta \in W,$$

故

$$\varphi(\gamma) = \bar{\gamma} = \bar{\alpha}.$$

所以 φ 为满射. 因此 φ 为同构. □

推论 4.5.1. 设 W 是线性空间 V 的子空间, 则 V 关于 W 的商空间 V/W 的维数为

$$\dim(V/W) = \dim V - \dim W.$$

§4.6 一些例子

例 4.6.1. 设 $A \in \mathbb{F}^{m \times n}, B \in \mathbb{F}^{n \times p}, C \in \mathbb{F}^{p \times q}$, 证明: 若 $\text{rank}(AB) = \text{rank}(B)$, 则

$$\text{rank}(ABC) = \text{rank}(BC).$$

证明1. 由 $V_B \subseteq V_{AB}, V_{BC} \subseteq V_{ABC}$, 且

$$\dim V_B = p - \text{rank}(B), \quad \dim V_{AB} = p - \text{rank}(AB),$$

$$\dim V_{BC} = q - \text{rank}(BC), \quad \dim V_{ABC} = q - \text{rank}(ABC).$$

若 $\text{rank}(AB) = \text{rank}(B)$, 则 $V_B = V_{AB}$. 对任意 $y \in V_{ABC}$, 有

$$ABCy = 0 \iff AB(Cy) = 0.$$

因此

$$Cy \in V_{AB} = V_B \implies BCy = 0 \iff y \in V_{BC}.$$

故

$$V_{ABC} \subseteq V_{BC} \subseteq V_{ABC},$$

所以

$$V_{ABC} = V_{BC},$$

从而

$$\text{rank}(ABC) = \text{rank}(BC). \quad \square$$

证明2. 直接应用 Frobenius 秩不等式即可. $\square$

例 4.6.2. 设 $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$, 则

$$\text{rank}(A^n) = \text{rank}(A^{n+1}).$$

证明. 由上例, 若 $\text{rank}(A^k) = \text{rank}(A^{k+1})$, 则 $\text{rank}(A^k) = \text{rank}(A^{k+1}) = \dots$. 设 k 为使

$$\text{rank}(A^k) = \text{rank}(A^{k+1})$$

成立的最小非负整数, 则 $k \leq n$. 否则有

$$n = \text{rank}(I) > \text{rank}(A) > \dots > \text{rank}(A^n) > \text{rank}(A^{n+1}) \geq 0,$$

从 0 到 n 有 $n+2$ 个不同的整数, 矛盾. $\square$

例 4.6.3. 设 $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in V$ 线性无关, 令

$$\beta_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \alpha_j, \quad A = (a_{ij}) \in \mathbb{F}^{m \times n}.$$

证明:

$$\dim \text{span}_{\mathbb{F}}\{\beta_1, \dots, \beta_m\} = \text{rank}(A).$$

证明. 由条件有

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

由于 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 线性无关, 定义同构

$$\varphi: \text{span}\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \rightarrow \mathbb{F}^n, \quad \alpha = \sum_{i=1}^n x_i \alpha_i \mapsto (x_1, \dots, x_n).$$

于是

$$\dim \text{span}_{\mathbb{F}}\{\beta_1, \dots, \beta_m\} = \dim \text{span}_{\mathbb{F}}\{\varphi(\beta_1), \dots, \varphi(\beta_m)\}.$$

而 $\varphi(\beta_i)$ 正是 A 的第 i 行, 因此维数为 A 的行秩, 故

$$\dim \text{span}_{\mathbb{F}}\{\beta_1, \dots, \beta_m\} = \text{rank}(A). \quad \square$$

例 4.6.4. 设 $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$. 证明:

$$\mathbb{R}^n = \text{span}_{\mathbb{R}}\{\alpha_1^T, \dots, \alpha_m^T\} \oplus V_A.$$

证明. 设

$$\beta^T \in \text{span}_{\mathbb{R}}\{\alpha_1^T, \dots, \alpha_m^T\} \cap V_A,$$

则

$$\beta = \sum_{i=1}^m \lambda_i \alpha_i = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)A.$$

再由 $\beta^T \in V_A$, 有 $A\beta^T = 0$, 即

$$AA^T \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} = 0.$$

于是

$$\beta\beta^T = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)AA^T \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} = 0,$$

故 $\beta = 0$. 因此

$$\text{span}_{\mathbb{R}}\{\alpha_1^T, \dots, \alpha_m^T\} \cap V_A = \{0\}.$$

又

$$\dim V_A = n - \text{rank}(A), \quad \dim \text{span}_{\mathbb{R}}\{\alpha_1^T, \dots, \alpha_m^T\} = \text{rank}(A),$$

所以

$$\dim(\text{span}_{\mathbb{R}}\{\alpha_1^T, \dots, \alpha_m^T\} + V_A) = n,$$

从而

$$\mathbb{R}^n = \text{span}_{\mathbb{R}}\{\alpha_1^T, \dots, \alpha_m^T\} \oplus V_A. \quad \square$$

例 4.6.5. 求 Fibonacci 数列通项公式: $F_1 = F_2 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

解1. 令

$$V = \{(a_1, a_2, \dots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid a_{i+2} = a_{i+1} + a_i\}.$$

则 V 为 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 的子空间. 取

$$\alpha = (1, 0, F_1, F_2, \dots), \quad \beta = (0, 1, F_2, F_3, \dots),$$

则 $\alpha, \beta \in V$, 且 $\dim V = 2$. 若

$$\gamma = (1, q, q^2, \dots) \in V,$$

则 $q^{i+2} = q^{i+1} + q^i$, 即 $q^2 = q + 1$, 解得

$$q_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad q_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

于是

$$\alpha_1 = (1, q_1, q_1^2, \dots), \quad \alpha_2 = (1, q_2, q_2^2, \dots)$$

为 V 的一组基.

由于

$$f = (F_1, F_2, \dots) \in V,$$

可设

$$f = x\alpha_1 + y\alpha_2.$$

比较前两项:

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ xq_1 + yq_2 = 1. \end{cases}$$

解得

$$x = \frac{q_2 - 1}{q_2 - q_1} = -\frac{q_1}{q_2 - q_1}, \quad y = \frac{1 - q_1}{q_2 - q_1} = \frac{q_2}{q_2 - q_1}.$$

因此

$$F_n = xq_1^{n-1} + yq_2^{n-1} = \frac{q_2q_1^{n-1} - q_1q_2^{n-1}}{q_2 - q_1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right]. \quad \square$$

解2. 令

$$\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n-1} \\ F_{n-2} \end{pmatrix} = A^{n-1} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix} = A^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

其中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

特征多项式

$$\det(\lambda I_2 - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 1,$$

特征值为:

$$\lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \quad (\lambda_1\lambda_2 = -1, \lambda_1 + \lambda_2 = 1).$$

于是

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

计算得

$$\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \lambda_1^{n-1} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{n-1} \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

取

$$P = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_2 \\ -\lambda_2 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{2}{5 - \sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ \lambda_2 & 1 \end{pmatrix}$$

可得

$$F_n = \frac{2(\lambda_1^{n-1} + \lambda_2^{n+1})}{5 - \sqrt{5}} = \frac{1}{-\sqrt{5}\lambda_2} (-\lambda_1^n \lambda_2 + \lambda_2^{n+1}) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right]. \quad \square$$

解3. 由 $x^2 - x - 1 = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)$, 且 $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, 有

$$F_n - \lambda_1 F_{n-1} = \lambda_2 (F_{n-1} - \lambda_1 F_{n-2}),$$

从而

$$F_n - \lambda_1 F_{n-1} = \lambda_2^{n-1} (F_1 - \lambda_1 F_0) = \lambda_2^{n-1}.$$

同理

$$F_n - \lambda_2 F_{n-1} = \lambda_1^{n-1}.$$

两式相减得

$$(\lambda_1 - \lambda_2) F_{n-1} = \lambda_1^{n-1} - \lambda_2^{n-1},$$

于是

$$F_n = \frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right]. \quad \square$$

Chapter 5

线性变换

§5.1 线性变换: 线性代数(B1)回顾

参考课程PPT.

§5.2 多项式简介

§5.2.1 多项式基本概念

定义 5.2.1. 设 $\mathbb{F}$ 是域. 系数在 $\mathbb{F}$ 上以 x 为未定元的一元多项式 (polynomial) 即

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_ix^i + \cdots, \quad (a_i \in \mathbb{F} \text{ 且只有有限多个非零}).$$

a_i 称为 $f(x)$ 的系数. 两个多项式相等是指它们对应项的系数都相等. 习惯上在记录一个多项式时, 常常将一些系数等于0的项略去, 故多项式总可以写为有限和, 即

$$f(x) = \sum_{i=0}^n a_ix^i = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n.$$

若 $f(x)$ 系数 a_i 全为 0, 即 $f(x) = 0$, 则称零多项式. 若 $f(x)$ 不是零多项式, 则总可以写为

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n, \quad a_n \neq 0.$$

此时

- (1). n 称为 $f(x)$ 的次数, 记为 $\deg f(x)$. 习惯上大家约定零多项式的次数为 $-\infty$.
- (2). a_n 称为 $f(x)$ 的首项系数, 记为 $\text{LC}(f(x))$; a_nx^n 称为 $f(x)$ 的首项, 记为 $\text{LT}(f(x))$.
- (3). a_0 称为 $f(x)$ 的常数项.

首项系数为 1 的多项式称为首一多项式. 除去常数项外其他系数均为 0 的多项式称为常多项式. 根据这个定义, 多项式的次数等于 0 当且仅当它是非零常多项式.

注. 记域 $\mathbb{F}$ 上所有一元多项式构成的集合为 $\mathbb{F}[x]$. 我们可以将 $\mathbb{F}$ 视为 $\mathbb{F}[x]$ 的子集, 每个 $c \in \mathbb{F}$ 对应于常多项式 $f(x) = c$. 设多项式

$$f(x) = \sum_{i=0}^m a_ix^i, \quad g(x) = \sum_{i=0}^n b_ix^i \in \mathbb{F}[x],$$

如下定义它们的加法与乘法

$$f(x) + g(x) = \sum_{i=0}^{\max\{m,n\}} (a_i + b_i)x^i, \quad f(x) \cdot g(x) = \sum_{k=0}^{m+n} \left(\sum_{i=0}^k a_i b_{k-i} \right) x^k.$$

我们有如下非常简单而又十分重要的性质:

命题 5.2.1. 设 $f(x), g(x) \in \mathbb{F}[x]$, 则

- (1). $\deg(f(x) + g(x)) \leq \max(\deg f(x), \deg g(x))$, 即 $f(x) + g(x)$ 的次数不大于 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的次数的最大值.
- (2). $\deg(f(x) \cdot g(x)) = \deg f(x) + \deg g(x)$, 此处我们设 $-\infty + n = -\infty$.

由命题立知: 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 均是非零多项式, 则 $f(x)g(x)$ 也是非零多项式. 故

推论 5.2.1. $\mathbb{F}[x]$ 满足消去律.

推论 5.2.2. 域上多项式 $f(x)$ 乘法可逆当且仅当它是非零常多项式.

证明. 若 $f(x)g(x) = 1$, 由命题得 $\deg(f) + \deg(g) = 0$, 故 $\deg(f) = \deg(g) = 0$. 反之显然. $\square$

§5.2.2 最大公因式

定义 5.2.2 (整除). 设 $f(x), g(x) \in \mathbb{F}[x]$, $g(x) \neq 0$. 若存在 $q(x) \in \mathbb{F}[x]$, 使得

$$f(x) = g(x)q(x),$$

则称 $g(x)$ 整除 $f(x)$, 记作

$$g(x) \mid f(x).$$

也称 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的因子或因式, $f(x)$ 是 $g(x)$ 的倍式.

命题 5.2.2 (整除的基本性质). (1). 若 $g(x) \mid f(x)$, 且 $f(x) \neq 0$, 则 $\deg g(x) \leq \deg f(x)$.

- (2). 若 $f(x) \mid g(x)$ 且 $g(x) \mid f(x)$, 则存在非零常数 $\lambda \in \mathbb{F}$, 使得

$$f(x) = \lambda g(x).$$

- (3). 若 $g(x) \mid f_1(x)$, $g(x) \mid f_2(x)$, 则对任意 $a(x), b(x) \in \mathbb{F}[x]$, 有

$$g(x) \mid a(x)f_1(x) + b(x)f_2(x).$$

定理 5.2.1 (带余除法). 设 $f(x), g(x) \in \mathbb{F}[x]$, 且 $g(x) \neq 0$. 则存在唯一 $q(x), r(x) \in \mathbb{F}[x]$, 使得

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x),$$

其中

$$\deg r(x) < \deg g(x).$$

称 $q(x)$ 为商, $r(x)$ 为余式.

证明. 存在性: 若 $\deg f(x) < \deg g(x)$, 取 $q(x) = 0$, $r(x) = f(x)$ 即可.

若 $\deg f(x) \geq \deg g(x)$, 设

$$f(x) = a_m x^m + \cdots, \quad g(x) = b_n x^n + \cdots,$$

其中 $a_m \neq 0$, $b_n \neq 0$, $m \geq n$. 令

$$q_1(x) = \frac{a_m}{b_n} x^{m-n}, \quad f_1(x) = f(x) - q_1(x)g(x),$$

则 $f_1(x)$ 的次数小于 m . 对 $f_1(x)$ 重复上述操作, 次数不断降低, 最终得到

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x),$$

且 $\deg r(x) < \deg g(x)$.

唯一性: 若

$$f(x) = q_1(x)g(x) + r_1(x) = q_2(x)g(x) + r_2(x),$$

则

$$(q_1(x) - q_2(x))g(x) = r_2(x) - r_1(x).$$

若 $q_1(x) \neq q_2(x)$, 则左边次数至少为 $\deg g(x)$, 而右边次数小于 $\deg g(x)$, 矛盾. 故 $q_1(x) = q_2(x)$, 从而 $r_1(x) = r_2(x)$. $\square$

推论 5.2.3 (余数定理). 设 $f(x) \in \mathbb{F}[x]$, $a \in \mathbb{F}$. 则

$$f(x) = (x - a)q(x) + f(a).$$

特别地,

$$f(a) = 0 \iff (x - a) \mid f(x).$$

证明. 用 $x - a$ 作带余除法:

$$f(x) = (x - a)q(x) + r(x),$$

其中 $\deg r(x) < 1$, 所以 $r(x)$ 是常数, 设为 r . 代入 $x = a$, 得

$$f(a) = r.$$

因此

$$f(x) = (x - a)q(x) + f(a).$$

若 $f(a) = 0$, 则 $f(x) = (x - a)q(x)$, 即 $(x - a) \mid f(x)$. 反之若 $(x - a) \mid f(x)$, 则 $f(a) = 0$. $\square$

定义 5.2.3 (最大公因式). 设 $f(x), g(x) \in \mathbb{F}[x]$, 且不全为零. 若首一多项式 $d(x) \in \mathbb{F}[x]$ 满足:

(1). $d(x) \mid f(x)$ 且 $d(x) \mid g(x)$;

(2). 若 $h(x) \mid f(x)$ 且 $h(x) \mid g(x)$, 则 $\deg h(x) \leq \deg d(x)$;

则称 $d(x)$ 为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的**最大公因式** (或**最大公因子**). 记最大公因子 $d(x) = \gcd(f(x), g(x))$ 或 $d(x) = (f(x), g(x))$. 如果 $(f(x), g(x)) = 1$, 称 $f(x)$ 与 $g(x)$ **互素**.

定理 5.2.2 (最大公因式的存在唯一性). 设 $f(x), g(x) \in \mathbb{F}[x]$, 且不全为零. 则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式存在唯一.

证明要点. 考虑集合

$$I = \{a(x)f(x) + b(x)g(x) \mid a(x), b(x) \in \mathbb{F}[x]\}.$$

取 I 中次数最低的非零首一多项式 $d(x)$. 可证明 $d(x) \mid f(x)$, $d(x) \mid g(x)$, 且任何公因式都整除 $d(x)$. 唯一性由整除性质可得. $\square$

注. 由上述定理证明可知

$$I = \{a(x)f(x) + b(x)g(x) \mid a(x), b(x) \in \mathbb{F}[x]\} = \{a(x)d(x) \mid a(x) \in \mathbb{F}[x]\} \triangleq d(x)\mathbb{F}[x].$$

定理 5.2.3 (裴蜀等式). 设 $d(x) = (f(x), g(x))$. 则存在 $a(x), b(x) \in \mathbb{F}[x]$, 使得

$$d(x) = a(x)f(x) + b(x)g(x).$$

特别地, 若 $h(x) \mid f(x)$ 且 $h(x) \mid g(x)$, 则 $h(x) \mid d(x)$.

推论 5.2.4 (互素的判定). 设 $f(x), g(x) \in \mathbb{F}[x]$. 则

$$(f(x), g(x)) = 1$$

当且仅当存在 $u(x), v(x) \in \mathbb{F}[x]$, 使得

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1.$$

命题 5.2.3. 若 $(f(x), g(x)) = 1$, $(f(x), h(x)) = 1$, 则

$$(f(x), g(x)h(x)) = 1.$$

证明. 由 $(f(x), g(x)) = 1$, 存在 $u(x), v(x)$ 使得

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1.$$

由 $(f(x), h(x)) = 1$, 存在 $s(x), t(x)$ 使得

$$s(x)f(x) + t(x)h(x) = 1.$$

于是

$$\begin{aligned} 1 &= (u(x)f(x) + v(x)g(x))(s(x)f(x) + t(x)h(x)) \\ &= u(x)s(x)f(x)^2 + u(x)t(x)f(x)h(x) + v(x)g(x)s(x)f(x) + v(x)g(x)t(x)h(x) \\ &= (u(x)s(x)f(x) + u(x)t(x)h(x) + v(x)g(x)s(x)))f(x) + (v(x)t(x))g(x)h(x). \end{aligned}$$

因此 $(f(x), g(x)h(x)) = 1$. $\square$

命题 5.2.4. 若 $(g(x), h(x)) = 1$, 且 $h(x) \mid f(x)g(x)$, 则

$$h(x) \mid f(x).$$

证明. 由 $(g(x), h(x)) = 1$, 存在 $u(x), v(x)$ 使得

$$u(x)g(x) + v(x)h(x) = 1.$$

两边乘以 $f(x)$:

$$u(x)f(x)g(x) + v(x)f(x)h(x) = f(x).$$

因为 $h(x) \mid f(x)g(x)$, 所以 $h(x) \mid u(x)f(x)g(x)$; 又 $h(x) \mid v(x)f(x)h(x)$, 故 $h(x) \mid f(x)$. $\square$

命题 5.2.5. 若 $f(x) \mid h(x)$, $g(x) \mid h(x)$, 且 $(f(x), g(x)) = 1$, 则

$$f(x)g(x) \mid h(x).$$

证明. 由 $f(x) \mid h(x)$, 设 $h(x) = f(x)h_1(x)$. 由 $g(x) \mid h(x) = f(x)h_1(x)$, 且 $(f(x), g(x)) = 1$, 由命题 5.2.4 得 $g(x) \mid h_1(x)$. 设 $h_1(x) = g(x)h_2(x)$, 则

$$h(x) = f(x)g(x)h_2(x),$$

故 $f(x)g(x) \mid h(x)$. $\square$

命题 5.2.6 (多个多项式的最大公因式). 设 $f_1(x), \dots, f_k(x)$ 是 $\mathbb{F}[x]$ 中不全为零的多项式. 我们递归定义它们的最大公因子

$$(f_1(x), \dots, f_k(x)) \triangleq ((f_1(x), \dots, f_{k-1}(x)), f_k(x)).$$

则存在多项式 $u_i(x)$ ($1 \leq i \leq k$), 使得

$$u_1(x)f_1(x) + \dots + u_k(x)f_k(x) = (f_1(x), \dots, f_k(x)).$$

另一方面, 若存在多项式 $u_1(x), \dots, u_k(x)$, 使得 $u_1f_1 + \dots + u_kf_k = 1$, 则 $(f_1, \dots, f_k) = 1$.

引理 5.2.1. 若多项式 $f(x), g(x), q(x), r(x) \in \mathbb{F}[x]$, $g(x) \neq 0$, 满足 $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$, 则

$$(f(x), g(x)) = (g(x), r(x)).$$

算法 5.2.4 (欧几里得算法). 给定不全为零的 $f(x), g(x) \in \mathbb{F}[x]$, 如下算法给出 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因子 $(f(x), g(x))$, 以及多项式 $u(x)$ 和 $v(x)$, 使得 $u(x)f(x) + v(x)g(x) = (f, g)$:

(1). 若 $g(x) = 0$, 则 $(f(x), g(x)) = \frac{f(x)}{\text{LC}(f)}$. 此时令 $u(x) = \text{LC}(f)^{-1}$ 而 $v(x) = 0$ 即可.

(2). 否则, 先令 $r_{-1}(x) = f(x)$, $r_0(x) = g(x)$, 然后用带余除法依次计算相继的商和余式:

$$r_{i-2}(x) = q_i(x)r_{i-1}(x) + r_i(x), \deg r_i(x) < \deg r_{i-1}(x) \quad (i = 1, 2, 3, \dots)$$

直到某余式 $r_n(x) = 0$, 则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因数 $(f(x), g(x))$ 即 $\frac{r_{n-1}(x)}{\text{LC}(r_{n-1})}$.

(3). 现在考虑等式 $r_{n-1}(x) = r_{n-3}(x) - q_{n-1}(x)r_{n-2}(x)$. 将 $k = n - 2$ 递降至 $k = 1$, 依次代入

$$r_k(x) = r_{k-2}(x) - q_k(x)r_{k-1}(x),$$

这样就得到 $r_{n-1}(x) = \alpha(x)f(x) + \beta(x)g(x)$. 乘以非零常数 $\text{LC}(r_{n-1})^{-1}$, 就得到 $u(x)$ 和 $v(x)$, 使得 $u(x)f(x) + v(x)g(x) = (f, g)$.

注. 上述算法成功的关键是由于在算法第二步中, 只要 $r_i(x) \neq 0$, 不等式 $\deg r_{i+1}(x) < \deg r_i(x)$ 总成立, 因此最多需要 $\deg g(x) + 1$ 步就一定得到 $r_n(x) = 0$.

§5.2.3 不可约多项式与唯一分解

定义 5.2.4 (不可约多项式). 设 $f(x) \in \mathbb{F}[x]$, $\deg f(x) = n \geq 1$. 如果存在次数小于 n 的多项式 $g(x), h(x) \in \mathbb{F}[x]$, 使得 $f(x) = g(x)h(x)$, 则 $f(x)$ 称为在 $\mathbb{F}$ 上可约; 否则称 $f(x)$ 在 $\mathbb{F}$ 上不可约.

注. 若 $p(x)$ 不可约, $d(x) \mid p(x)$, 则 $d(x) \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ 或存在 $\lambda \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ 使得 $d(x) = \lambda p(x)$.

例 5.2.1. (1). 一次多项式 $ax + b$, $a \neq 0$ 在 $\mathbb{F}$ 上不可约.

(2). $x^2 + 1$ 在 $\mathbb{R}$ 上不可约, 但在 $\mathbb{C}$ 上可约: $x^2 + 1 = (x + i)(x - i)$.

(3). $x^2 - 2$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约, 但在 $\mathbb{R}$ 上可约.

命题 5.2.7. 若 $p(x)$ 不可约, $a \neq 0$, 则 $ap(x)$ 也不可约.

命题 5.2.8. 设 $p(x)$ 不可约, $f(x) \in \mathbb{F}[x]$. 则 $(p(x), f(x)) = 1$ 或 $p(x) \mid f(x)$.

命题 5.2.9. 若 $p(x)$ 不可约, 且 $p(x) \mid f(x)g(x)$, 则 $p(x) \mid f(x)$ 或 $p(x) \mid g(x)$.

定理 5.2.5 (唯一因式分解定理). 设 $f(x) \in \mathbb{F}[x]$, $\deg f \geq 1$. 则 $f(x)$ 可分解:

$$f(x) = cp_1(x)p_2(x) \cdots p_r(x),$$

其中 c 是 $f(x)$ 首项系数, $p_1(x), \dots, p_r(x)$ 是首一不可约的, 且分解式不计因子次序唯一.

证明思路. 对 $\deg f(x)$ 作归纳. 若 $f(x)$ 不可约, 显然. 若 $f(x)$ 可约, 设 $f(x) = g(x)h(x)$, 对 $g(x), h(x)$ 用归纳假设.

唯一性利用命题: 若 $p_1(x) \mid q_1(x) \cdots q_s(x)$, 则 $p_1(x)$ 必整除某个 $q_j(x)$, 再比较. □

注. 将分解中的不可约因子 $p_1(x), \dots, p_r(x)$ 中相同的因子合并起来, 就得到一般多项式的标准分解式

$$f(x) = cp_1^{v_{p_1}(f)} \cdots p_s^{v_{p_s}(f)},$$

其中 $p_1(x), \dots, p_s(x)$ 是两两不同的首一不可约多项式, $v_{p_1}(f), \dots, v_{p_s}(f)$ 是由 f 确定的正整数.

为叙述方便, 我们经常在分解式中添加 p^0 项. 我们有以下推论.

推论 5.2.5. 设非零多项式 $f(x) = c_1 p_1^{\alpha_1} \cdots p_s^{\alpha_s}$, $g(x) = c_2 p_1^{\beta_1} \cdots p_s^{\beta_s}$, 其中 p_i 为两两不同的首一不可约多项式, $\alpha_1, \dots, \alpha_s, \beta_1, \dots, \beta_s \geq 0$. 则

(1). $f(x)$ 是 $g(x)$ 的因子当且仅当 $\alpha_i \leq \beta_i$ 对所有 $1 \leq i \leq s$ 成立.

(2). 记 $\gamma_i = \min(\alpha_i, \beta_i)$, 则 $(f, g) = p_1^{\gamma_1} \cdots p_s^{\gamma_s}$.

§5.2.4 多项式的同余理论

多项式同余理论和整数同余理论是完全平行的理论. 我们取定 $m(x)$ 为域 $\mathbb{F}$ 上的非常值多项式, 即 $\deg m \geq 1$.

定义 5.2.5. 多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 模 $m(x)$ 同余是指 $m(x) \mid (f(x) - g(x))$, 也就是说, $f(x)$ 与 $g(x)$ 被 $m(x)$ 除有相同的余式, 用同余式

$$f(x) \equiv g(x) \pmod{m(x)}$$

来表示.

命题 5.2.10. 模 $m(x)$ 的同余关系是 $\mathbb{F}[x]$ 上的等价关系, 且如果 $a(x) \equiv b(x) \pmod{m(x)}$, $c(x) \equiv d(x) \pmod{m(x)}$, 那么

$$(1). a(x) \pm c(x) \equiv b(x) \pm d(x) \pmod{m(x)};$$

$$(2). a(x)c(x) \equiv b(x)d(x) \pmod{m(x)}.$$

根据多项式的带余除法, 对于域上任意多项式 $f(x)$, 有唯一的次数小于 $\deg m(x)$ 的多项式 $r(x)$ 与它模 $m(x)$ 同余. 记 $[r(x)]$ 是所有与 $r(x)$ 模 $m(x)$ 同余的多项式组成的集合, 称为 $r(x)$ 的模 $m(x)$ 同余类. 这样 $\mathbb{F}[x]$ 的模 $m(x)$ 同余类集合即

$$\mathbb{F}[x]/m(x) = \mathbb{F}[x]/m(x)\mathbb{F}[x] = \{[r(x)] \mid \deg r < \deg m\}.$$

如果在同余类集合中定义加法和乘法:

$$[r_1(x)] + [r_2(x)] = [r_1(x) + r_2(x)],$$

$$[r_1(x)] \cdot [r_2(x)] = [r_1(x)r_2(x)].$$

命题说明这样的定义与 $[r(x)]$ 中代表元的选取无关, 即它是一个良定义. 由此定义, 同余类集合 $\mathbb{F}[x]/m(x)\mathbb{F}[x]$ 成为交换环, $[0]$ 是其加法单位元, $[1]$ 是乘法单位元. 我们有下述定理:

定理 5.2.6. 模 $m(x)$ 同余类集合 $\mathbb{F}[x]/m(x)\mathbb{F}[x] = \{[r(x)] \mid \deg r(x) < \deg m(x)\}$ 是交换环, 且 $[a(x)]$ 有乘法逆元当且仅当 $(a(x), m(x)) = 1$. 特别地,

(1). 如果 $m(x)$ 是不可约多项式, 那么 $\mathbb{F}[x]/m(x)\mathbb{F}[x]$ 是域, 即每个非零元均有乘法逆元;

(2). 如果 $m(x)$ 是可约多项式, 那么 $\mathbb{F}[x]/m(x)\mathbb{F}[x]$ 不是整环, 即存在两个非零元的乘积为零.

证明. 若 $[a(x)]$ 可逆, 则存在 $b(x)$ 使得 $[a(x)b(x)] = [1]$, 即 $a(x)b(x) \equiv 1 \pmod{m(x)}$, 故存在 $v(x) \in \mathbb{F}[x]$ 使得 $a(x)b(x) - 1 = m(x)v(x)$, 即 $a(x)b(x) + m(x)v(x) = 1$, 这说明 $(a, m) = 1$. 反之, 若 $(a, m) = 1$, 由Bezout等式, 设 b, v 满足 $ab + mv = 1$, 则 $[a][b] = [ab] = [1]$, 即 $[a]$ 可逆.

若 $m(x)$ 不可约, 则对于任意多项式 $r(x)$ ($0 \leq \deg r < \deg m$), 它与 $m(x)$ 互素, 因此 $[r]$ 均可逆, 故 (1) 得证. 若 $m(x)$ 可约, 令 $m(x) = a(x)b(x)$, $0 < \deg a < \deg m$. 则 $[a] \neq [0]$, $[b] \neq [0]$ 但 $[ab] = [0]$, 故 (2) 得证. $\square$

完全类似于整数同余方程组求解的中国剩余定理, 多项式同余方程组的求解也有相应的中国剩余定理:

定理 5.2.7 (中国剩余定理). 若 $n \geq 2$, 正整数 $m_1, \dots, m_n$ 两两互素, 则同余方程组

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{m_1}, \\ \dots \\ x \equiv a_n \pmod{m_n} \end{cases}$$

对任意整数 $a_1, \dots, a_n$ 必有解, 且全部解构成模 $m_1 \cdots m_n$ 的一个同余类.

定理 5.2.8 (中国剩余定理). 设 $m(x) = m_1(x)m_2(x) \cdots m_n(x)$, 其中 $m_i(x)$ 是两两互素的多项式, 则同余方程组

$$\begin{cases} f(x) \equiv a_1(x) \pmod{m_1(x)}, \\ \dots \\ f(x) \equiv a_n(x) \pmod{m_n(x)} \end{cases}$$

对任意多项式 $a_1(x), a_2(x), \dots, a_n(x)$ 必有解, 且全部解恰好构成模 $m(x)$ 的一个同余类.

证明. 设 $M_i(x) = m(x)/m_i(x) = \prod_{j \neq i} m_j(x)$. 则 $(m_i(x), M_i(x)) = 1$. 故存在 $u_i(x)$ 使得 $u_i(x)M_i(x) \equiv 1 \pmod{m_i(x)}$. 令 $b_i(x) = u_i(x)M_i(x)$, 则 $b_i(x) \equiv 1 \pmod{m_i(x)}$ 且 $b_i(x) \equiv 0 \pmod{m_j(x)} (j \neq i)$. 故 $\sum_{i=1}^n a_i(x)b_i(x)$ 是上述同余方程组的一个解.

另一方面, 若方程组有两个解 $c(x)$ 与 $d(x)$, 则对于所有的 i , $c(x) - d(x) \equiv 0 \pmod{m_i(x)}$, 即 $m_i(x) \mid (c(x) - d(x))$. 由于 $m_i(x)$ 两两互素, 故 $m(x) \mid c(x) - d(x)$, 即 $c(x)$ 与 $d(x)$ 在同一个模 $m(x)$ 的同余类中. $\square$

例 5.2.2. 求 3 次多项式 $f(x)$ 使得 $f(x) + 1$ 被 $(x-1)^2$ 整除且 $f(x) - 1$ 被 $(x+1)^2$ 整除.

解1. 问题需要求 $f(x)$ 使得

$$\begin{cases} f(x) \equiv -1 \pmod{(x-1)^2}, \\ f(x) \equiv 1 \pmod{(x+1)^2}. \end{cases}$$

根据中国剩余定理的证明, 我们就是要求 $f(x) = -\phi_1(x) + \phi_2(x)$, 其中 $\phi_1(x), \phi_2(x)$ 为满足以下两个同余方程组的多项式:

$$\begin{cases} \phi_1(x) \equiv 1 \pmod{(x-1)^2}, \\ \phi_1(x) \equiv 0 \pmod{(x+1)^2}, \end{cases} \quad \begin{cases} \phi_2(x) \equiv 0 \pmod{(x-1)^2}, \\ \phi_2(x) \equiv 1 \pmod{(x+1)^2}. \end{cases}$$

故可设 $\phi_1(x) = u(x)(x+1)^2$, $\phi_2(x) = v(x)(x-1)^2$. 问题归结为求解

$$u(x)(x+1)^2 \equiv 1 \pmod{(x-1)^2}, \quad v(x)(x-1)^2 \equiv 1 \pmod{(x+1)^2}.$$

分别使用辗转相除法可以求得:

$$u(x) \equiv \frac{1}{4}(-x+2) \pmod{(x-1)^2}, \quad v(x) \equiv \frac{1}{4}(x+2) \pmod{(x+1)^2}.$$

注意到我们需要 $\deg f = 3$, 故只能取 $u(x) = \frac{1}{4}(2-x)$, $v(x) = \frac{1}{4}(x+2)$. 于是有 $f(x) = \phi_2(x) - \phi_1(x) = v(x)(x-1)^2 - u(x)(x+1)^2 = \frac{1}{2}(x^3 - 3x)$. $\square$

解2. 由 $(x-1)^2 \mid f(x)+1$ 和 $(x+1)^2 \mid f(x)-1$, 立即有 $(x-1)(x+1) \mid f'(x)$ 并且 $f(1) = -1$, $f(-1) = 1$. 注意到 $\deg f = 3$, 故可设 $f'(x) = 3a(x^2 - 1)$, 也就是 $f(x) = ax^3 - 3ax + b$. 再由

$$-1 = f(1) = a - 3a + b, \quad 1 = f(-1) = -a + 3a + b$$

可得, $a = \frac{1}{2}, b = 0$, 也就是 $f(x) = \frac{1}{2}(x^3 - 3x)$. □

解3. 设 $f(x) = (ax+b)(x+1)^2 + 1$, 则 $f'(x) = (3ax+a+2b)(x+1)$. 由 $f(1) = -1, f'(1) = 0$ 可得, $a = \frac{1}{2}, b = -1$, 也就是 $f(x) = (\frac{1}{2}x-1)(x+1)^2 + 1 = \frac{1}{2}(x^3 - 3x)$. □

§5.2.5 多项式的根与韦达定理

定义 5.2.6. 设多项式 $f(x) \in \mathbb{F}[x]$ 非零. 若元素 $a \in \mathbb{F}$ 满足 $f(a) = 0$, 即 $(x-a) \mid f(x)$, 则称 a 为 $f(x)$ 的根或零点.

更进一步, 对整数 $r \geq 1$, 若 $(x-a)^r \parallel f(x)$, 等价地说 $(x-a)^r \mid f(x)$ 且 $(x-a)^{r+1} \nmid f(x)$ (或 $f(x) = (x-a)^r h(x)$ 且 $h(a) \neq 0$), 则称 a 是 $f(x)$ 的 r 重零点. 如 $r=1$, 称 a 为 $f(x)$ 的单根或单零点; 如 $r \geq 2$, 称 a 为 $f(x)$ 的重根.

定理 5.2.9. 数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 次多项式至多有 n 个不同的根.

证明. 设 $a_1, \dots, a_m$ 是 $f(x)$ 的互不相同根. 由余数定理 $(x-a_i) \mid f(x)$. 因为 $x-a_i$ 两两互素, 所以

$$(x-a_1) \cdots (x-a_m) \mid f(x).$$

因此 $m \leq \deg f = n$. □

注 (拉格朗日定理). 任意 n 次非零多项式 $f(x) \in \mathbb{F}[x]$ 的零点个数 (计算重数) $\leq n$.

定理 5.2.10 (代数基本定理). 复数域 $\mathbb{C}$ 上任意 n 次多项式至少有一个复根. 因此, $\mathbb{C}$ 上 n 次多项式恰有 n 个复根 (按重数计算).

定理 5.2.11. 实系数多项式 $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ 的复根共轭成对出现. 即若 $z \in \mathbb{C}$ 是 f 的根, 则 $\bar{z}$ 也是 f 的根.

证明. 设

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0, \quad a_i \in \mathbb{R}.$$

若 $f(z) = 0$, 则

$$0 = \overline{f(z)} = a_n \bar{z}^n + \cdots + a_0 = f(\bar{z}).$$

故 $\bar{z}$ 也是根. □

定理 5.2.12. 设 $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ 不可约. 则 $\deg p(x) = 1$ 或 $\deg p(x) = 2$. 且当 $\deg p = 2$ 时, $p(x)$ 的判别式小于零.

证明. 若 $\deg p \geq 3$, 由代数基本定理, p 在 $\mathbb{C}$ 中有根 z . 若 $z \in \mathbb{R}$, 则 p 有一次因式, 与不可约矛盾. 若 $z \notin \mathbb{R}$, 则 $\bar{z}$ 也是根. 于是

$$(x-z)(x-\bar{z}) = x^2 - 2\operatorname{Re}(z)x + |z|^2 \in \mathbb{R}[x]$$

是 p 的二次因式, 与 p 不可约矛盾. 因此 $\deg p \leq 2$. □

定理 5.2.13 (实系数与复系数多项式分解). $\mathbb{R}[x]$ 中任意非常数多项式都可分解为一次因式与二次不可约因式之积. $\mathbb{C}[x]$ 中任意非常数多项式都可分解为一次因式之积. 即:

$$f(x) \in \mathbb{R}[x] \implies f(x) = a \prod_{i=1}^r (x - a_i) \prod_{j=1}^s (x^2 + b_j x + c_j),$$

其中二次因式不可约, 即判别式 $b_j^2 - 4c_j < 0$.

下述关于多项式根与系数的关系的定理, 就是著名的韦达定理:

定理 5.2.14 (韦达定理). 设 $\mathbb{F}$ 为域, $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$ 是 $\mathbb{F}$ 上次数 $n > 0$ 的多项式. 若 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 是 $f(x)$ 的 n 个零点, 则

$$f(x) = a_n (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \cdots (x - \lambda_n),$$

且对于 $1 \leq k \leq n$,

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \cdots \lambda_{i_k} = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}.$$

特别地,

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}, \quad \lambda_1 \cdots \lambda_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

证明. 比较两边系数即得. □

在韦达定理中分别取 $n = 2$ 与 3 , 就回到我们熟悉的情形.

定理 5.2.15. (1). 若 $f(x) = x^2 + bx + c = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)$, 则

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -b, \quad \lambda_1 \cdot \lambda_2 = c.$$

(2). 若 $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)(x - \lambda_3)$, 则

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -b, \quad \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1 = c, \quad \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = -d.$$

例 5.2.3 (拉格朗日插值公式). 对于 $1 \leq i \leq n+1$, 设 $a_i, b_i \in \mathbb{F}$, 且 a_i 两两不同, 则存在唯一的次数不大于 n 的多项式 $f(x)$, 使得 $f(a_i) = b_i$.

证1. 先证明唯一性. 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 次数均 $\leq n$ 且对所有 $1 \leq i \leq n+1$, $f(a_i) = g(a_i) = b_i$, 即 $f(a_i) - g(a_i) = 0$. 则 $f(x) - g(x)$ 至少有 $n+1$ 个零点, 但 $\deg(f - g) \leq n$, 故由拉格朗日零点定理, $f(x) - g(x) = 0$, 即 $f(x) = g(x)$.

其次, 令

$$f_i(x) = \frac{\prod_{j \neq i} (x - a_j)}{\prod_{j \neq i} (a_i - a_j)}.$$

则 $\deg f_i = n$, $f_i(a_i) = 1$, 且 $f_i(a_j) = 0$ ($j \neq i$). 因此

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n+1} b_i f_i(x) = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{b_i \prod_{j \neq i} (x - a_j)}{\prod_{j \neq i} (a_i - a_j)}$$

就是满足条件的多项式, 此公式称为拉格朗日插值公式. □

证2. 由范德蒙德行列式即得. $\square$

例 5.2.4. 设 n 是正整数. 试求多项式 $x^n - 1$ 在复数域和实数域上的因式分解.

解. 我们首先讨论复数域的情况. 令

$$\zeta_n = \exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right).$$

根据复数的乘法(棣莫弗公式), 我们知道

$$\zeta_n^k = \exp\left(\frac{2k\pi i}{n}\right) = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right).$$

所以 $\zeta_n^n = 1$ 且当 $0 < i < n$ 时, $\zeta_n^i \neq 1$. 因此 $1, \zeta_n, \dots, \zeta_n^{n-1}$ 是 $x^n - 1$ 的 n 个两两不同的复根. 由拉格朗日定理, $x^n - 1$ 的根集就是 $\{\zeta_n^k \mid 0 \leq k < n\}$, 即在复数域上,

$$x^n - 1 = (x - 1)(x - \zeta_n) \cdots (x - \zeta_n^{n-1}) = \prod_{k=0}^{n-1} (x - \zeta_n^k).$$

注意到对于 $0 < k < \frac{n}{2}$,

$$(x - \zeta_n^k)(x - \zeta_n^{n-k}) = x^2 - 2x \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + 1,$$

而左边的多项式作为实系数多项式是不可约的, 因此在实数域上我们有

$$x^n - 1 = \begin{cases} (x - 1) \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} (x^2 - 2x \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + 1), & \text{若 } n \text{ 是奇数,} \\ (x - 1)(x + 1) \prod_{k=1}^{\frac{n-2}{2}} (x^2 - 2x \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + 1), & \text{若 } n \text{ 是偶数.} \end{cases} \quad \square$$

定义 5.2.7. 多项式 $x^n - 1$ 的根称为 n 次单位根. 若 ω 是 $x^n - 1$ 的根但不是任何 $x^i - 1$ ($1 \leq i < n$) 的根, 则称 ω 是 n 次本原单位根.

例 5.2.5. 求证: 复数域中 n 次本原单位根集合是 $\{\zeta_n^k \mid 0 < k \leq n, (k, n) = 1\}$.

证明. 首先, 复数域中 n 次单位根集合是 $\{\zeta_n^k \mid 0 \leq k < n\}$. 计算得, 对于 $i \in \mathbb{Z}$, $\zeta_n^i = 1$ 当且仅当 $n \mid i$. 若存在 $1 \leq i < n$ 使得 $(\zeta_n^k)^i = \zeta_n^{ki} = 1$ 且 $(k, n) = 1$, 则 $n \mid ki$, 这说明 $n \mid i$, 不可能. 这说明当 $(k, n) = 1$ 时, ζ_n^k 是 n 次本原单位根. 另一方面, 若 $(k, n) \neq 1$, 则 $(\zeta_n^k)^{n/(k, n)} = 1$, 故 ζ_n^k 不是 n 次本原单位根. $\square$

§5.3 一些例子

例 5.3.1 (秩的基本不等式). 设 $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{F}^{n \times k}$, 则

$$\text{rank}(AB) \leq \min\{\text{rank}(A), \text{rank}(B)\}.$$

等价地,

$$\text{rank}(AB) \leq \text{rank}(A), \quad \text{rank}(AB) \leq \text{rank}(B).$$