

第一周作业

习题 1.1: P66 Ex 2.3.5

给定 n 阶方阵 $A = (a_{ij})$. 证明:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_{21} - a_{11} & a_{22} - a_{12} & \cdots & a_{2n} - a_{1n} \\ a_{31} - a_{11} & a_{32} - a_{12} & \cdots & a_{3n} - a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} - a_{11} & a_{n2} - a_{12} & \cdots & a_{nn} - a_{1n} \end{vmatrix} = \sum_{1 \leq i, j \leq n} A_{ij},$$

其中 A_{ij} 是行列式 $\det A$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式, $1 \leq i, j \leq n$.

习题 1.2: P66 Ex 2.3.6

证明: 如果 n 阶行列式 Δ 的某一行或某一列的所有元素都是 1, 则 Δ 的所有元素的代数余子式之和等于 Δ .

习题 1.3: P66 Ex 2.3.8

给定 n 阶方阵 $A = (a_{ij})$. 证明:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & x_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & x_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & x_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n & z \end{vmatrix} = z \det A - \sum_{1 \leq i, j \leq n} A_{ij} x_i y_j,$$

其中 A_{ij} 是行列式 $\det A$ 的元素 a_{ij} 的代数余子式, $1 \leq i, j \leq n$.

习题 1.4: P67 Ex 2.3.9

设 $b_{ij} = (a_{i1} + a_{i2} + \cdots + a_{in}) - a_{ij}$, $1 \leq i, j \leq n$. 证明:

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}(n-1) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

如果 $b_{ij} = (a_{i1} + a_{i2} + \cdots + a_{in}) - ka_{ij}$, 其中 $1 \leq k \leq n$, $1 \leq i, j \leq n$, 结论又怎样?

习题 1.5: P83 Ex 2.5.1(4)

计算下列 n 阶行列式:

$$\begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-2} & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$$

习题 1.6: P86 Ex 2.5.1(19)

计算下列 $(n+1)$ 阶行列式:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & & & & \\ -n & x-2 & 2 & & & \\ & -(n-1) & x-4 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & n-1 & \\ & & & -2 & x-2n+2 & n \\ & & & & -1 & x-2n \end{vmatrix}.$$

习题 1.7: P86 Ex 2.5.2

设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是正整数。证明: n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

能被 $1^{n-1}2^{n-2}\cdots(n-2)^2(n-1)$ 整除。

习题 1.8: P86 Ex 2.5.5 (Levy-Desplanques)

设 n 阶方阵 $A = (a_{ij})$ 的元素都是复数，并且

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|, i = 1, 2, \dots, n,$$

则方阵 A 称为主角占优矩阵。证明：主角占优矩阵的行列式不为零。