

第一次习题课

1.1 第一周作业选讲

习题 1.1: P66 Ex 2.3.8

给定 n 阶方阵 $A = (a_{ij})$. 证明:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & x_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & x_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & x_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n & z \end{vmatrix} = z \det A - \sum_{1 \leq i, j \leq n} A_{ij} x_i y_j,$$

其中 A_{ij} 是行列式 $\det A$ 的元素 a_{ij} 的代数余子式, $1 \leq i, j \leq n$.

证明

思路: 等式右端第一项是 $z \det A$, 而左端行列式的最后一列正好可以拆成 $(0, \dots, 0, z)^\top$ 与 $(x_1, \dots, x_n, 0)^\top$ 之和, 因此先利用行列式关于一列的线性性把 $z \det A$ 分离出来。剩下的行列式最后一个元素为 0, 而最后一行含有 $y_1, \dots, y_n$, 所以自然想到先按最后一行作 Laplace 展开, 所得每个 n 阶行列式的最后一列又含有 $x_1, \dots, x_n$, 再按最后一列展开。这样便会出现 A 的各个余子式 M_{ij} , 再结合 $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, 即可得到所要求的 $\sum A_{ij} x_i y_j$. 以下为解答过程:

记左端行列式为 Δ . 把最后一列拆成 $(0, \dots, 0, z)^\top$ 与 $(x_1, \dots, x_n, 0)^\top$ 之和, 则 $\Delta = z \det A + \Delta_0$, 其中

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & x_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & x_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & x_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n & 0 \end{vmatrix}.$$

记 M_{ij} 为 $\det A$ 中元素 a_{ij} 的余子式。先将 Δ_0 按最后一行展开, 再将所得的每个 n 阶行列式按最后一列展

开, 我们可以得到

$$\Delta_0 = \sum_{j=1}^n (-1)^{n+1+j} y_j \sum_{i=1}^n (-1)^{i+n} x_i M_{ij} = - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} M_{ij} x_i y_j = - \sum_{1 \leq i, j \leq n} A_{ij} x_i y_j.$$

代回原式即可得到所要证明的结论。 $\square$

习题 1.2: P67 Ex 2.3.9

设 $b_{ij} = (a_{i1} + a_{i2} + \cdots + a_{in}) - a_{ij}$, $1 \leq i, j \leq n$. 证明:

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}(n-1) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

如果 $b_{ij} = (a_{i1} + a_{i2} + \cdots + a_{in}) - ka_{ij}$, 其中 $1 \leq k \leq n$, $1 \leq i, j \leq n$, 结论又怎样?

证明

思路: 这个 b_{ij} 的形式一看就很特殊, 而通过矩阵乘法显然是可以很容易造出这种形式的, 所以我们考虑将矩阵 $B = (b_{ij})$ 分解为 $B = AK$, 其中 $A = (a_{ij})$, 而 K 是一个特殊的矩阵。以下为解答过程:

直接考虑一般情形。令 $B = (b_{ij})$, 并令

$$K = \begin{pmatrix} 1-k & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-k & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1-k \end{pmatrix}.$$

容易看出 $B = AK$, 故 $|B| = |A||K|$. 为计算 $|K|$, 先把第2列至第 n 列全部加到第1列。此时第1列的所有元素均为 $(n-k)$. 从第1列提出公因子 $(n-k)$ 后, 再依次用第2列至第 n 列减去第1列, 得到

$$|K| = (n-k) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -k & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & -k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -k \end{vmatrix} = (n-k)(-k)^{n-1}.$$

于是一般情形下有 $|B| = (-1)^{n-1}k^{n-1}(n-k)|A|$, $1 \leq k \leq n$. 而 $k=1$ 时即 $|B| = (-1)^{n-1}(n-1)|A|$. $\square$

习题 1.3: P86 Ex 2.5.1(19)

计算下列 $(n+1)$ 阶行列式:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & & & & \\ -n & x-2 & 2 & & & \\ & -(n-1) & x-4 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & n-1 & \\ & & & -2 & x-2n+2 & n \\ & & & & -1 & x-2n \end{vmatrix}.$$

解答

思路：原行列式是三对角型，直接展开不方便，但是我们观察到每列的和都是 $(x-n)$ 。因此我们先尝试逐行相加，把下三角部分化成统一的 $(x-n)$ ，再从右向左作列变换，把矩阵重新化为与原来同型但参数由 x 变为 $(x-1)$ 的行列式，这个参数的变化也是比较容易想不到或出错的地方。此时最后一行只有一个非零元，按最后一行展开即可得到递推关系 $\Delta_n(x) = (x-n)\Delta_{n-1}(x-1)$ 。以下为解答过程：

记该行列式为 $\Delta_n(x)$ 。我们从 $i=1$ 开始依次将第 i 行加到第 $(i+1)$ 行，直至 $i=n$ 。此时有

$$\Delta_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & & & & \\ x-n & x-1 & 2 & & & \\ x-n & x-n & x-2 & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & n-1 & \\ x-n & x-n & \cdots & x-n & x-(n-1) & n \\ x-n & x-n & \cdots & x-n & x-n & x-n \end{vmatrix}.$$

再从 $j=n+1$ 开始，从右向左依次将第 $(j-1)$ 列减去其右边所有列之和，直至 $j=2$ 。此时有

$$\Delta_n(x) = \begin{vmatrix} x-1 & 1 & & & & \\ -(n-1) & (x-1)-2 & 2 & & & \\ & -(n-2) & (x-1)-4 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & n-1 & \\ & & & -1 & (x-1)-2(n-1) & n \\ & & & & 0 & x-n \end{vmatrix}.$$

按最后一行展开，得到 $\Delta_n(x) = (x-n)\Delta_{n-1}(x-1)$ 。又因为 $\Delta_0(x) = x$ ，所以

$$\Delta_n(x) = (x-n)\Delta_{n-1}(x-1) = (x-n)^2\Delta_{n-2}(x-2) = \cdots = (x-n)^n\Delta_0(x-n) = (x-n)^{n+1}.$$

习题 1.4: P86 Ex 2.5.2

设 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 是正整数。证明： n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

能被 $1^{n-1}2^{n-2}\cdots(n-2)^2(n-1)$ 整除。

证明

思路：这个题目一看就是 Vandermonde 行列式的形式，所以很多人会直接把行列式的值写出来并直接讨论整除关系，这样确实能做出来但比较麻烦，如果把 $1^{n-1}2^{n-2}\cdots(n-2)^2(n-1)$ 写成 $1!\cdots(n-2)!(n-1)!$ 可能会更容易启发我们去考虑组合数。注意题中 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 都是正整数的条件，并且我们可以通过列变换将矩阵每一列都替换为和原来次数相同的同型多项式，同时组合数也可以视为多项式，所以我们就把行列式的每一列都替换为组合数的形式，再提出公因子，这样就能得到所需的整除关系了。直接利用 Vandermonde 行列式并直接讨论整除的做法我在作业答案里没有写出来，所以补充在后面，以下为两种思路的解答过程：

记 $p_0(t) = 1$, $p_r(t) = t(t-1)\cdots(t-r+1)$, $1 \leq r \leq n-1$ 。显然 $p_r(t)$ 是首项系数为 1 的 r 次多项式，依次

对行列式作列变换, 可将第 $r+1$ 列 a_i^r 替换为 $p_r(a_i)$, $1 \leq r \leq n-1, 1 \leq i \leq n$. 记该行列式为 Δ , 则有

$$\Delta = \begin{vmatrix} p_0(a_1) & p_1(a_1) & \cdots & p_{n-1}(a_1) \\ p_0(a_2) & p_1(a_2) & \cdots & p_{n-1}(a_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_0(a_n) & p_1(a_n) & \cdots & p_{n-1}(a_n) \end{vmatrix}.$$

同时我们又有 $p_r(a_i) = r! \binom{a_i}{r}$, 这里 $\binom{a_i}{r}$ 是组合数. 于是我们可以得到

$$\Delta = \left(\prod_{r=0}^{n-1} r! \right) \begin{vmatrix} \binom{a_1}{0} & \binom{a_1}{1} & \cdots & \binom{a_1}{n-1} \\ \binom{a_2}{0} & \binom{a_2}{1} & \cdots & \binom{a_2}{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \binom{a_n}{0} & \binom{a_n}{1} & \cdots & \binom{a_n}{n-1} \end{vmatrix}.$$

由于 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 是正整数, 故上式中的行列式因子是整数. 而

$$\prod_{r=0}^{n-1} r! = \prod_{r=1}^{n-1} r! = \prod_{j=1}^{n-1} j^{n-j} = 1^{n-1} 2^{n-2} \cdots (n-2)^2 (n-1).$$

故 Δ 能被 $1^{n-1} 2^{n-2} \cdots (n-2)^2 (n-1)$ 整除. □

证明

记该行列式为 Δ . 由 Vandermonde 行列式公式可得 $\Delta = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$. 若有 $a_i = a_j$, 则 $\Delta = 0$, 结论显然成立. 下设 $a_1, \dots, a_n$ 两两不同. 将 $1^{n-1} 2^{n-2} \cdots (n-2)^2 (n-1)$ 写为 $\prod_{k=1}^{n-1} k!$. 任取素数 p , 对每个固定的 $s \in \mathbb{N}^+$, 将 $a_1, \dots, a_n$ 按模 p^s 的余数分类. 设各个余数类中元素个数为 $n_{s1}, \dots, n_{sp^s}$, 则

$$\sum_{\nu=1}^{p^s} n_{s\nu} = n, \forall s \geq 1, v_p(\Delta) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} v_p(a_j - a_i) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \sum_{s \geq 1} \mathbf{1}_{\{p^s | (a_j - a_i)\}} = \sum_{s \geq 1} \sum_{\nu=1}^{p^s} \binom{n_{s\nu}}{2}.$$

写 $n = q_s p^s + r_s$, 其中 $0 \leq r_s < p^s$. 在 $n_{s1} + \cdots + n_{sp^s} = n$ 的条件下, 由凸函数的性质可知 $\sum_{\nu=1}^{p^s} \binom{n_{s\nu}}{2}$ 在各个 $n_{s\nu}$ 尽可能平均时最小, 于是可以得到

$$\sum_{\nu=1}^{p^s} \binom{n_{s\nu}}{2} \geq r_s \binom{q_s + 1}{2} + (p^s - r_s) \binom{q_s}{2} = p^s(1 + \cdots + (q_s - 1)) + r_s q_s = \sum_{k=1}^{n-1} \left\lfloor \frac{k}{p^s} \right\rfloor.$$

于是我们可以得到

$$v_p(\Delta) \geq \sum_{s \geq 1} \sum_{k=1}^{n-1} \left\lfloor \frac{k}{p^s} \right\rfloor = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{m=1}^k v_p(m) = \sum_{k=1}^{n-1} v_p(k!) = v_p \left(\prod_{k=1}^{n-1} k! \right).$$

由素数 p 的任意性可知 Δ 能被 $1^{n-1} 2^{n-2} \cdots (n-2)^2 (n-1)$ 整除. □

习题 1.5: P86 Ex 2.5.5 (Levy-Desplanques)

设 n 阶方阵 $A = (a_{ij})$ 的元素都是复数, 并且

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|, i = 1, 2, \dots, n,$$

则方阵 A 称为主角占优矩阵. 证明: 主角占优矩阵的行列式不为零.

证明

思路: 题设中的严格对角占优条件比较的是每一行的对角元的模与其余元素的模之和, 因此我们希望在 $Ax = 0$ 的某一行中也能把其余各项之和与对角项比较. 若 $Ax = 0$ 存在非零解, 取其中模最大的分量 x_k ,

则所有 $|x_j|$ 都可以由 $|x_k|$ 控制, 这样第 k 个方程中的其余各项之和便可以直接与 $|a_{kk}x_k|$ 比较, 而严格对角占优恰好会给出矛盾。以下为解答过程:

反设 $|A| = 0$, 则必然存在非零向量 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^\top$ 使得 $Ax = 0$. 取 k 使得 $|x_k| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$, 则 $|x_k| > 0$. 由 $Ax = 0$, 则其第 k 个分量也为 0, 于是我们有

$$\sum_{j=1}^n a_{kj}x_j = 0 \Rightarrow a_{kk}x_k = - \sum_{j=1, j \neq k}^n a_{kj}x_j.$$

于是我们可以得到

$$|a_{kk}||x_k| \leq \sum_{j=1, j \neq k}^n |a_{kj}||x_j| \leq \left(\sum_{j=1, j \neq k}^n |a_{kj}| \right) |x_k| < |a_{kk}||x_k|.$$

矛盾。故主角占优矩阵的行列式不为零。

□

1.2 第二周作业选讲

习题 1.6: P98 Ex 3.1.3

求出所有和方阵 A 可交换的方阵:

$$(1) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad (2) A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

解答

思路: 最简单的想法是设方阵 $X = (x_{ij})$ 与方阵 A 交换, 由 $AX - XA = 0$ 得到 n^2 个关于 x_{ij} 的线性方程并求解。所得的两个集合分别为:

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a-3b & 0 \\ 3c & c & a+c \end{pmatrix} \middle| a, b, c \in \mathbb{C} \right\}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{C} \right\}.$$

这两个集合恰好都是 $\{f(A) \mid f \in \mathbb{C}[x]\}$, 这并不是巧合。

断言 1.1

设方阵 $A \in M_n(\mathbb{C})$ 的特征值两两不同, 则所有与 A 交换的方阵为 $\{f(A) \mid f \in \mathbb{C}[x]\}$.

证明. 设 A 的 n 个特征值分别为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 则存在可逆矩阵 P 使得 $A = P \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) P^{-1}$. 设方阵 PXP^{-1} 与 A 交换 ($X = (x_{ij})$), 则

$$\lambda_i x_{ij} = x_{ij} \lambda_j.$$

进而 $X = \operatorname{diag}(x_{11}, x_{22}, \dots, x_{nn})$ 是对角阵。由于 $\lambda_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 两两不同, 考虑多项式

$$f(x) = \sum_{i=1}^n x_{ii} \prod_{j \neq i} \frac{x - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j}.$$

此时 $PXP^{-1} = f(A)$.

□

又因为 A 特征值两两不同, A 的极小多项式和特征多项式相同, 故 $\{f(A) \mid f \in \mathbb{C}[x]\} \cong \mathbb{C}[x]/(\det(xI_n - A))$ 维数为 n . $\{I_n, A, A^2, \dots, A^{n-1}\}$ 是 $\{f(A) \mid f \in \mathbb{C}[x]\}$ 的一组基。

习题 1.7: P99 Ex 3.1.18

设 n 阶方阵 A 的每一行上都恰有 2 个元素为 1, 而其他元素为零, J 是元素全为 1 的 n 阶方阵. 求出所有适合 $A^2 + 2A = 2J$ 的 n 阶方阵 A .

解答

思路: 方阵 A 每行的元素和均为 2, 不难注意到 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ 是方阵 A 的特征向量, 且对应的特征值为 2 (同时也是方阵 J 的特征向量, 特征值为 n). 利用

$$(A^2 + 2A) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = 2J \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = 2n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

可以计算出 $n = 4$.

题目中的方程可以化为 $(A + I)^2 = 2J + I$. 设 $A = (a_{ij})$, 则

$$3 = (a_{ii} + 1)^2 + \sum_{k \neq i} a_{ik} a_{ki}$$

故 $a_{ii} = 0$, 且若 $a_{ik} = 1$, 则 $a_{ki} = 1$. 进而可得 A 是对称矩阵. 分别讨论 $a_{12} = 0, a_{13} = 0, a_{14} = 0$ 三种

情况即可. 这里以 $a_{12} = 0, a_{13} = 1, a_{14} = 1$ 的情况为例, 此时 $A + I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a_{23} & a_{24} \\ 1 & a_{32} & 1 & a_{34} \\ 1 & a_{42} & a_{43} & 1 \end{pmatrix}$, 不难解得

$$a_{23} = a_{32} = 1, a_{24} = a_{42} = 1, a_{34} = 0, a_{43} = 0.$$

习题 1.8: P87 Ex 2.5.6

把 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$

展开为 λ 的多项式, 并用行列式 $\det A$ 的子式表示它的关于 λ 的各次幂的系数, 其中 $A = (a_{ij})$.

解答

思路: 这种题一般选择利用行列式的多重线性性展开, 详细过程见答案:

A 的特征多项式为

$$\varphi_A(\lambda) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \left(\sum_{1 \leq r_1 < r_2 < \cdots < r_i \leq n} A \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & \cdots & r_i \\ r_1 & r_2 & \cdots & r_i \end{bmatrix} \right) \lambda^{n-i}.$$

记 E_i 为第 i 个元素为 1 其余元素为 0 的列向量, $\alpha_i = \begin{pmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \vdots \\ a_{in} \end{pmatrix}$, 则

$$\begin{aligned} & \det(\lambda E_1 - \alpha_1, \lambda E_2 - \alpha_2, \cdots, \lambda E_n - \alpha_n) \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_{1 \leq k_1 \leq k_2 \leq \cdots \leq k_i \leq n} \det(\lambda E_1, \cdots, -\alpha_{k_1}, \cdots, -\alpha_{k_2}, \cdots, -\alpha_{k_i}, \cdots, \lambda E_n) \\ &= \sum_{i=0}^n \left(\sum_{1 \leq k_1 \leq k_2 \leq \cdots \leq k_i \leq n} A \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & \cdots & r_i \\ r_1 & r_2 & \cdots & r_i \end{bmatrix} \right) (-1)^i \lambda^{n-i}. \end{aligned}$$

习题 1.9: P104 Ex 3.2.4(3),(4)

计算下列行列式:

$$(3) \begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & \cdots & n^2 \\ n^2 & 1^2 & 2^2 & \cdots & (n-1)^2 \\ & & \cdots & & \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & \cdots & 1^2 \end{vmatrix}; \quad (4) \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ -a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ -a_{n-1} & -a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ & & \cdots & & \\ -a_2 & -a_3 & -a_4 & \cdots & a_1 \end{vmatrix}.$$

解答

思路: 这是两道非常经典的题目, 它们的特征值均是某个多项式在不同点的取值, 相信大家都会算。这里主要写写如何给出 (3) 的转化为封闭形式表达。

设 $f_k(x) = 1^k + 2^k x + 3^k x^2 + \cdots + n^k x^{n-1}$, 那么不难得到递推关系 $f_k(x) = (x f_{k-1}(x))'$. 进而

$$\begin{aligned} f_0(x) &= \frac{1-x^n}{1-x}, \quad f_1(x) = \frac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}, \\ f_2(x) &= \frac{1+x-(n+1)^2 x^n + (2n^2+2n-1)x^{n+1} - n^2 x^{n+2}}{(1-x)^3}. \end{aligned} \quad (x \neq 1)$$

当 $x=1$, $f_2(1) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. 进而原行列式的值为 $(\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}})$

$$\prod_{i=0}^{n-1} f_2(\omega^i) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \prod_{i=1}^{n-1} f_2(\omega^i) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \prod_{i=1}^{n-1} \frac{n^2(\omega^i - 1) - 2n}{(1 - \omega^i)^2}.$$

记 $h(x) = \prod_{i=1}^{n-1} (x - \omega^i) = \frac{x^n - 1}{x - 1}$, $h(1) = n$, 故

$$\begin{aligned} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \prod_{i=1}^{n-1} \frac{n^2(\omega^i - 1) - 2n}{(1 - \omega^i)^2} &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} (-n^2)^{n-1} \frac{h(\frac{n+2}{n})}{h(1)^2} \\ &= (-1)^{n-1} \frac{n^{n-2}(n+1)(2n+1)}{12} [(n+2)^n - n^n]. \end{aligned}$$

习题 1.10: P105 Ex 3.2.7

适合 $AA^T = I_{(n)} = A^T A$ 的 n 阶实方阵 A 称为正交的。证明：

- (1) 正交矩阵的行列式等于 ± 1 ;
- (2) 位于正交方阵的 k 个行上的所有 k 阶子式的平方和等于 1, $k = 1, 2, \dots, n$.

解答

思路：第二问考虑 $I_n = AA^T$ 的 k 阶主子式，利用 Binet–Cauchy 公式展开即可。

习题 1.11: P106 Ex 3.2.10

设 $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$. 证明：方阵 AB 和 BA 的所有 k 阶主子式之和相等。由此证明：

$$\det(\lambda I_{(n)} - AB) = \det(\lambda I_{(n)} - BA).$$

证明

思路：利用 Binet–Cauchy 公式 + P98 Ex 2.5.6. 也可以利用 Schur 分解来做，详见答案：

方阵 AB 的所有 k 阶主子式之和为

$$\begin{aligned} & \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \det \begin{pmatrix} a_{i_1 1} & a_{i_1 2} & \dots & a_{i_1 n} \\ a_{i_2 1} & a_{i_2 2} & \dots & a_{i_2 n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_k 1} & a_{i_k 2} & \dots & a_{i_k n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1 i_1} & b_{1 i_2} & \dots & b_{1 i_k} \\ b_{2 i_1} & b_{2 i_2} & \dots & b_{2 i_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n i_1} & b_{n i_2} & \dots & b_{n i_k} \end{pmatrix} \\ & \stackrel{\text{Binet–Cauchy}}{=} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n} \det A \begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k \\ j_1 & j_2 & \dots & j_k \end{bmatrix} \det B \begin{bmatrix} j_1 & j_2 & \dots & j_k \\ i_1 & i_2 & \dots & i_k \end{bmatrix} \\ & = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n} \det B \begin{bmatrix} j_1 & j_2 & \dots & j_k \\ i_1 & i_2 & \dots & i_k \end{bmatrix} \det A \begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k \\ j_1 & j_2 & \dots & j_k \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

上式即方阵 BA 的所有 k 阶主子式之和，再由 Ex 2.5.6 即可得证。

同样的通过广义初等变换我们不难得到

$$\det \begin{pmatrix} xI_n & A \\ B & xI_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} xI_n - \frac{1}{x}AB & 0 \\ 0 & xI_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} xI_n & 0 \\ 0 & xI_n - \frac{1}{x}BA \end{pmatrix}.$$

由此也能证明本题中的等式。 □

1.3 补充题目**习题 1.12: 2021 秋期中 T5**

设矩阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, 其中 $a_{ij} = \delta_{ij} + i + j$, 其中 δ_{ij} 为 Kronecker 记号。求矩阵 A 的行列式。

解答

题目中的 Kronecker 记号实际上就是加上一个单位阵，于是我们可以把矩阵 A 拆分为 $I_n + B$ ，再由特征值与行列式的关系可以把目标转化为计算 B 的行列式。而 B 只有两个非零特征值，从而再次转化为求 B 的迹与所有二阶主子式之和。首先 $n \leq 2$ 时的情形平凡，下设 $n > 2$. 令 $A = I_n + B$, 其中 $B = (i + j)_{n \times n}$.

易知 $\text{rank } B = 2$, 故 B 的特征多项式为 $\varphi_B(\lambda) = \lambda^{n-2}(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$. 由 $\text{tr}(B) = n(n+1)$ 可知 $\lambda_1 + \lambda_2 = n(n+1)$. 又因为 B 所有二阶主子式之和为

$$\lambda_1 \lambda_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \begin{vmatrix} 2i & i+j \\ i+j & 2j \end{vmatrix} = - \sum_{1 \leq i < j \leq n} (i-j)^2 = - \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)k^2 = \frac{n^2 - n^4}{12}.$$

于是我们可以得到

$$\det A = (\lambda_1 + 1)(\lambda_2 + 1) = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 + \lambda_2 + 1 = \frac{n^2 - n^4}{12} + n^2 + n + 1 = \frac{-n^4 + 13n^2 + 12n + 12}{12}.$$

习题 1.13

已知 $n \geq 2, a_1, a_2, \dots, a_n \neq 0$, 求 n 阶行列式:

$$\begin{vmatrix} 0 & a_1 + a_2 & \cdots & a_1 + a_n \\ a_2 + a_1 & 0 & \cdots & a_2 + a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n + a_1 & a_n + a_2 & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

解答

这个题目一看就很容易让人想到加边, 容易发现每行除了对角元之外, 都含有一个 $(a_1, \dots, a_n)$ 的向量, 同时也都含有一个 $(1, \dots, 1)$ 的常数倍, 但是无论我们用这两个里的哪个向量去加边, 继续往下做还是无从下手, 这个时候我们就可以加两次边, 记原行列式为 Δ , 则有

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & 0 & 0 & a_1 + a_2 & \cdots & a_1 + a_n \\ 0 & 0 & a_2 + a_1 & 0 & \cdots & a_2 + a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & a_n + a_1 & a_n + a_2 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ -a_1 & -1 & -2a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_2 & -1 & 0 & -2a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_n & -1 & 0 & 0 & \cdots & -2a_n \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 - \frac{n}{2} & -\sum_{i=1}^n \frac{1}{2a_i} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i & 1 - \frac{n}{2} & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & 0 & -2a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -2a_n \end{vmatrix} \\ &= \left[\left(1 - \frac{n}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \left(\sum_{i=1}^n a_i\right) \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j}\right) \right] (-2)^{n-2} a_1 \cdots a_n \\ &= (-1)^{n-2} 2^{n-2} a_1 \cdots a_n \left[(n-2)^2 - \left(\sum_{i=1}^n a_i\right) \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j}\right) \right]. \end{aligned}$$

习题 1.14: P85 Ex 2.5.1(18)

计算下列 n 阶行列式:

$$\begin{vmatrix} 1+x_1 & 1+x_1^2 & \cdots & 1+x_1^n \\ 1+x_2 & 1+x_2^2 & \cdots & 1+x_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1+x_n & 1+x_n^2 & \cdots & 1+x_n^n \end{vmatrix}$$

解答

这个题目很容易让人联想到 Vandermonde 行列式, 但是每一项都多了一个 1, 所以不便于直接使用, 但我们可以通过加边来消掉这个 1, 从而可以利用 Vandermonde 行列式. 记原行列式为 Δ , 则有

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 1+x_1 & 1+x_1^2 & \cdots & 1+x_1^n \\ 1+x_2 & 1+x_2^2 & \cdots & 1+x_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1+x_n & 1+x_n^2 & \cdots & 1+x_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1+x_1 & 1+x_1^2 & \cdots & 1+x_1^n \\ 1 & 1+x_2 & 1+x_2^2 & \cdots & 1+x_2^n \\ 1 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1+x_n & 1+x_n^2 & \cdots & 1+x_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ 1 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} \\ &= - \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ 1 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ 1 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} \end{aligned}$$

记 $x_0 = 1$, 则由 Vandermonde 行列式可知:

$$\begin{aligned} \Delta &= 2 \begin{vmatrix} x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} - \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) = 2 \prod_{i=1}^n x_i \cdot \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} - \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \\ &= 2 \prod_{i=1}^n x_i \left(\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \right) - \prod_{0 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j) = \left(2 \prod_{i=1}^n x_i - \prod_{i=1}^n (x_i - 1) \right) \left(\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \right). \end{aligned}$$

习题 1.15

考虑行列式

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \cdots & s_{n-1} & 1 \\ s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_n & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{2n-2} & x^{n-1} \\ s_n & s_{n+1} & s_{n+2} & \cdots & s_{2n-1} & x^n \end{vmatrix}. \quad (1)$$

其中等幂和 $s_k = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k$, $k = 1, 2, \dots$.

解答

题目中各列中的元素有线性相关的部分, 进而我们可以利用行列式的多重线性性求得该行列式的值。设 $X_i = (1, x_i, x_i^2, \dots, x_i^n)^\top$, $X = (1, x, x^2, \dots, x^n)^\top$, 则

$$\begin{aligned}
 & \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \cdots & s_{n-1} & 1 \\ s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_n & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{2n-2} & x^{n-1} \\ s_n & s_{n+1} & s_{n+2} & \cdots & s_{2n-1} & x^n \end{vmatrix} = \det \left(\sum_{i=1}^{n-1} X_i, \sum_{i=1}^{n-1} x_i X_i, \dots, \sum_{i=1}^{n-1} x_i^{n-1} X_i, X \right) \\
 &= \sum_{\sigma \in S_n} \det(X_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)} X_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)}^{n-1} X_{\sigma(n)}, X) = \left(\sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^{n-1} (-1)^{\text{sgn}(\sigma)} x_{\sigma(i)}^{i-1} \right) \det(X_1, X_2, \dots, X_n, X) \\
 &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n & x \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 & x^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n & x^n \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^n (x - x_i) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)^2.
 \end{aligned}$$