

第五周作业

习题 5.1: P186 Ex 4.6.17

设 $P_1, P_2, \dots, P_k, Q_1, Q_2, \dots, Q_k$ 都是 n 阶方阵, 并且 $P_i Q_j = Q_j P_i, \text{rank } P_i = \text{rank } P_i Q_i, 1 \leq i, j \leq k$.
证明: $\text{rank } P_1 P_2 \cdots P_k = \text{rank } P_1 \cdots P_k Q_1 \cdots Q_k$.

证明

用归纳法证明。当 $k=1$, 这就是给定的条件。假设结论对 $k-1$ 成立, 记 $S = P_1 \cdots P_{k-1}, T = Q_1 \cdots Q_{k-1}$, 则 $\text{rank } S = \text{rank}(ST)$. 由可交换性有 $ST = TS$. 将矩阵视作 $\mathbb{F}^n$ 上的线性变换, 由 $\text{Ker } S \subseteq \text{Ker}(TS)$ 及两者维数相等, 可得 $\text{Ker } S = \text{Ker}(TS)$. 类似地, 由 $\text{Im}(P_k Q_k) \subseteq \text{Im } P_k$ 及 $\text{rank}(P_k Q_k) = \text{rank } P_k$, 可得 $\text{Im}(P_k Q_k) = \text{Im } P_k$. 对任意两个可相乘的矩阵 A, B 有 $\dim \text{Im } B = \dim \text{Im}(A|_{\text{Im } B}) + \dim \text{Ker}(A|_{\text{Im } B}) = \dim \text{Im}(AB) + \dim(\text{Ker } A \cap \text{Im } B)$. 于是有 $\text{rank}(AB) = \text{rank } B - \dim(\text{Ker } A \cap \text{Im } B)$, 从而可以得到

$$\begin{aligned} \text{rank}(SP_k T Q_k) &= \text{rank}(TSP_k Q_k) = \text{rank}(P_k Q_k) - \dim(\text{Ker}(TS) \cap \text{Im}(P_k Q_k)) \\ &= \text{rank } P_k - \dim(\text{Ker } S \cap \text{Im } P_k) = \text{rank}(SP_k). \end{aligned}$$

这正好就是我们所要证明的结论, 这样我们就完成了证明。□

习题 5.2: P191 Ex 4.7.3

设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 都是四维复向量空间 $\mathbb{C}^4$ 中的向量, $\mathbb{C}^4$ 中分别由向量集合 $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ 和 $\{\alpha_3, \alpha_4\}$ 生成的子空间记为 V 和 W . 试判断 $\mathbb{C}^4 = V \oplus W$ 是否成立?

- (1) $\alpha_1 = (0, 1, 0, 1), \alpha_2 = (0, 0, 1, 0), \alpha_3 = (1, 0, 1, 0), \alpha_4 = (1, 1, 0, 0)$;
- (2) $\alpha_1 = (-1, 1, 1, 0), \alpha_2 = (0, 1, -1, 1), \alpha_3 = (1, 0, 0, 0), \alpha_4 = (0, 0, 0, 1)$;
- (3) $\alpha_1 = (1, 0, 0, 1), \alpha_2 = (0, 1, 1, 0), \alpha_3 = (1, 0, 1, 0), \alpha_4 = (0, 1, 0, 1)$.

解答

- (1) 易知 $\dim V = \dim W = 2, \dim(V+W) = 4$, 从而 $\dim(V+W) = \dim V + \dim W$, 故 $\mathbb{C}^4 = V \oplus W$.
- (2) 易知 $\dim V = \dim W = 2, \dim(V+W) = 4$, 从而 $\dim(V+W) = \dim V + \dim W$, 故 $\mathbb{C}^4 = V \oplus W$.

(3) 易知 $\dim V = \dim W = 2$, $\dim(V + W) = 3$, 故 $\dim(V + W) < \dim V + \dim W$, 故 $\mathbb{C}^4 = V \oplus W$ 不成立, 实际上此时 $V + W$ 甚至不是直和。

习题 5.3: P191 Ex 4.7.4

设 U, V 和 W 是线性空间 L 的子空间。如果其中每一个都与另外两个之和的交是零子空间, 则这三个子空间称为无关的。证明: $L = U \oplus (V \oplus W)$ 的充分必要条件是, U, V, W 是无关的, 且 $L = U + V + W$ 。

证明

首先若 $L = U \oplus (V \oplus W) = W \oplus (U \oplus V) = V \oplus (W \oplus U)$. 则由直和的定义可知这三个子空间无关, 而至于 $L = U + V + W$ 则是显然的。反过来由 U, V, W 是无关的, 则 $V \cap W \subseteq V \cap (U + W) = \{0\}$ 且 $U \cap (V + W) = \{0\}$, 所以 $L = U + V + W = U + (V \oplus W) = U \oplus (V \oplus W)$. $\square$

习题 5.4: P194 Ex 4.8.2

设 A 是数域 $\mathbb{F}$ 上 $m \times n$ 矩阵, β 是数域 $\mathbb{F}$ 上 m 维列向量空间 $\mathbb{F}^m$ 中的向量, 并且 $\text{rank}(A, \beta) = \text{rank } A$. 记方程组 $Ax = 0$ 的解空间为 V_A . 设向量 α 是方程组 $Ax = \beta$ 的一个特解。证明: 方程组 $Ax = \beta$ 的所有解构成 $\mathbb{F}^n$ 中向量 α 所在的模 V_A 同余类。

证明

由非齐次线性方程组解的结构定理可知 $Ax = \beta$ 的解集为 $\{\alpha + \gamma : \gamma \in V_A\} = \alpha + V_A$, 这正是 $\bar{\alpha}$. $\square$

习题 5.5: P194 Ex 4.8.3

设 W 是数域 $\mathbb{F}$ 上 n 维列向量空间 $\mathbb{F}^n$ 的子空间。证明: 存在数域 $\mathbb{F}$ 上 $m \times n$ 矩阵 A , 使得齐次方程组 $Ax = 0$ 的解空间 V_A 为 W 。

证明

若 $W = \{0\}$, 任取可逆矩阵 $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ 即可。若 $W = \mathbb{F}^n$, 取 A 为 $1 \times n$ 零矩阵即可。

若 $0 < \dim W = r < n$, 设 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ 是 W 的基。记 $n \times r$ 矩阵 $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r)$ 为 B , 则 B 是列满秩的。

存在 n 阶可逆矩阵 P 使得 $B = P \begin{pmatrix} I_r \\ 0 \end{pmatrix}$. (可取 $P = (\alpha_1, \dots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n)$, 其中 $\{\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n\}$ 是 W 的补空间的一组基) 定义 $A = (0, I_{n-r})P^{-1} \in \mathbb{F}^{(n-r) \times n}$, 则有

$$AB = (0, I_{n-r})P^{-1}P \begin{pmatrix} I_r \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

从而 $A\alpha_j = 0, j = 1, \dots, r$. 于是 $W \subseteq V_A$. 而 $\dim V_A = n - \text{rank } A = r = \dim W$, 故 $W = V_A$. $\square$

习题 5.6: P204 Ex 5.2.10

将 $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ 中所有形如 $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ 的方阵集合记为 V , 其中 $a, b \in \mathbb{R}$. 显然 V 是实数域 $\mathbb{R}$ 上线性空间。视复数域 $\mathbb{C}$ 为实数域 $\mathbb{R}$ 上线性空间。我们定义映射 $\mathcal{A} : \mathbb{C} \rightarrow V$ 如下: 设 $\alpha = a + ib \in \mathbb{C}, a, b \in \mathbb{R}$,

则令 $\mathcal{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$. 证明: $\mathcal{A}$ 是实线性空间 $\mathbb{C}$ 到 V 上的可逆线性映射, 并且对任意 $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\mathcal{A}(\alpha\beta) = \mathcal{A}(\alpha)\mathcal{A}(\beta)$.

证明

设 $\alpha = a + ib, \beta = c + id$, 对任意 $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ 有

$$\mathcal{A}(\lambda\alpha + \mu\beta) = \begin{pmatrix} \lambda a + \mu c & \lambda b + \mu d \\ -\lambda b - \mu d & \lambda a + \mu c \end{pmatrix} = \lambda\mathcal{A}(\alpha) + \mu\mathcal{A}(\beta).$$

因此 $\mathcal{A}$ 是实线性映射. 定义映射 $\mathcal{B}: V \rightarrow \mathbb{C}$ 如下: 对任意 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in V$, 令 $\mathcal{B}(A) = a + ib$. 容易验证 $\mathcal{A}\mathcal{B} = \text{Id}_V$ 与 $\mathcal{B}\mathcal{A} = \text{Id}_{\mathbb{C}}$ 成立, 因此 $\mathcal{A}$ 是可逆的. 并且我们有

$$\mathcal{A}(\alpha\beta) = \begin{pmatrix} ac - bd & ad + bc \\ -ad - bc & ac - bd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \mathcal{A}(\alpha)\mathcal{A}(\beta).$$

这样我们就完成了证明. □

习题 5.7: P205 Ex 5.2.12

设 $\mathcal{A}: \mathbb{F}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{F}$ 是线性映射, 并且对任意 $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$, $\mathcal{A}(AB) = \mathcal{A}(BA)$. 证明: $\mathcal{A} = \lambda \text{tr}$, 其中 $\lambda \in \mathbb{F}$.

证明

容易验证 $E_{ij}E_{kl} = E_{il}\delta_{jk}$, $1 \leq i, j, k, l \leq n$, 其中 δ_{jk} 为 Kronecker 符号, 由条件可得

$$\mathcal{A}(E_{ij}E_{kl}) = \mathcal{A}(E_{il}\delta_{jk}) = \mathcal{A}(E_{kl}E_{ij}) = \mathcal{A}(E_{kj}\delta_{il}).$$

在上式中令 $k = j = 1$, 可得对任意 $i \neq l$, 有 $\mathcal{A}(E_{il}) = \mathcal{A}(0) = 0$. 再令 $i = l \neq j = k$, 可得 $\mathcal{A}(E_{ii}) = \mathcal{A}(E_{jj}) = \lambda$, 其中 $\lambda = \mathcal{A}(E_{11})$. 故对任意 $A = (a_{ij})_{n \times n} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}E_{ij} \in \mathbb{F}^{n \times n}$, 由 $\mathcal{A}$ 线性可得

$$\mathcal{A}(A) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}\mathcal{A}(E_{ij}) = \sum_{i=1}^n a_{ii}\mathcal{A}(E_{ii}) = \lambda \sum_{i=1}^n a_{ii} = \lambda \text{tr } A.$$

因此 $\mathcal{A} = \lambda \text{tr}$, 其中 $\lambda = \mathcal{A}(E_{11}) \in \mathbb{F}$. 这样我们就完成了证明. □

习题 5.8: P211 Ex 5.3.4

设 U 与 V 分别是数域 $\mathbb{F}$ 上 m 维与 n 维线性空间. 取定 $\alpha \in U$. 将所有满足 $\mathcal{A}(\alpha) = 0$ 的线性映射 $\mathcal{A}: U \rightarrow V$ 的集合记为 K . 证明: K 在线性映射的加法以及纯量与线性映射的乘法下成为数域 $\mathbb{F}$ 上线性空间. 求 $\dim K$.

证明

对 $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in K, \lambda, \mu \in \mathbb{F}$, 有 $(\lambda\mathcal{A} + \mu\mathcal{B})(\alpha) = \lambda\mathcal{A}(\alpha) + \mu\mathcal{B}(\alpha) = 0$, 因此 $\lambda\mathcal{A} + \mu\mathcal{B} \in K$. 且显然零映射也属于 K , 故 K 是所有 $U \rightarrow V$ 线性映射构成的线性空间的子空间, 所以它是一个线性空间.

当 $\alpha = 0$ 时, K 为所有 $U \rightarrow V$ 线性映射构成的集合, 故此时 $\dim K = mn$. 当 $\alpha \neq 0$ 时, 记 α 为 α_1 , 并将其扩充为 U 的一组基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$. 取 V 的一组基 $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$. 对任意 $\xi = \sum_{s=1}^m b_s \alpha_s \in U$ 定义 $\mathcal{E}_{ij}(\xi) = b_i \beta_j, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$. 这些映射构成所有 $U \rightarrow V$ 线性映射的一组基.

令 $\mathcal{B} = \{\mathcal{E}_{ij} : 2 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$, 下面证明 $\mathcal{B}$ 是 K 的一组基。由 $\mathcal{E}_{ij}(\alpha_1) = 0, i \neq 1$ 可知 $\mathcal{B} \subseteq K$, 并且 $\mathcal{B}$ 是线性无关的。对任意 $\mathcal{A} \in K$, 存在 $c_{ij} \in \mathbb{F}$ 使得 $\mathcal{A} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \mathcal{E}_{ij}$. 于是由 $\mathcal{A}(\alpha_1) = 0$ 可得

$$0 = \mathcal{A}(\alpha_1) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \mathcal{E}_{ij}(\alpha_1) = \sum_{j=1}^n c_{1j} \beta_j.$$

由于 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 线性无关, 故 $c_{11} = c_{12} = \dots = c_{1n} = 0$, 从而 $\mathcal{A} = \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \mathcal{E}_{ij}$ 可由 $\mathcal{B}$ 线性表示。于是 $\mathcal{B}$ 是 K 的一组基, 故此时 $\dim K = (m-1)n$. $\square$

习题 5.9: P219 Ex 5.4.2

取 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$. 定义线性映射 $\mathcal{A} : \mathbb{C}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{C}^{2 \times 2}$ 如下: 设 $X \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$, 则令 $\mathcal{A}(X) = AX$. 求 $\rho(\mathcal{A})$.

解答

容易验证 $\mathcal{A}(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}) = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})M$, 其中

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

容易看出 $\text{rank } M = 2$. 从而可以得到 $\rho(\mathcal{A}) = 2$.

习题 5.10: P219 Ex 5.4.3

设 $\mathcal{A} : V \rightarrow V$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上 n 维线性空间 V 到自身的线性映射, 且 $\rho(\mathcal{A}^2) = \rho(\mathcal{A})$. 证明: $\text{Im}(\mathcal{A}) \cap \text{Ker}(\mathcal{A}) = \{0\}$.

证明

由 $\rho(\mathcal{A}) = \rho(\mathcal{A}^2)$ 可知 $\nu(\mathcal{A}) = n - \rho(\mathcal{A}) = n - \rho(\mathcal{A}^2) = \nu(\mathcal{A}^2)$. 又 $\text{Ker}(\mathcal{A}) \subseteq \text{Ker}(\mathcal{A}^2)$, 故 $\text{Ker}(\mathcal{A}) = \text{Ker}(\mathcal{A}^2)$. 令 $\alpha \in \text{Im}(\mathcal{A}) \cap \text{Ker}(\mathcal{A})$, 则存在 $\beta \in V$ 使得 $\alpha = \mathcal{A}(\beta)$ 且 $\mathcal{A}(\alpha) = 0$, 进而可知 $\mathcal{A}^2(\beta) = 0$. 因此 $\beta \in \text{Ker}(\mathcal{A}^2) = \text{Ker}(\mathcal{A})$, 即 $\alpha = \mathcal{A}(\beta) = 0$. 故 $\text{Im}(\mathcal{A}) \cap \text{Ker}(\mathcal{A}) = \{0\}$. $\square$