

李代数及其表示理论作业

2026 年春季学期

Mirage

2026 · 07 · 17

目录

1	2026 春作业解答	1
1.1	Homework 1	1
1.2	Homework 2	1
1.3	Homework 3	2
1.4	Chapter V 补充题	3

第1章

2026 春作业解答

1.1 Homework 1

Exercise 1.1

Let $\mathcal{A}$ be a 3-dimensional associative algebra over $\mathbb{C}$, and let $\mathcal{A}^-$ denote the Lie algebra with the same underlying vector space and bracket $[x, y] \triangleq xy - yx$. Prove that $\mathcal{A}^-$ is not isomorphic to the Lie algebra $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.

证明. 反证, 若 $\mathcal{A}^- \cong \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. 则对每个 $a \in \mathcal{A}$, 我们定义左乘算子 $L_a : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$, $L_a(x) = ax$. 从而 $L : \mathcal{A} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(\mathcal{A})$, $a \mapsto L_a$ 是一个结合代数同态, 因此对任意 $a, b \in \mathcal{A}$, 有 $L_{[a, b]} = L_{ab - ba} = L_a L_b - L_b L_a = [L_a, L_b]$. 故 $\text{tr}(L_{[a, b]}) = \text{tr}([L_a, L_b]) = 0$. 于是对任意 $x \in [\mathcal{A}, \mathcal{A}]$, 都有 $\text{tr}(L_x) = 0$. 另一方面, 由 $\mathcal{A}^- \cong \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ 知 $[\mathcal{A}, \mathcal{A}] \cong [\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}), \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})]$. 而由 Example 2.5 可得 $[\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}), \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})] = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. 故有 $[\mathcal{A}, \mathcal{A}] = \mathcal{A}$. 因此对任意 $x \in \mathcal{A}$, 都有 $\text{tr}(L_x) = 0$. 又设 $e, f, h \in \mathcal{A}$ 对应于 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ 的标准基, 满足 $[h, e] = 2e$. 而 $\text{tr} L_h = \text{tr} L_h^2 = \text{tr} L_h^3 = 0$, 也即 $\text{tr} L_h = \text{tr} L_h^2 = \text{tr} L_h^3 = 0$. 因此 L_h 的三个特征值全为 0, 从而 L_h 幂零. 同时 $\text{Ker } L = \{x \in \mathcal{A} : x\mathcal{A} = 0\}$ 是 $\mathcal{A}^-$ 的 Lie 理想. 由于 $\mathcal{A}^- \cong \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ 是单 Lie 代数, 且 $\text{Ker } L \neq \mathcal{A}$, 所以 $\text{Ker } L = 0$. 特别地 $L_e \neq 0$. 但 $[L_h, L_e] = L_{[h, e]} = 2L_e$. 若 L_h 幂零, 则映射 $T \mapsto [L_h, T]$ 也是幂零的, 不可能有非零特征向量 L_e 对应非零特征值 2, 矛盾. $\square$

1.2 Homework 2

Definition 1.1 (Witt algebra)

The Witt algebra, denoted by $\mathcal{W}$, is an infinite-dimensional Lie algebra over $\mathbb{C}$ with basis $\{L_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$. The Lie brackets are defined by $[L_m, L_n] = (n - m)L_{m+n}$ for all $m, n \in \mathbb{Z}$. We have the Lie algebra isomorphism $\mathcal{W} \cong \text{Der}(\mathbb{C}[t, t^{-1}])$.

Exercise 1.2

For the Witt algebra $\mathcal{W}$, find $\text{Inn}(\mathcal{W})$ and $\text{Der}(\mathcal{W})$.

解. 首先我们证明 $\text{Der}(\mathcal{W}) = \text{Inn}(\mathcal{W})$. 设 $D \in \text{Der}(\mathcal{W})$. 先令 $D(L_0) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i L_i$, 其中只有有限多个 a_i 非零. 而对任意 $n \in \mathbb{Z}$, 由 $[L_0, L_n] = nL_n$ 可得 $nD(L_n) = [D(L_0), L_n] + [L_0, D(L_n)]$. 接

下来再令 $D(L_n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_{n,k} L_k$. 从而由 $[L_i, L_n] = (n-i)L_{i+n}$ 与 $[L_0, L_k] = kL_k$, 我们可以得到 $[D(L_0), L_n] = \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i(n-i)L_{i+n}$, $[L_0, D(L_n)] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} kb_{n,k}L_k$. 带入最初的等式并比较每个 L_k 的系数可得 $(n-k)b_{n,k} = a_{k-n}(2n-k)$. 当 $k \neq n$ 时, 我们令 $i = k-n$, 则 $b_{n,n+i} = -a_i(n-i)/i$. 而当 $k = n$ 时, 上式右边变为 a_0n , 左边为 0, 从而 $a_0 = 0$. 故 $D(L_n) = c_n L_n - \sum_{i \neq 0} (a_i/i)(n-i)L_{n+i}$, 其中 $c_n := b_{n,n}$. 现在令 $u = \sum_{i \neq 0} (a_i/i)L_i$, 则 $\text{ad } u(L_n) = [u, L_n] = \sum_{i \neq 0} (a_i/i)(n-i)L_{n+i}$. 因此对 $D_1 := D + \text{ad } u$, 有 $D_1(L_n) = c_n L_n$ 对所有 $n \in \mathbb{Z}$ 成立. 故我们可以不妨设 $D(L_n) = c_n L_n$.

对 $[L_m, L_n] = (n-m)L_{m+n}$ 两边施加 D . 若 $m \neq n$, 则有 $(n-m)c_{m+n}L_{m+n} = D([L_m, L_n]) = [D(L_m), L_n] + [L_m, D(L_n)] = (c_m + c_n)(n-m)L_{m+n}$. 故 $c_{m+n} = c_m + c_n, m \neq n$. 则可得 $c_n + c_{-n} = c_0 = 0, \forall n \in \mathbb{Z}$ 以及 $c_{n+1} = c_n + c_1, n \neq 1$. 于是对 $n \geq 2$ 有 $c_n = (n-2)c_1 + c_2$. 而 $c_1 = c_2 + c_{-1}$, 故 $c_2 = 2c_1$, 从而易得 $c_n = nc_1, \forall n \in \mathbb{Z}$. 于是取 $v = c_1 L_0$, 则 $\text{ad } v(L_n) = nc_1 L_n = c_n L_n$, 故 $D = \text{ad } v$ 是内导子. 因此每个导子都是内导子, 即 $\text{Der}(\mathcal{W}) = \text{Inn}(\mathcal{W})$.

而映射 $\mathcal{W} \rightarrow \text{Inn}(\mathcal{W}), x \mapsto \text{ad } x$ 是 Lie 代数同态, 若 $\text{ad } x = 0$, 则 $[x, L_n] = 0, \forall n \in \mathbb{Z}$, 则由 Witt 代数定义易知只有 $x = 0$, 故该同态是单射, 同时显然是满射, 从而 $\mathcal{W} \cong \text{Inn}(\mathcal{W})$. 这样就证明了 $\text{Der}(\mathcal{W}) = \text{Inn}(\mathcal{W}) \cong \mathcal{W}$.

1.3 Homework 3

Exercise 1.3

For $\lambda \in \mathbb{C}$, Let $V_\lambda = \mathbb{C}[t]$ and $L = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) = \mathbb{C}x \oplus \mathbb{C}h \oplus \mathbb{C}y$ such that

$$[h, x] = 2x, [h, y] = -2y, [x, y] = h.$$

Define the action of L on V_λ as

$$y.t^k = t^{k+1}, h.t^k = (\lambda - 2k)t^k, x.t^k = k(\lambda - k + 1)t^{k-1}$$

for $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, then we have

- (1) V_λ is an L -module.
- (2) V_λ is a highest weight L -module with the highest weight λ .
- (3) V_λ is irreducible if and only if $\lambda \notin \mathbb{Z}_{\geq 0}$.
- (4) If $\lambda = m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, then V_m has a unique nonzero proper submodule J_m such that

$$J_m = \bigoplus_{i=m+1}^{\infty} \mathbb{C}t^i \cong V_{-m-2}, \quad V_m/J_m \cong V(m).$$

证明. (1) 只验证定义第三条即可, 先看 $[h, x]$, 当 $k = 0$ 时有 $[h, x].1 = 2x.1 = 0 = h.(x.1) - x.(h.1)$. 而当 $k \geq 1$ 时有 $h.(x.t^k) = k(\lambda - k + 1)(\lambda - 2k + 2)t^{k-1}$, $x.(h.t^k) = (\lambda - 2k)k(\lambda - k + 1)t^{k-1}$, 故 $[h, x].t^k = 2x.t^k = 2k(\lambda - k + 1)t^{k-1} = h.(x.t^k) - x.(h.t^k)$.

再来看 $[h, y]$, 对任意 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 有 $h.(y.t^k) = h.t^{k+1} = (\lambda - 2k - 2)t^{k+1}$, $y.(h.t^k) = (\lambda - 2k)t^{k+1}$, 故 $[h, y].t^k = -2y.t^k = -2t^{k+1} = h.(y.t^k) - y.(h.t^k)$.

最后看 $[x, y]$, 对任意 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 有 $x.(y.t^k) = x.t^{k+1} = (k+1)(\lambda - k)t^k$, $y.(x.t^k) = k(\lambda - k + 1)t^k$, 故 $[x, y].t^k = h.t^k = (\lambda - 2k)t^k = x.(y.t^k) - y.(x.t^k)$. 于是 V_λ 为 L -模。

(2) 对 $t^0 = 1$ 有 $x.1 = 0$, 且 $h.1 = \lambda.1$, 又由于 $y.t^k = t^{k+1}$, 对 1 不断作用 y 便得到全部 $t^k, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$,

即 V_λ 可由 1 生成, 故 1 是一个最高权向量, 最高权为 λ . 故 V_λ 是最高权为 λ 的最高权 L -模。

(3) 先设 $\lambda \notin \mathbb{Z}_{\geq 0}$. 这时对每个 $k \geq 1$, 系数 $k(\lambda - k + 1) \neq 0$, 故 $x.t^k$ 总是 t^{k-1} 的非零倍数. 设 $0 \neq M \subseteq V_\lambda$ 是子模, 取 $f(t) \in M$ 非零, 设 $\deg f = d \geq 0$, 反复作用 x , 每次次数下降 1 且首项系数不会变为 0, 因此可得 $1 \in M$. 而由 (2) 有 1 生成整个 V_λ , 故 $M = V_\lambda$. 所以 V_λ 不可约。

反之, 若 $\lambda = m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, 则 $x.t^{m+1} = (m+1)(m - (m+1) + 1)t^m = 0$. 于是 $J_m := \bigoplus_{i=m+1}^{\infty} \mathbb{C}t^i$ 在 x 作用下稳定, 且它在 y, h 作用下显然也稳定, 故 J_m 是非零真子模, 则 V_m 可约. 结论成立。

(4) 先证 J_m 是唯一的非零真子模. 首先由 (3) 知 $J_m = \bigoplus_{i=m+1}^{\infty} \mathbb{C}t^i$ 是一个非零真子模, 设 $0 \neq M \subseteq V_m$ 是任一真子模, 取 $0 \neq f(t) \in M$, 设 $\deg f = d \geq 0$. 若 $d \leq m$, 则反复作用 x 可得 $1 \in M$, 由 (2) 得 $M = V_m$, 矛盾. 因此 M 中每个非零多项式次数都 $\geq m+1$. 取其中次数最小的非零多项式 $g(t) \in M$. 若 $\deg g > m+1$, 则 $x.(g(t)) \neq 0$ 且次数减一, 与 $g(t)$ 次数最小矛盾, 故 $d = m+1$. 不妨设 g 首一, 即 $g(t) = t^{m+1} + a_m t^m + \cdots + a_1 t + a_0$. 对 $g(t)$ 施加 $\prod_{k=0}^m (h - (m - 2k))$, 则得到的多项式中次数小于等于 m 的项的系数均为 0, 仅 t^{m+1} 的系数不为 0. 于是得到 $t^{m+1} \in M$. 再作用 y 得 $t^{m+2}, t^{m+3}, \dots$ 都在 M 中, 故 $J_m \subseteq M$. 又由 M 中没有次数 $\leq m$ 的非零多项式, 则 M 中任意非零多项式都不含次数 $\leq m$ 的项, 否则由 $t^{m+1}, t^{m+2}, \dots \in M$ 得到矛盾. 所以 $M \subseteq J_m$. 因此 $M = J_m$. 故 $\lambda = m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 时, V_m 恰有唯一非零真子模 J_m .

再证 $J_m \cong V_{-m-2}$. 定义 $\phi: V_{-m-2} \rightarrow J_m, t^k \mapsto t^{m+1+k}$. 它显然是线性同构, 证其保持 L 作用即可. 我们有 $\phi(x.t^k) = k(-m-2-k+1)t^{m+k} = -k(m+k+1)t^{m+k} = (m+1+k)(m-(m+1+k)+1)t^{m+k} = x.\phi(t^k)$, 并且 $\phi(y.t^k) = \phi(t^{k+1}) = t^{m+2+k} = y.\phi(t^k)$, 以及 $\phi(h.t^k) = (-m-2-2k)t^{m+1+k} = (m-2(m+1+k))t^{m+1+k} = h.\phi(t^k)$. 于是 ϕ 是 L -模同构, 因此 $J_m \cong V_{-m-2}$.

最后看商模 V_m/J_m . 它由 $\overline{t^0}, \dots, \overline{t^m}$ 生成, 故维数为 $m+1$. 且 $L = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ 在其上的作用为 $s.\overline{t^k} = \overline{s.t^k}, \forall s \in L$. 设 $(v_0, v_1, \dots, v_m)$ 是 Lemma 7.4 中定义的 $V(m)$ 的基, 且约定 $v_{-1} = v_{m+1} = 0$, 令 $w_k = k! \cdot v_k, -1 \leq k \leq m+1$, 则 $(w_0, w_1, \dots, w_m)$ 仍为 $V(m)$ 的基. 则有线性同构 $\varphi: V_m/J_m \rightarrow V(m), \overline{t^k} \mapsto w_k, 0 \leq k \leq m$. 下面验证其保持 L 作用, 我们有 $\varphi(x.\overline{t^k}) = k(m-k+1)w_{k-1} = k!(m-k+1)v_{k-1} = x.\varphi(\overline{t^k})$, 并且 $\varphi(y.\overline{t^k}) = w_{k+1} = y.\varphi(\overline{t^k})$, 以及 $\varphi(h.\overline{t^k}) = (m-2k)w_k = h.\varphi(\overline{t^k})$. 于是 φ 是 L -模同构, 因此 $V_m/J_m \cong V(m)$. $\square$

1.4 Chapter V 补充题

Exercise 1.4

记 $L = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, 标准基为 x, y, h . 令 $\Omega = 4yx + (h+1)^2$. 证明如下结论:

- (1) $\Omega \in \mathcal{Z}(\mathcal{U}(L))$, 即 $\forall t \in \mathcal{U}(L), \Omega t = t\Omega$.
- (2) $\mathcal{Z}(\mathcal{U}(L)) = \mathbb{C}[\Omega]$. (此问较难)
- (3) $\Omega|_{V(m)} = (m+1)^2 \text{Id}_{V(m)}$.