第 2 章 习题课讲义

2.1 第一次习题课

2.1.1 第一章复习与补充知识

向量的运算

¶ 向量的线性运算

向量的**线性运算**包括向量的加法和数乘运算，满足以下性质：

(1) 加法交换律：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$

(2) 加法结合律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$

(3) 分配律 1：$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$

(4) 分配律 2：$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$

(5) 零向量：$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\boldsymbol{a}$

(6) 负向量：$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\mathbf{0}$

(7) 乘法结合律：$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$

(8) $1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$

事实上，不止对于数组空间，对于一般的集合，我们可以更广泛地定义加法和数乘，只要它们满足以上的性质，就将这样的集合 + 运算称为**线性空间**，而我们通过数组空间得到的性质可类推到一般的线性空间，详细内容会在第五章学习到。特别地，我们记 n 维数组空间为 $\mathbb{K}^n$，它包含了分量定义在数域 $\mathbb{F}$ 上的所有 n 维数组向量。有了向量的加法与数乘运算，我们可以便定义线性组合，并引出线性相关、线性无关的定义：

定义 2.1 (线性组合)

给定一个向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,...,\boldsymbol{\alpha}_m\in K^n$，任给一组数 $k_1,k_2,...,k_m\in K$，可以得到一个向量 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_1\boldsymbol{\alpha}_1+...+k_m\boldsymbol{\alpha}_m$，称这个向量为给定向量组的一个线性组合，其中 $k_1,k_2,...,k_m$ 称为组合系数.

对于 $\boldsymbol{\beta}\in K^n$，如果存在 K 中一组数 $c_1,c_2,...,c_m$ 使得 $\boldsymbol{\beta}=c_1\boldsymbol{\alpha}_1+c_1\boldsymbol{\alpha}_1+...+c_m\boldsymbol{\alpha}_m$，则称 $\boldsymbol{\beta}$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,...,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示. ♣

从线性组合的定义出发，我们可以给出 n 元线性方程组的另一种表达形式：将方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n=b_2\\ \quad\vdots\qquad\quad\vdots\qquad\qquad\quad\vdots\qquad\quad\vdots\\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+...+a_{sn}x_n=b_s \end{cases}\tag{2.1}$$

关于未知数 $x_i(i=1,2,...,n)$ 前的系数组记为列向量 $\boldsymbol{\alpha}_i=(a_{1i},a_{2i},...,a_{si})^T$，记 $\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,...,b_s)^T$，则方程组改写为

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+...+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{\beta}\tag{2.2}$$

从而我们得到以下等价命题：

命题 2.1

1. 线性方程组有解 $\Longleftrightarrow$ 常数项列向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由系数矩阵的列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,...,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示
2. 求线性方程组的解 $\Longleftrightarrow$ 求满足线性组合 $\boldsymbol{\beta}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+...+x_n\boldsymbol{\alpha}_n$ 的组合系数 ♠

这使得我们可以直接通过方程组的系数和常数项来研究方程组的解，后续我们会由此角度学习张成子空间、秩、解空间、基与维数等概念。

定义 2.2 (线性相关、线性无关)

K^n 中向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, ..., \boldsymbol{\alpha}_s (s \geq 1)$ 称为是线性相关的，如果 K 中存在不全为零的数 $k_1, ..., k_s$ 使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + ... + k_s\boldsymbol{\alpha}_s = 0$. 否则，称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, ..., \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关

命题 2.2 (一些性质)

1. 包含零向量的向量组一定线性相关 $(1 \cdot \mathbf{0} + 0\boldsymbol{\alpha}_2 + ... + 0\boldsymbol{\alpha}_s = \mathbf{0})$

2. 单个向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 线性相关的充要条件为 $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$

3. 多于一个向量的向量组线性相关 $\iff$ 其中至少有一个向量可以由其余向量线性表示[a]

证明 必要性：设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, ..., \boldsymbol{\alpha}_s (s \geq 2)$ 线性相关，则存在不全为零的一组数 $k_1, k_2, ..., k_s$ 使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + ... + k_s\boldsymbol{\alpha}_s = 0$. 设 $k_i \neq 0$，则 $\boldsymbol{\alpha}_i = -\frac{k_1}{k_i}\boldsymbol{\alpha}_1 - ... - \frac{k_{i-1}}{k_i}\boldsymbol{\alpha}_{i-1} - \frac{k_{i+1}}{k_i}\boldsymbol{\alpha}_{i+1} - ... - \frac{k_s}{k_i}\boldsymbol{\alpha}_s$.

充分性：设 $\boldsymbol{\alpha}_j$ 可由其他向量线性表示：$\boldsymbol{\alpha}_j = l_1\boldsymbol{\alpha}_1 + ... + l_{j-1}\boldsymbol{\alpha}_{j-1} + l_{j+1}\boldsymbol{\alpha}_{j+1} + ... + l_s\boldsymbol{\alpha}_s$，则移项得 $l_1\boldsymbol{\alpha}_1 + ... + l_{j-1}\boldsymbol{\alpha}_{j-1} - \boldsymbol{\alpha}_j + l_{j+1}\boldsymbol{\alpha}_{j+1} + ... + l_s\boldsymbol{\alpha}_s = \mathbf{0}$，从而向量组线性相关

4. 如果向量组中的一部分向量线性相关，那么整个向量组也线性相关；如果向量组线性无关，那么其中任选的部分向量也线性无关

5. 如果向量组线性无关，则给每个向量对应位置各添上 m 个分量得到的延伸组也线性无关；如果 n 维向量组线性相关，则每个向量对应位置各去掉 $m(m < n)$ 个分量得到的缩短组也线性相关

[a] 我们的教材采用这种方式定义线性相关

例题 2.1（丘维声《高等代数》上册 P87） 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, ..., \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，则向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1, ..., \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示的充分必要条件为 $\boldsymbol{\alpha}_1, ..., \boldsymbol{\alpha}_s, \boldsymbol{\beta}$ 线性相关。

证明 必要性由性质 3 是显然的。

充分性：设 $\boldsymbol{\alpha}_1, ..., \boldsymbol{\alpha}_s, \boldsymbol{\beta}$ 线性相关，则存在 K 中不全为 0 的数 $k_1, ..., k_s, l$ 使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + ... + k_s\boldsymbol{\alpha}_s + l\boldsymbol{\beta} = 0 \tag{2.3}$$

若 $l = 0$，则 $k_1, ..., k_s$ 不全为 0，且由式 (2.3) 得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + ... + k_s\boldsymbol{\alpha}_s = 0$，从而 $\boldsymbol{\alpha}_1, ..., \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，与已知条件矛盾，因此 $l \neq 0$，从而由式 (2.3) 得

$$\boldsymbol{\beta} = -\frac{k_1}{l}\boldsymbol{\alpha}_1 - ... - \frac{k_s}{l}\boldsymbol{\alpha}_s \tag{2.4}$$

证毕。

推论 2.1

设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, ..., \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，则向量 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1, ..., \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示的充分必要条件为 $\boldsymbol{\alpha}_1, ..., \boldsymbol{\alpha}_s, \boldsymbol{\beta}$ 线性无关。

例题 2.2（教材第一章习题 4） 证明：三维空间中四个或四个以上的向量一定线性相关

证明 只需证四个向量一定线性相关。

任取四个三维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$，若其中可以挑出三个向量线性相关，则命题已证，否则，任意三个向量均线性无关，我们选择向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$，由于它们线性无关，则它们不共面，由教材定理 **1.2.1** 得 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 可由这三个向量唯一线性表示，即这四个三维向量线性相关。

证毕。

笔记 教材的定理 **1.2.1** 给出了三维空间基的性质，具有推广意义。

定义 2.3

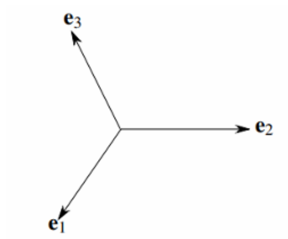
$V \subset K^n$ 为子空间.V 中一组向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, ..., \boldsymbol{\alpha}_s$ 称为 V 的一组基，如果它满足：

1. 对任意向量 $\boldsymbol{\beta} \in V$，可以表示为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, ..., \boldsymbol{\alpha}_s$ 的线性组合 $\boldsymbol{\beta} = x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + ... + x_s\boldsymbol{\alpha}_s$.
2. $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, ..., \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关.

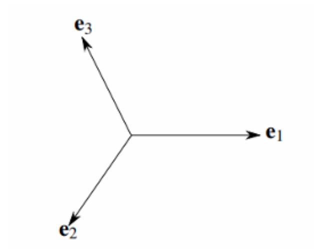
称 $(x_1, x_2, ..., x_s)$ 为向量 $\boldsymbol{\beta}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, ..., \boldsymbol{\alpha}_s$ 下的坐标.

特别地，当我们在三维空间选定了一组基：$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$，并确定了坐标原点 $\mathbf{O}$，根据它们的空间排列方式可以定义右手系和左手系.

♣



(a) 右手系



(b) 左手系

¶ 三维向量的数量积、向量积

定义 2.4 (数量积)

两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积为一个实数，记为 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$. 设 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，则

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|cos\theta \tag{2.5}$$

在直角坐标系下 (基中的向量两两垂直)，两向量的数量积等于对应坐标分量相乘再求和：

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = (a_1, a_2, a_3) \cdot (b_1, b_2, b_3) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \tag{2.6}$$

数量积又称内积、点乘。

♣

内积满足以下性质 (取向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 及实数 λ)：

(1) **对称性**：$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$

(2) **线性性**：$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}$

$(\lambda\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} = \lambda(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \cdot (\lambda\boldsymbol{b})$

(3) **正定性**：$\boldsymbol{a}^2 = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} \geq 0$，等号在 $\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$ 时成立

事实上，除向量的数量积外，只要满足上述三个性质的运算都可以称为内积运算，定义了内积运算的线性空间称为**欧几里得空间**，第七章内积空间将会对其详细研究。

定义 2.5 (外积、叉乘)

两个三维向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ 为一个三维向量，它与 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 垂直且按序 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ 构成右手系，它的模为以 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 为边的平行四边形面积：

$$|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|sin\theta \tag{2.7}$$

在直角坐标系下，两向量的向量积可由坐标如下表示：

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (a_1, a_2, a_3) \times (b_1, b_2, b_3) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) \tag{2.8}$$

向量积又称外积、叉乘。

♣

向量积满足以下性质 (取向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 及实数 λ)：

(1) **反身性**：$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$

(2) **线性性**：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$

$(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})$

三个向量的混合积 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ 和二重外积 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$ 由数量积、向量积组合而成，当我们熟悉掌握了数量积和向量积的计算后，关于混合积和二重外积相关性质的推导是容易的。我们将部分性质列举如下：

(1) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}$

(2) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=-(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{c}$

(3) $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 中任意两个平行时，混合积为 0

(4) 在直角坐标系下，有

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}$$

(5)$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}$

¶ 求和约定与张量引入（本小节参考潘海俊老师《电动力学》讲义）

上一个小节中的向量运算有的按照坐标写开会有很长一串 (如三阶行列式)，我们是否有办法简化写法？答案是肯定的。

定义 2.6 (Einstein 求和约定)

[a] 若同一指标在同一单项式中重复出现，则默认对其求和 (即可以省略求和符号)，这样的求和指标称为哑指标，其他指标称为自由指标。

例如，我们可以用 a_ib_i 表示向量点乘 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，这是因为

$$a_ib_i=\sum_{i=1}^{3}a_ib_i=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\tag{2.9}$$

可见，i 在例中即为哑指标，我们通过这样的约定将点乘结果的三项求和形式上写为了一项。

[a] 爱因斯坦写论文时用到很多求和公式，他懒得写求和号，所以给出了这项约定

♣

关于指标的一些性质：

(1) 哑指标可替换为任意其他字母，例如：$a_ib_i=\sum_{i=1}^{3}a_ib_i=\sum_{j=1}^{3}a_jb_j=a_jb_j$

(2) 等式两边的自由指标可同时替换为不引起混淆的其他字母，例如：设 A、B 为同阶方阵，则对二者乘积 AB 有 $(AB)_{ij}=A_{ik}B_{kj}$，也可以替换自由指标，写为 $(AB)_{mn}=A_{mk}B_{kn}$

(3) 计算的最终结果不会含有哑指标，但会保留自由指标

定义 2.7 (Kronecker 符号)

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}\tag{2.10}$$

♣

定义 2.8 (Levi-Civita 符号)

$$\epsilon_{ijk}=\begin{cases}+1, & (ijk)=(123),(231)or(312)\\ -1, & (ijk)=(132),(213)or(321)\\ 0, & otherwise\end{cases}\tag{2.11}$$

♣

两个符号满足下面的等式 (感兴趣的同学可以自行验证):

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{mnk} = \delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm} \tag{2.12}$$

有了这两个符号及求和约定，我们便可以告别向量运算的冗长展开式，并为引入张量做好了铺垫。下面来看一些例子：

例题 2.3 设 $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3$ 分别为右手直角坐标系 x, y, z 轴对应的单位向量，它们两两之间点乘和叉乘有什么性质？

容易证明，$\hat{x}_i \cdot \hat{x}_j = \delta_{ij}$，$\hat{x}_i \times \hat{x}_j = \epsilon_{ijk}\hat{x}_k$

例题 2.4 数量积、向量积、混合积与二重外积

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_i b_i = a_i b_j \delta_{ij} \tag{2.13}$$

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = a_i \hat{x}_i \times b_j \hat{x}_j = a_i b_j \hat{x}_i \times \hat{x}_j = \epsilon_{ijk} a_i b_j \hat{x}_k \tag{2.14}$$

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \epsilon_{ijk} a_i b_j \hat{x}_k \cdot c_m \hat{x}_m = \epsilon_{ijk} a_i b_j c_m \delta_{km} = \epsilon_{ijk} a_i b_j c_k \tag{2.15}$$

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = \epsilon_{ijk} a_i b_j \hat{x}_k \times c_m \hat{x}_m = \epsilon_{ijk}\epsilon_{kmn} a_i b_j c_m \hat{x}_n = \epsilon_{ijk}\epsilon_{mnk} a_i b_j c_m \hat{x}_n \tag{2.16}$$

例题 2.5 证明：$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{a}$

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} &= \epsilon_{ijk}\epsilon_{mnk} a_i b_j c_m \hat{x}_n \\
&= (\delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}) a_i b_j c_m \hat{x}_n \\
&= a_m b_n c_m \hat{x}_n - a_n b_m c_m \hat{x}_n \\
&= (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{a}
\end{aligned} \tag{2.17}$$

例题 2.6（教材例 1.5.2） 证明：$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{d}) - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{d})(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})$

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}) &= \epsilon_{ijk} a_i b_j \hat{x}_k \cdot \epsilon_{mnp} c_m d_n \hat{x}_p \\
&= \epsilon_{ijk}\epsilon_{mnp} a_i b_j c_m d_n \delta_{kp} \\
&= \epsilon_{ijk}\epsilon_{mnk} a_i b_j c_m d_n \\
&= (\delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}) a_i b_j c_m d_n \\
&= a_i b_j c_i d_j - a_i b_j c_j d_i \\
&= (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{d}) - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{d})(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})
\end{aligned} \tag{2.18}$$

例题 2.7（教材习题 1.15(1)） 证明：$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2 - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2$

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})^2 &= (\epsilon_{ijk} a_i b_j \hat{x}_k)^2 \\
&= (\epsilon_{ijk} a_i b_j)^2 \\
&= \sum_{i \neq j} a_i^2 b_j^2 \\
&= \sum_{i,j=1}^{3} a_i^2 b_j^2 - a_i^2 b_i^2 \\
&= \boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2 - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2
\end{aligned} \tag{2.19}$$

定义 2.9 (二阶张量)

零阶张量为标量，它可以表示为一个数；一阶张量为矢量，它在选定了坐标系后可以写为列向量的形式，矢量 $\vec{f}$ 的完整表达式写为 $\vec{f} = f_i \hat{x}_i$；类似地，我们可以将二阶张量在选定的坐标系中写为矩阵的形式，张量 $\overleftrightarrow{T}$ 的完整表达式写为 $\overleftrightarrow{T} = T_{ij}\hat{x}_i\hat{x}_j$，其中 T_{ij} 为矩阵 T 的第 i 行第 j 列元素，$\hat{x}_i\hat{x}_j$ 是将两个矢量并写在一起的形式，称为并矢，它表示一个除第 i 行第 j 列元素为 1，其余元素均为 0 的矩阵。

矢量与并矢的点乘、叉乘满足就近法则，即

$$\vec{f}\cdot\vec{g}\vec{h}=(\vec{f}\cdot\vec{g})\vec{h},\qquad \vec{g}\vec{h}\cdot\vec{f}=\vec{g}(\vec{h}\cdot\vec{f}) \tag{2.20}$$

$$\vec{f}\times\vec{g}\vec{h}=(\vec{f}\times\vec{g})\vec{h},\qquad \vec{g}\vec{h}\times\vec{f}=\vec{g}(\vec{h}\times\vec{f}) \tag{2.21}$$

♣

例题 2.8 点乘

$$\vec{f}\cdot\overleftrightarrow{T}=(f_k\hat{x}_k)\cdot(T_{ij}\hat{x}_i\hat{x}_j)=(f_kT_{ij})(\hat{x}_k\cdot\hat{x}_i\hat{x}_j)=(f_iT_{ij})\hat{x}_j \tag{2.22}$$

$$\overleftrightarrow{T}\cdot\vec{f}=(T_{ij}f_j)\hat{x}_i \tag{2.23}$$

$$\overleftrightarrow{T}\cdot\overleftrightarrow{S}=(T_{ij}\hat{x}_i\hat{x}_j)\cdot(S_{kl}\hat{x}_k\hat{x}_l)=(T_{ij}S_{kl})(\hat{x}_i\hat{x}_j\cdot\hat{x}_k\hat{x}_l)=(T_{ij}S_{jl})\hat{x}_i\hat{x}_l \tag{2.24}$$

例题 2.9 叉乘

$$\vec{f}\times\overleftrightarrow{T}=(f_k\hat{x}_k)\times(T_{ij}\hat{x}_i\hat{x}_j)=(f_kT_{ij})(\hat{x}_k\times\hat{x}_i\hat{x}_j)=(\epsilon_{kil}f_kT_{ij})\hat{x}_l\hat{x}_j \tag{2.25}$$

$$\overleftrightarrow{T}\times\vec{f}=(\epsilon_{jkl}T_{ij}f_k)\hat{x}_i\hat{x}_l \tag{2.26}$$

二阶张量之间的叉乘涉及到更多的指标知识，在此不予赘述。

由例题 2.9 我们可以看到，叉乘的更广泛定义并非扩展到高维数组向量 (事实上，我们只在三维向量空间定义了叉乘运算)，而是推广到了高阶张量 (对应于更高维度的矩阵)。

类似二阶张量，我们可以给出更高阶张量的定义，它们对应着更高维度的矩阵。

等价关系与集合分拆

定义 2.10 (等价关系)

集合 A 上，满足以下三个条件的关系 $\sim$ 称为等价关系：

$$\forall a\in A, a\sim a;\quad (\text{自反}) \tag{2.27}$$

$$a\sim b\Rightarrow b\sim a;\quad (\text{对称}) \tag{2.28}$$

$$a\sim b, b\sim c\Rightarrow a\sim c.\quad (\text{传递}) \tag{2.29}$$

♣

例题 2.10 “朋友”、“年长”等关系不是等价关系；“同乡”、“同学”等关系是等价关系。

定义 2.11 (等价类)

集合 A 上定义了等价关系“$\sim$”，设 $a\in A$，称

$$\{b|b\in A, b\sim a\} \tag{2.30}$$

为等价类. 元素 a 称这个等价类的代表元. 由等价关系的传递性知，一个等价类中的任一元素均可称为这个等价类的代表元.

♣

定义 2.12 (集合的分拆)

设集合 A 的子集 $X_1, X_2, ..., X_n$ 满足

$$\bigcup_{i=1}^{n} X_i = A, \tag{2.31}$$

$$X_i\cap X_j=\emptyset,\quad for\quad i\neq j\quad and\quad i,j=1,2,...,n. \tag{2.32}$$

则称这些子集构成集合 A 的一个分拆.

♣

命题 2.3

集合的所有等价类构成一个分拆

命题 2.4

(1) 等价关系自反 $\Rightarrow \forall a \in A, \exists$ 等价类 $X_a, a \in X_a \Rightarrow \bigcup\limits_{a\in A} X_a = A$;

(2)$X_a \cap X_b \neq \emptyset \Rightarrow \exists c \in X_a \cap X_b \Rightarrow c \sim a, c \sim b \Rightarrow a \sim b \Rightarrow X_a = X_b$

另一方面，当我们得到了集合的一个分拆 $A = \bigcup\limits_i A_i$，那我们可以很容易定义一种等价关系：$a \sim b$ 当且仅当 a, b 同属一个 A_i，故我们推得：集合的分拆与定义在集合上的等价关系一一对应.

例题 2.11 本课程后续学习到的向量组等价、相抵关系、相似关系、相合关系都是等价关系，故我们可以根据它们分别给出集合的分拆方式。

求和符号的交换性

本节给出二重求和的一些交换性质，在今后关于行列式和矩阵乘法的相关证明中会涉及到

例题 2.12 当两个求和符号的上下限均为定值时，可直接交换求和号次序：

$$\sum_{i=k}^{l}\sum_{j=m}^{n} a_{ij} = \sum_{j=m}^{n}\sum_{i=k}^{l} a_{ij} \tag{2.33}$$

观察下方矩阵：

$$\begin{pmatrix} a_{k,m} & a_{k,m+1} & \cdots & a_{k,n} \\ a_{k+1,m} & a_{k+1,m+1} & \cdots & a_{k+1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{l,m} & a_{l,m+1} & \cdots & a_{l,n} \end{pmatrix} \tag{2.34}$$

式 (2.33) 的左边相当于先对矩阵每行元素求和，再将得到的结果求和；右边相当于先对矩阵每列元素求和，再将得到的结果求和。两种求和方式本质上都是对矩阵中所有元素求和，故二者相等。

有时我们直接使用一个求和符号来表示式 (2.33) 的双重求和：$\sum\limits_{k\leq i\leq l, m\leq j\leq n} a_{ij}$

例题 2.13 当一个求和号的上下限含有另一个求和号的指标时，交换求和号的同时需更改求和限：

$$\sum_{j=i}^{n}\sum_{l=j}^{n} a_{jl} = \sum_{l=i}^{n}\sum_{j=i}^{l} a_{jl} \tag{2.35}$$

其中 $i = 1, 2, ..., n$.

取定 $i \in \{1, 2, ..., n\}$，有下方矩阵：

$$\begin{pmatrix} a_{i,i} & a_{i,i+1} & \cdots & a_{i,n} \\ 0 & a_{i+1,i+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \tag{2.36}$$

这个矩阵是一个上三角阵，式 (2.35) 的左边相当于先对矩阵每行元素求和，再将得到的结果求和；右边相当于先对矩阵每列元素求和，再将得到的结果求和。两种求和方式本质上都是对矩阵中所有元素求和，故二者相等。

有时我们直接使用一个求和符号来表示式 (2.35) 的双重求和：$\sum\limits_{i\leq j\leq l\leq n} a_{jl}$

从上面两个例子我们可以看到，使用矩阵来观察并证明二重求和的相关性质是非常直观的。有了二重求和号的交换性质，我们可以很自然地推导出多重求和的交换性质，在此不做展开。

2.1.2 第二章复习与补充知识

线性方程组的 n, m, r 及解的情况判别

定义 2.13 (线性方程组的初等变换)

(1) 互换两方程位置;

(2) 用一个非零数乘某个方程;

(3) 把一个方程的倍数加到另一个方程上;

容易证明，经过一系列初等变换得到的方程组与原方程组同解。♣

定义 2.14 (线性方程组的系数矩阵与增广矩阵)

将线性方程组各未知数的系数按原本的次序排列为一张表，称为方程组的系数矩阵；系数矩阵最右边加上一列常数项构成一张表，称为方程组的增广矩阵 ♣

类似线性方程组的初等变换，我们可以定义矩阵的初等行变换：

定义 2.15 (矩阵的初等行变换)

(1) 互换矩阵两行;

(2) 用一个非零数乘某一行;

(3) 把一行的倍数加到另一行上. ♣

定义 2.16 (阶梯形矩阵)

满足以下性质的矩阵称阶梯形矩阵:

(1) 元素全为 0 的行 (称为零行) 在下方 (如果存在零行);

(2) 元素不全为 0 的行 (非零行) 从左起第一个不为 0 的元素称为主元，他们的列指标随着行指标的递增而严格增大。(由此易证主元的列指标大于等于其行指标)

可以证明，任意矩阵可通过初等行变换化为阶梯形矩阵 (即消元法的过程) ♣

有了以上的定义，我们来尝试给出有 $\boldsymbol{m}$ 个方程的 $\boldsymbol{n}$ 元线性方程组解的情况，方程组的增广矩阵可以写为:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \tag{2.37}$$

设我们通过一系列初等行变换，将增广矩阵化成了阶梯形矩阵:

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & a'_{1,p_1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a'_{1n} & a'_{1,n+1} \\ 0 & 0 & \cdots & a'_{2,p_2} & \cdots & \cdots & \cdots & a'_{2n} & a'_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & a'_{r,p_r} & \cdots & a'_{rn} & a'_{r,n+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \end{pmatrix} \tag{2.38}$$

这个矩阵有 r 个非零行[1]，从第 $(r+1)$ 行开始矩阵元素均为 0，我们将第 $i(1 \leq i \leq r)$ 个非零行的主元记为 a'_{i,p_i}，此时我们对 p_r 的取值做如下讨论:

(1)$\boldsymbol{p_r = n+1}$，这意味着 a'_{r,p_r} 即为 $a'_{r,n+1}$，此时阶梯矩阵的第 r 行代表着一个 "$0 = a'_{r,n+1}$" 的矛盾方程，则此

[1]注意，我们在这里定义的 r 与老师上课定义的 r 稍有区别，老师定义的 r 是系数阶梯矩阵的非零行个数，而这里定义的 r 是增广阶梯矩阵非零行的个数。相应的，老师定义的 r 即是系数矩阵的秩，而这里定义的 r 是增广矩阵的秩

时方程组**无解**。

(2)$\boldsymbol{p_r \leq n}$，由于 $r \leq p_r$，则 $r \leq n$，这时不存在矛盾方程，对应的方程组一定有解，我们分两种情形讨论：

(2.1)$\boldsymbol{r = n}$，此时对第 i 个主元有 $i = p_i$，即主元依次为 $a'_{11}, a'_{22}, \cdots, a'_{nn}$，可以看到，这样的阶梯矩阵对应的方程组没有自由未知量，从第 n 行向上依次求解可以得到方程组的唯一一组解。

(2.2)$\boldsymbol{r < n}$，这样的阶梯矩阵对应的方程组有 n 个未知量和 r 个有效方程，未知量多于有效方程个数，说明部分未知量为自由未知量，可作为参数任意变化，故可以得到无穷多个解。在下一小节我们将介绍这种情况下通解的形式。

注 当第 r 行主元的列指标 p_r 不为 $n+1$ 时，可以看到我们定义的 r 与老师定义的 r 是相等的，这也就是说: 线性方程组有解 $\Longleftrightarrow$ 它的增广矩阵的秩等于系数矩阵的秩。

无穷多解情况下方程的通解形式

方程组的增广矩阵化为阶梯形矩阵之后，若为 $r < n$ 的情况，方程组会有无穷多个解，下面我们来求它的通解形式：

我们将每个主元对应的未知数称为**主变量**，其余未知量称为**自由未知量**，可知自由未知量的个数为 $n-r$ 个。在阶梯形方程中，我们将所有自由未知量移项到等号右边，并将它们用参数 $t_1, t_2, \cdots, t_{n-r}$ 表示，这样，我们的 r 个主变量可以用常数和 $n-r$ 个参数表示出来：

$$\begin{pmatrix} x_{p_1} \\ x_{p_2} \\ \vdots \\ x_{p_r} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n-r} t_i \begin{pmatrix} \alpha_{p_1,i} \\ \alpha_{p_2,i} \\ \vdots \\ \alpha_{p_r,i} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_r \end{pmatrix} \tag{2.39}$$

而对于自由未知量，它们的取值就是各自对应的参数，从而我们得到了方程组含有参数 $t_1, t_2, \cdots, t_{n-r}$ 的通解，由于 $n-r$ 个参数可以任意取定，故方程组的解也是无穷多的。

例题 2.14 求解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 6 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 5 \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 11 \end{cases} \tag{2.40}$$

解 方程组的增广矩阵写为

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 5 & 6 \\ -3 & 2 & 1 & -4 & 5 \\ -1 & 3 & -2 & 1 & 11 \end{pmatrix} \tag{2.41}$$

经一系列矩阵初等行变换，它变成了阶梯形矩阵

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 & 1 & 11 \\ 0 & -7 & 7 & -7 & -28 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.42}$$

可见，主变量为 x_1, x_2，自由变量为 x_3, x_4，将它们设为参数 t_1, t_2，则方程组的通解可写为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t_1 + \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t_2 + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.43}$$

齐次线性方程组

定义 2.17 (齐次线性方程组)

常数项全为 0 的线性方程组称为齐次线性方程组，容易看出，$(0,0,\cdots,0)^T$ 是齐次线性方程组的一组解，称为零解，其余的解称为非零解。♣

由于一个齐次线性方程组必有零解，则它的解的情况只有唯一解和无穷多解两种，不存在无解情况。由上上小节的讨论我们可以看到：齐次线性方程组存在非零解的充要条件是它的系数矩阵经初等行变换化成的阶梯矩阵中非零行数目 $r<n$。

例题 2.15 下列说法正确的是：(D)

A. 线性方程组当未知量个数少于方程个数时无解

B. 齐次线性方程组当未知量个数少于方程个数时无解

C. 线性方程组当未知量个数多于方程个数时有解

D. 齐次线性方程组当未知量个数多于方程个数时有无限多个解