2.3 第三次习题课

2.3.1 基础矩阵与标准单位向量

定义 2.21

n 维标准列向量是指以下 n 个 n 维列向量

$$e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\cdots,e_n=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}.$$

♣

定义 2.22

n 阶基础矩阵是指 n^2 个 n 阶矩阵 $\{E_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)\}$. 其中 $E_{ij}\in\mathbb{F}^{n\times n}$, 它的第 (i,j) 元素是 1，其他元素为 0.

♣

性质 (1) $e_i^Te_j=0,e_i^Te_i=1$. 其中 $i\neq j$;
(2）若 $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$, 则 Ae_i 为 A 的第 i 个列向量；e_i^TA 为 A 的第 i 个行向量;
(3) 若 $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$, 则 $e_i^TAe_j=a_{ij}$;
(4)$E_{ij}E_{kl}=\delta_{jk}E_{il}$;
(5) 若 $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$, 则 $E_{ij}A$ 将 A 的第 j 行变成第 i 行，其他元素变为 0;
(6) 若 $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$, 则 AE_{ij} 将 A 的第 i 列变成第 j 列，其他元素变为 0.

习题 2.14

设

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\\1&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}.$$

证明：

$$A^k=\begin{pmatrix}0&I_{n-k}\\I_k&0\end{pmatrix}.$$

♠

证明 将矩阵 A 写成 $A=(e_n,e_1,\cdots,e_{n-1})$. 由分块矩阵的乘法及性质 (2), 有 $A^2=(Ae_n,Ae_1,Ae_2\cdots,Ae_{n-1})=(e_{n-1},e_n,e_1,\cdots,e_{n-2})$. 如此下去便可得到结论.

习题 2.15

具有以下形状的矩阵称为循环矩阵

$$\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3&\cdots&a_n\\a_n&a_1&a_2&\cdots&a_{n-1}\\a_{n-1}&a_n&a_1&\cdots&a_{n-2}\\\cdots&\cdots&\cdots&&\cdots\\a_2&a_3&a_4&\cdots&a_1\end{pmatrix}.$$

证明：同阶循环矩阵的乘积仍然是循环矩阵.

证明 设

$$J=\begin{pmatrix}0 & I_{n-1}\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

注意到任意循环矩阵 A 可以表示为 $A=a_1I_n+a_2J+a_3J^2+\cdots+a_nJ^{n-1}$ 的形式，反之有如前形式的矩阵也一定是循环矩阵. 两个循环矩阵的乘积可以写成关于 J 的两个多项式的乘积，又 $J^n=I_n$, 即可得到结论.

习题 2.16

设 A 是 n 阶上三角矩阵且主对角线上元素全为零，证明：$A^n=0$.

证明 可以设

$$A=\sum_{i<j}a_{ij}E_{ij}.$$

当 $j\neq k$ 时，$E_{ij}E_{kl}=0$, 因此在 A^n 的乘法展开式中，可能的非 0 项只能具有形状 $E_{ij_1}E_{j_1j_2}\cdots E_{j_{n-1}j_n}$，且 $1\leq i<j_1<j_2<\cdots<j_n\leq n$. 显然这是不可能的，因此 $A^n=0$.

2.3.2 迹及其应用

定义 2.23

设 $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$，则 A 上主对角线元素之和称为矩阵 A 的迹，记为 $\mathrm{tr}A$.

性质 若 $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n},k\in\mathbb{F}$，则

(1)$\mathrm{tr}(A+B)=\mathrm{tr}(A)+\mathrm{tr}(B)$;

(2)$\mathrm{tr}(kA)=k(\mathrm{tr}A)$;

(3)$\mathrm{tr}A^T=\mathrm{tr}A$;

(4)$\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA)$.

命题 2.9 (迹的等价刻画)

若映射 $f:\mathbb{F}^{n\times n}\to\mathbb{F}$, 对任意 $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n},k\in\mathbb{F}$，满足

(1)$f(A+B)=f(A)+f(B)$;

(2)$f(kA)=kf(A)$;

(3)$f(AB)=f(BA)$;

(4)$f(I_n)=n$.

则 f 是迹.

证明 由 f 的线性性知，$f(E_{11})+f(E_{22})+\cdots+f(E_{nn})=f(E_{11}+E_{22}+\cdots+E_{nn})=f(I_n)=n$.
又 $f(E_{ii})=f(E_{ij}E_{ji})=f(E_{ji}E_{ij})=f(E_{jj})$, 故 $f(E_{ii})=1$. 当 $i\neq j$ 时，$E_{ij}=E_{i1}E_{1j}$, 则 $f(E_{ij})=f(E_{i1}E_{1j})=f(E_{1j}E_{i1})=f(0)=f(0I_n)=0f(I_n)=0$. 设 $A=(a_{ij})$, 则 $f(A)=f(\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}E_{ij})=\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}f(E_{ij})=\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ii}=\mathrm{tr}A$. 即映射 f 就是迹.

习题 2.17

不存在矩阵 $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$, 使得 $AB-BA=kI_n$, 其中 $k\neq 0$.

证明 若存在这样的矩阵 A, B, 使得 $AB - BA = kI_n$，且 $k \neq 0$. 同时取迹，有 $0 = \mathrm{tr}(AB) - \mathrm{tr}(BA) = \mathrm{tr}(AB - BA) = \mathrm{tr}(kI_n) = kn$, 矛盾！

习题 2.18

设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 证明：$\mathrm{tr}(AA^T) \geq 0$, 等号成立当且仅当 $A = 0$.

证明 设 $A = (a_{ij})$, 经计算易得 $\mathrm{tr}(AA^T) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2 \geq 0$. 等号成立当且仅当 $a_{ij} = 0, \forall i, j$, 即 $A = 0$.

习题 2.19

设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 满足 $AA^T = A^2$, 证明：A 是对称矩阵.

证明 只需证明 $A - A^T = 0$. 由上题知只需证明 $\mathrm{tr}((A - A^T)(A - A^T)^T) = 0$ 即可. 由 $AA^T = A^2$, 知 $A^TA = (A^T)^2$. $\mathrm{tr}((A - A^T)(A - A^T)^T) = \mathrm{tr}((A - A^T)(A^T - A)) = \mathrm{tr}(AA^T - A^2 - (A^T)^2 + A^TA) = \mathrm{tr}(A^TA - AA^T) = \mathrm{tr}(A^TA) - \mathrm{tr}(AA^T) = 0$, 从而结论得证.

2.3.3 降阶公式及其应用

命题 2.10

若 $A \in \mathbb{F}^{m\times m}, B \in \mathbb{F}^{m\times n}, C \in \mathbb{F}^{n\times m}, D \in \mathbb{F}^{n\times n}$, 其中 A 可逆，则

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det A \cdot \det\big(D - CA^{-1}B\big).$$

证明 注意到

$$\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ -CA^{-1} & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

上述等式两边同时取行列式即可得到结论.

注 当 D 可逆时，有

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ -D^{-1}C & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - BD^{-1}C & B \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$

故

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det D \cdot \det\big(A - BD^{-1}C\big).$$

于是，当矩阵 A, D 同时可逆时，有如下等式

$$\det A \cdot \det\big(D - CA^{-1}B\big) = \det D \cdot \det\big(A - BD^{-1}C\big). \tag{2.44}$$

以上等式我们称为**降阶公式**.

推论 2.2

若 $A \in \mathbb{F}^{n\times m}, B \in \mathbb{F}^{m\times n}$，且 $n \geq m$, 则

$$\det\{(\lambda I_n - AB)\} = \lambda^{n-m} \det\{(\lambda I_m - BA)\}.$$

证明 (法一) 当 $\lambda \neq 0$ 时，考虑矩阵

$$\begin{pmatrix} \lambda I_m & B \\ A & I_n \end{pmatrix}$$

对上述矩阵作同命题2.10及其注记中的处理.

当 $\lambda = 0$ 时，分别考虑 $m = n$ 和 $n > m$ 的情况.

(法二) 先考虑 $m = n$ 的情形，若 A 可逆，由于 $BA = A^{-1}(AB)A$，因此 AB 与 BA 相似，他们的特征多项式相同. 对于一般矩阵 A，可以取一列有理数列 $t_k \to 0$，使得矩阵 $t_k I + A$ 可逆，于是由可逆情形有 $\det\{(\lambda I_n - (t_k I + A)B)\} = \det\{(\lambda I_n - B(t_k I + A))\}$，两边同时取极限，有 $\det\{(\lambda I_n - AB)\} = \det\{(\lambda I_n - BA)\}$.

考虑 $n > m$ 的情形，考虑方阵 $C = (A, 0)$ 与 $D = \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}$. 注意到 $CD = AB, DC = \begin{pmatrix} BA & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. 由方阵情形有

$$\det\{(\lambda I_n - AB)\} = \det\{(\lambda I_n - CD)\} = \det\{(\lambda I_n - DC)\} = \begin{vmatrix} \lambda I_m - BA & 0 \\ 0 & \lambda I_{n-m} \end{vmatrix} = \lambda^{n-m} \det\{(\lambda I_m - BA)\}.$$

习题 2.20 (小测第四题)

计算 n 阶行列式

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

解 注意到

$$A = -I_n + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} (1, 1, \cdots, 1).$$

由推论2.2知

$$\det\{A\} = \det\left\{ (-I_n + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} (1, 1, \cdots, 1)) \right\} = (-1)^{n-1} \det\left\{ (-1 + (1, 1, \cdots, 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}) \right\} = (-1)^{n-1}(n-1).$$

习题 2.21 (第五周作业)

计算下列 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 + a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 + a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 + a_n \end{vmatrix}.$$

其中 $a_i \neq 0, i = 1, 2, \cdots, n$.

解

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix} = \det\{1\}\cdot\det\left\{(\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} 1^{-1}(1,1,\cdots,1))\right\}$$

$$= \det\left\{\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}\right\}\cdot\det\left\{(1+(1,1,\cdots,1)\begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & & & \\ & \frac{1}{a_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{a_n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix})\right\} = (\prod_{i=1}^n a_i)(1+\sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j})$$

$= \prod\limits_{i=1}^n a_i + \sum\limits_{j=1}^n \prod\limits_{k\neq j} a_k.$

注 后面将处理存在 $a_i = 0$ 的情形.

2.3.4 利用矩阵乘法计算行列式

习题 2.22

设 $s_k = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k (k \geq 0), s_0 = n$

$$S = \begin{pmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \cdots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_n \\ s_2 & s_3 & s_4 & \cdots & s_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{2n-2} \end{pmatrix}.$$

求 $\det\{S\}$, 并证明当 $x_i \in \mathbb{R}$ 时，有 $\det\{S\} \geq 0$.

解 设

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

则 $S = VV^T$, 因此 $\det\{S\} = (\det\{V\})^2 = \prod\limits_{1\leq i<j\leq n}(x_j - x_i)^2 \geq 0.$

习题 2.23

计算下列矩阵 A 的行列式

$$A = \begin{pmatrix} x & y & -z & w \\ y & -x & -w & -z \\ z & -w & x & y \\ w & z & y & -x \end{pmatrix}.$$

解 注意到 $AA^T = \mathrm{diag}(u,u,u,u)$, 其中 $u = x^2+y^2+z^2+w^2$. 于是

$$(\det\{A\})^2 = (x^2+y^2+z^2+w^2)^4.$$

因此 $\det\{A\} = (x^2+y^2+z^2+w^2)^2$ 或者 $\det\{A\} = -(x^2+y^2+z^2+w^2)^2$，带入 $x=1, y=z=w=0$, 有

$\det\{A\} = 1$, 故 $\det\{A\} = (x^2 + y^2 + z^2 + w^2)^2$.

2.3.5 摄动法及其应用

命题 2.11

若 A 是一个 n 阶方阵，则存在一个正数 a, 使得对任意的 $0 < t < a$，矩阵 $tI_n + A$ 总是可逆矩阵.

证明 由行列式的展开式，可以假设

$$\det\{(tI_n + A)\} = t^n + a_1 t^{n-1} + \cdots + a_{n-1}t + a_n.$$

这是一个关于 t 的 n 次多项式，其上至多有 n 个不同的根. 若上述多项式的根均为零，则可取 $a = 1$; 若上述多项式有非零根，则可取 a 为上述多项式模长的最小值. 无论上述哪种情况，当 $0 < t_0 < a$ 时，t_0 都不会是上述多项式的根，因此 $\det\{(t_0 I_n + A)\} \neq 0$, 即矩阵 $t_0 I_n + A$ 可逆.

注 这个命题告诉我们对任意的 n 阶矩阵 A, 经过微小的一维摄动后，$tI_n + A$ 总能成为一个可逆矩阵.

笔记 摄动法原理: 设 A 是 n 阶矩阵，由上面命题知，存在一列有理数 $t_k \to 0$，使得 $t_k I_n + A$ 都是可逆矩阵. 如果一个矩阵问题对可逆矩阵成立，特别地对 $t_k I_n + A$ 成立，并且该问题关于 t_k 连续，则可让 $t_k \to 0$，最后得到该问题对一般的方阵 A 也成立. 需要注意的是：摄动法处理矩阵问题时一定要关于 t_k 连续. 这一点非常重要，否则我们将不能用摄动法来归结处理. 一般而言，运用摄动法分为两步：首先处理可逆矩阵情形; 其次再利用摄动以及取极限得到一般情况的证明. 接下来，我们来看一个具体的例子.

习题 2.24

设 $A, B, C, D \in \mathbb{F}^{n\times n}$ 且 $AC = CA$. 证明:

$$\det\left\{\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\right\} = \det\{(AD - CB)\}.$$

证明 若矩阵 A 可逆，由命题2.10及矩阵 A, C 的交换性知

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det A \cdot \det\big(D - CA^{-1}B\big) = \det\big\{(AD - ACA^{-1}B)\big\} = \det\{(AD - CB)\}.$$

对于一般的方阵 A，可以取到一列有理数 $t_k \to 0$，使得 $t_k I_n + A$ 是可逆矩阵，且 $(t_k I_n + A)C = C(t_k I_n + A)$. 由前面分析知

$$\det\left\{\begin{pmatrix} t_k I_n + A & B \\ C & D \end{pmatrix}\right\} = \det\{((t_k I_n + A)D - CB)\}.$$

注意到上述等式两边均为关于 t_k 的多项式，从而关于 t_k 连续 (适合摄动法使用条件). 上述等式两边同时取极限，令 $t_k \to 0$，即有

$$\det\left\{\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\right\} = \det\{(AD - CB)\}. \quad \text{结论得证.}$$

2.3.6 运用多项式处理行列式

命题 2.12

设多项式

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

若 $f(x)$ 有 $n+1$ 个不同的根 $b_1, b_2, \cdots, b_{n+1}$, 即 $f(b_1) = f(b_2) = \cdots = f(b_{n+1}) = 0$, 则 $f(x)$ 是零多项式.

证明 由假设 $x_0=a_0,x_1=a_1,\cdots,x_{n-1}=a_{n-1},x_n=a_n$ 是下列方程组的解

$$\begin{cases} x_0+b_1x_1+\cdots+b_1^{n-1}x_{n-1}+b_1^nx_n=0\\ x_0+b_2x_1+\cdots+b_2^{n-1}x_{n-1}+b_2^nx_n=0\\ \cdots\cdots\\ x_0+b_{n+1}x_1+\cdots+b_{n+1}^{n-1}x_{n-1}+b_{n+1}^nx_n=0\end{cases}$$

上述线性方程组的系数是一个 $Vander\ Monde$ 行列式，又 $b_1,b_2,\cdots,b_{n+1}$ 互不相同，所以系数行列式不为零. 由 $Cramer$ 法则知上述方程组只有零解，即 $a_n=a_{n-1}=\cdots=a_1=a_0=0$, 故 $f(x)$ 是零多项式.

习题 2.25

设 $f_k(x)(k=1,2,\cdots,n)$ 是次数不超过 $n-2$ 的多项式，证明：对任意 n 个数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 均有

$$\begin{vmatrix} f_1(a_1) & f_2(a_1) & \cdots & f_n(a_1)\\ f_1(a_2) & f_2(a_2) & \cdots & f_n(a_2)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ f_1(a_n) & f_2(a_n) & \cdots & f_n(a_n)\end{vmatrix}=0.$$

证明 考虑如下多项式函数

$$g(x)\triangleq\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x)\\ f_1(a_2) & f_2(a_2) & \cdots & f_n(a_2)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ f_1(a_n) & f_2(a_n) & \cdots & f_n(a_n)\end{vmatrix}=0.$$

若 $a_i(i=2,\cdots,n)$ 中有相同者，则显然有 $g(x)=0$. 若诸 a_i 互不相同，则由 $g(a_i)=0(i=2,\cdots,n)$, 知 $g(x)$ 有 $n-1$ 个互不相同的根，由命题2.12，知 $g(x)=0$. 综上，无论何种情况，总有 $g(x)=0$，特别 $g(a_1)=0$, 因此原行列式值等于零.

习题 2.26

计算下列 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n\end{vmatrix}.$$

解 考虑如下多项式函数

$$f(x)\triangleq\begin{vmatrix} 1+a_1+x & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1+a_2+x & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n+x\end{vmatrix}.$$

存在自然数 N，当 $x>N$ 时，$a_i+x(i=1,2,\cdots,n)$ 全不为零. 于是由习题2.21知，当 $x>N$ 时 $f(x)=\prod\limits_{i=1}^{n}(a_i+x)+\sum\limits_{j=1}^{n}\prod_{k\neq j}(a_k+x)$. 再由命题2.12知 $f(x)=\prod\limits_{i=1}^{n}(a_i+x)+\sum\limits_{j=1}^{n}\prod_{k\neq j}(a_k+x)$ 对任意 x 成立. 特别对 $x=0$ 成立. 因此原行列式 $=\prod\limits_{i=1}^{n}a_i+\sum\limits_{j=1}^{n}\prod\limits_{k\neq j}a_k$.