2.5 第五次习题课

2.5.1 作业选讲

首先我挑了几道作业中我个人认为有必要讲的题目来讲解，其他作业题则根据现场同学需求来决定是否讲解，没讲的题可以参考群里发的作业答案。

笔记 由于作业答案都会单独发布，所以下面要讲的几道题就不在讲义里把答案过程抄过来了，而是呈现一个思考的过程，或者是这道题里的某个点值得注意。

习题 2.28 (第五章第 36 题)

将三维几何空间中的直角坐标系 $[O; e_1, e_2, e_3]$ 绕单位向量 $e = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$ 逆时针旋转 θ 角，求新坐标与原坐标之间的关系。

这道题其实可以不使用基变换的方法来做，可以用一些更偏几何的办法来算出答案。另外本周作业中第六章第 8 题也可以通过这样的方法来做，具体的过程可以参考过两天会发的作业答案。大致的思路就是任取一点，旋转即是其与原点相连的向量绕着旋转轴旋转，这个旋转的轨迹实际上是个圆锥侧面的一部分，那么我们可以只考虑在这个圆锥的底面圆上旋转，以底面圆心为原点建立坐标系，算出三个标准正交基，即 $\boldsymbol{e}_1 = (1,0,0)^T, \boldsymbol{e}_2 = (0,1,0)^T, \boldsymbol{e}_3 = (0,0,1)^T$ 旋转后的像，再由旋转变换的线性性，就可以写出这个旋转变换的表达式了。

习题 2.29 (第五章第 44 题)

设 $\mathbb{F}_n[x]$ 是次数小于或等于 n 的多项式全体构成的线性空间。

(1) 证明 : $S = \{1, x-1, (x-1)^2, \cdots, (x-1)^n\}$ 构成 $\mathbb{F}^n$ 的一组基；

(2) 求 S 到基 $T = \{1, x, \cdots, x^n\}$ 的过渡矩阵；

(3) 求多项式 $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in \mathbb{F}_n[x]$ 在基 S 下的坐标

这里要注意这不是一般的数组空间，在数组空间里求过渡矩阵时，基向量可以排列成一个可逆方阵，两边乘上其逆矩阵便能得到过渡矩阵。但这里空间里的元素都是多项式，我们没法把 n 个多项式排列成一个 n 阶可逆矩阵，这种做法也就失效了，所以有同学作业里出现如下这样的：

$$T = (1, x-1, (x-1)^2, \cdots, (x-1)^n)^{-1}(1, x, \cdots, x^n)$$

显然是错误的，甚至是没有意义的写法。此外，更多关于一般线性空间的理解在下一节“拓展内容”中会讲到。

习题 2.30 (第五章第 46 题)

给定矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

令 V 是与 A 乘法可交换的三阶实方阵全体. 证明 : V 在矩阵加法与数乘下构成实数域上的线性空间，并求 V 的一组基与维数。

这道题参考答案中的方法是因为 A, A^{-1}, I 均与 A 可交换，并且这里 V 恰好维数为 3，对于一般的这类题目，其实通法还是设出九个未知数解方程计算，其实这个矩阵 A 里有很多 0，所以实际上并不算太过复杂。

习题 2.31 (第六章第 5 题)

证明：$\mathbb{R}^2$ 上的可逆线性变换可以分解为关于坐标轴的伸缩、反射及旋转变换的复合。

这道题在群里给过提示，但还是有不少同学在问，思路就是把任意一个可逆方阵 A 通过那三种变换一步步变成单位阵，比如如果有 $P_1P_2\cdots P_nAQ_1Q_2\cdots Q_m=I$，其中 P_i,Q_i 都是伸缩、旋转、反射变换对应的矩阵，那么 $A=P_n^{-1}\cdots P_1^{-1}Q_m^{-1}\cdots Q_1^{-1}$，从而 $\mathscr{A}(x)=Ax$ 就是这三种变换的复合。

那么我们可以先通过右乘伸缩矩阵来使 A 的列向量长度相等，为什么不是左乘呢？因为伸缩矩阵实际上是在拉伸 x 轴和 y 轴，左乘就相当于是先作用变换 $\mathscr{A}$，再复合一个伸缩变换，把矩阵左乘一个伸缩矩阵也能看出来，作用后的结果是原矩阵列向量的 x 分量和 y 分量分别作了伸缩，而不是列向量本身，这个时候想让两个列向量相等的话，我们就不好控制伸缩的比例，甚至还有可能是无解的。但右乘就是先拉伸坐标轴再复合变换 $\mathscr{A}$，就能达到伸缩列向量本身的目的。继续下去就是复合一个旋转，把两个列向量旋转到关于 y 轴对称，这样的话我们伸缩 y 轴，就能很好地控制两个列向量之间的夹角，从而让它们正交，再通过伸缩单位化，最后用旋转和反射就能变为 $(1,0)^T,(0,1)^T$，从而就得到单位阵了。

其实由于矩阵可以分解成初等方阵的乘积，我们也可以仅对初等方阵验证这个命题，但其实没简化多少。

习题 2.32 (第六章第 8 题)

在三维几何空间的直角坐标系中，求绕向量 $\boldsymbol{e}=(1,-1,1)^T$ 逆时针旋转 30° 角的变换。

与第五章第 36 题基本一致，但注意这里的旋转轴不是单位向量（应该是漏了个系数），如果要用旋转公式要先单位化，好几个同学都是直接带的公式，具体过程见后续发布的作业答案。

还有同学想听第六章那两个求对称变换的题目，其实习题课这会儿第六章这次作业还没截止）所以我只能说一下思考的过程（包括上面两个题目），对称这种性质比较好的其实可以直接算，设任意一点 $(x,y,z)^T$，其对称点为 (u,v,w)，我们要做的就是用 x,y,z 线性表示出 u,v,w，由于对称，两个点的中点落在对称轴（或对称平面）上，而且二者连线段对应的向量与对称轴（或对称平面）垂直，这样列出两个方程就能解出关系了。

2.5.2 拓展内容

一般线性空间

一般线性空间，也叫做向量空间，但是这里的“向量”不一定就是通常所指的有方向、有长度的线段，而是一种抽象的概念。线性空间实质上是一个集合 M，只不过是在这个集合上再加上一些运算与结构。考虑一个数域 $\mathbb{F}$，我们在 M 上赋予两个运算：加法与数乘，这里的加法也不一定就是我们通常认为的数字之间的加法，而是我们定义的一种映射关系，这个映射的定义域是 $M\times M$，值域是 M，$f:M\times M\to M,(\alpha,\beta)\mapsto\gamma$，也就是把 M 上的任意两个元素映到 M 上的另外一个元素，我们把这个映射定义为“加法”运算。数乘也同理，它是定义在 $\mathbb{F}\times M$ 上的映射，值域为 M，也就是把 M 上一个元素，及数域 $\mathbb{F}$ 上一个数，映到 M 上另一个元素，我们把这个映射定义为“数乘”运算。

接下来我们需要对这两个映射做一些限制，以保证它们具有我们想要的好的性质，这也就是所谓构成线性空间的八条公理，我们可以随便定义“加法”与“数乘”，只要它们能满足这八条公理，我们就可以说：在定义了这样的“加法”与“数乘”后，M 是数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间（向量空间），并且把 M 中的元素都叫做“向量”。

接下来我们通过几个例子来加深一下理解：

例题 2.32 矩阵空间 $\mathbb{F}^{m\times n}$，取数域为 $\mathbb{F}$，我们定义加法为矩阵加法，数乘为矩阵的数乘，那么不难验证 $\mathbb{F}^{m\times n}$ 就是数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间，这里数域为什么取 $\mathbb{F}$？其实我们也可以取 $\mathbb{F}$ 的任意子域，这是因为我们要保证“加法”与“数乘”的封闭性，即我们定义的映射仍是要映入 $\mathbb{F}^{m\times n}$ 内的。比如考虑实矩阵空间 $\mathbb{R}^{m\times n}$，如果取数域为 $\mathbb{Q}$ 或 $\mathbb{R}$ 等等 $\mathbb{R}$ 的子域，那么数域上的任何数和实矩阵相乘仍然是实矩阵，也就是所谓“封闭”。但如果把数域取为复数域 $\mathbb{C}$，复数与实矩阵的数乘并不都是实矩阵，这时候实矩阵空间在数乘运算下就不封闭，所以 $\mathbb{R}^{m\times n}$ 不是数域 $\mathbb{C}$ 上的线性空间，但是是 $\mathbb{Q}$ 或 $\mathbb{R}$ 上的线性空间。

同时这个向量空间里的“向量”是一个个 $m\times n$ 的矩阵，并且容易得到这个空间的维数是 $m\times n$，一组基为 $\{E_{ij}:1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n\}$，很多同学在刚接触到这个空间时会把它与数组空间搞混，这两个空间里“向

量”的定义都是完全不同的，从本质上来说就是两个完全不同的空间，在理解了这一点后，相信大家就不会再弄混这两个空间了。

笔记 但其实也可以把 $\mathbb{F}^{m\times n}$ 看作是数组空间 $\mathbb{F}^{mn}$，我们可以把矩阵的每一列顺次移动到第一列下面，得到一个 mn 维的列向量，并且这样的操作显然是一一对应的。

例题 2.33 连续函数空间 $C[a,b]$，是定义在区间 $[a,b]$ 上的连续函数全体，加法与数乘就是函数的逐点加法与数乘，这也是一个向量空间，这时候空间里的“向量”就是一个个连续函数。那么这个空间的维数是什么？回想一下上面的第五章第 44 题，多项式都是连续的，所以多项式空间是其一个子空间，并且 $\{1,x,x^2,\cdots\}$ 是一组基，也就是说多项式空间是无穷维的，并且是可数无穷。那么 $C[a,b]$ 也是无穷维向量空间。

笔记 实际上 $C[a,b]$ 的基的“个数”是不可数无穷的，也就是维数是不可数无穷。

例题 2.34 对偶空间 V^* 以及二次对偶空间 V^{**}，其中 V 是线性空间，V^* 指的是定义在 V 上的线性函数全体构成的集合，这也是一个向量空间，并且空间里的“向量”是一个个线性函数，我们取 V 的一组基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$，那么根据第六章第 43 题的推广，对任意给定的 $1\leqslant i\leqslant n$，取 $\beta_j=\delta_{ij}$ 存在线性函数 $\mathscr{A}_i$ 满足 $\mathscr{A}_i(\alpha_j)=\beta_j, j=1,\cdots,n$，也就是 $\mathscr{A}_i$ 只把 α_i 映为 1，把 $\alpha_j(j\neq i)$ 映为 0，那么我们把 $\mathscr{A}_i$ 记为 α_i^*，这也就得到了对偶基。

为什么要这样取对偶基呢？我们把 V^* 上任意一个线性函数写成对偶基的线性组合，即 $\mathscr{A}=\lambda_1\alpha_1^*+\cdots+\lambda_n\alpha_n^*$，任取 V 中元素 $\alpha=\mu_1\alpha_1+\cdots+\mu_n\alpha_n$，那么 $\mathscr{A}(\alpha)=\lambda_1\alpha_1^*(\alpha)+\cdots+\lambda_n\alpha_n^*(\alpha)=\lambda_1\mu_1+\cdots+\lambda_n\mu_n$，可以看出来我们得到了一种类似向量内积的美观的表示形式！

二次对偶空间 V^{**} 就是对偶空间的对偶空间，也就是定义在 V^* 上的线性函数全体构成的集合，V^{**} 中的“向量”也是函数，但是这些函数作用的对象是 V^* 里的线性函数，任意取定 V 中一个元素 α，定义映射 $\alpha^{**}:V^*\to\mathbb{R}, \alpha^{**}(\mathscr{A})=\mathscr{A}(\alpha)$，容易验证线性性，这样我们得到了一个映射 $i:V\to V^{**},\alpha\to\alpha^{**}$，称这个映射为 V 到 V^{**} 的自然映射或自然嵌入。

例题 2.35 不寻常的加法与数乘例子：考虑 $\mathbb{R}_+=\{x\in\mathbb{R}:x>0\}$，取数域为 $\mathbb{R}$，定义加法为 $x\oplus y=xy$，数乘为 $\lambda\odot x=x^\lambda$，容易验证 $\mathbb{R}_+$ 是数域 $\mathbb{R}$ 上的向量空间，这时候“向量”指的是一个个正实数，并且这里加法的零元是 1，x 的加法负元是 $1/x$，在这个空间里任意不为 1 的正实数都可以作为一组基，也就是维数为 1。

商空间

商空间也是一种特殊的线性空间，引入商空间需要先回顾一下第一章所涉及过的等价关系的定义：

定义 2.27 (等价关系)

若集合 A 上的一个关系 $\sim$ 满足如下三条性质：

(1) 自反性：对于任意 $x\in A$，均有 $x\sim x$；

(2) 对称性：对于任意 $x,y\in A$，若 $x\sim y$，则 $y\sim x$；

(3) 传递性：对于任意 $x,y,z\in A$，若 $x\sim y, y\sim z$，则 $x\sim z$，

则称 $\sim$ 为 A 上的一个等价关系。

等价关系的例子非常多，比如“同班同学关系”、“性别相同关系（我们假定每个人只有一种性别）”都是常见的等价关系。矩阵的相抵、相似等等也都是等价关系。给定集合上的一个等价关系，我们就能将集合划分为一个个非空且互不相交的“等价类”：

定义 2.28 (等价类、商集、商映射)

设 $\sim$ 是集合 A 上的一个等价关系。

(1) 对于任意的 $x\in A$，称 $[x]\triangleq\{y\in A:x\sim y\}$ 为元素 x 所在的等价类，（注意等价类是一个集合，集合中的元素互相等价）。$[x]$ 中任意一个元素都被称为 $[x]$ 的一个代表元。

(2) 称所有等价类的集合 $A/\sim\triangleq\{[x]:x\in A\}$ 为集合 A 在该等价关系下的商集。

(3) 称映射 $p: A \to A/\sim, x \to [x]$ 为商映射（容易看出 p 一定是满射）。

接下来，考虑数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间 V，任取 V 的一个子空间 W，$\forall \alpha, \beta \in V$，若 $\alpha - \beta \in W$，则称 α 与 β 模 W 同余，记作 $\alpha \equiv \beta (\bmod W)$，那么不难看出模 W 同余是 V 上的一个等价关系，等价类便是模 W 的同余类。记 $A_\alpha = \{\alpha + \gamma : \gamma \in W\}$，显然 $A_\alpha \subset [\alpha]$，而任取 $\beta \in [\alpha]$，记 $\gamma_0 = \beta - \alpha \in W$，则 $\beta = \alpha + \gamma_0 \in A_\alpha$，从而有 $[\alpha] \subset A_\alpha$，所以 $[\alpha] = A_\alpha$，从而我们得到了在这个等价关系下的等价类的表示。

并且我们定义等价类之间的加法和数乘：$[\alpha] + [\beta] = [\alpha + \beta], \lambda[\alpha] = [\lambda\alpha]$，且由于 W 是 V 的子空间，那么也是线性空间，由此容易验证我们定义的加法和数乘不依赖于代表元的选取，即是良定的。

那么根据上述结果，等价类构成的集合也构成了一个线性空间，我们便可以给出商空间的定义：

定义 2.29 (商空间)

对于数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间 V，W 是 V 的一个子空间，记所有模 W 的同余类（等价类）的集合为 V/W，其在等价类的加法与数乘下也构成数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间，称为 V 关于 W 的商空间。

上面的叙述可能比较抽象，下面我们通过一个简单的例子来辅助理解：
考虑二维平面，即 $\mathbb{R}^2$，记 $W = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$，即为 x 轴，则 W 为 $\mathbb{R}^2$ 的一个子空间，我们考虑 $\mathbb{R}^2/W$ 是什么，容易看出 $\alpha - \beta \in W$ 当且仅当 α 与 β 有相同的纵坐标，那么等价类 $[\alpha]$ 就是过 α 且和 x 轴平行的直线。

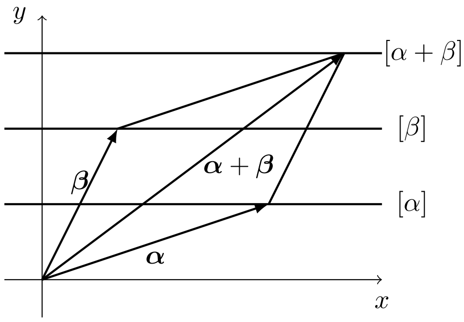

图 2.5: $\mathbb{R}^2/W$

我们在每个等价类中取一个代表元，定义一个映射把每个等价类映回这个代表元，这样就能得到商空间 $\mathbb{R}^2/W$ 到 $\mathbb{R}^2$ 的一个嵌入，比如我们可以取代表元为这些直线与 y 轴的交点，那么我们得到的嵌入映射的像是什么？是 y 轴！而 y 轴与 x 轴 (W) 的直和恰好就是全空间 $\mathbb{R}^2$，这是不是可以给我们一些启发？

事实上，我们有如下的结论：

定理 2.3

设 W 是线性空间 V 的子空间，W' 为其补空间，即 $V = W \oplus W', V/W$ 是 V 模 W 的商空间。定义映射 $\eta : W' \to V/M$ 如下：对任意 $\alpha \in W', \eta(\alpha) = [\alpha]$，则 η 是 W' 到 V/M 的线性同构（一一对应）。

证明 显然 η 是线性映射，任取 $[\alpha] \in V/W$，那么 $\alpha \in V = W \oplus W'$，因此存在唯一的 $\beta \in W, \gamma \in W'$ 满足 $\alpha = \beta + \gamma$，由于 $\alpha - \gamma = \beta \in W$，所以 $\alpha \equiv \gamma (\bmod W)$．故 $[\gamma] = [\alpha]$．即对任意 $[\alpha] \in V/W$，存在 $\gamma \in W'$，使得 $\eta(\gamma) = [\gamma] = [\alpha]$，故 η 是满射。

其次，设 $\gamma_1, \gamma_2 \in W'$，且 $\eta(\gamma_1) = \eta(\gamma_2)$，则 $[\gamma_1] = [\gamma_2]$，从而 $\gamma_1 \equiv \gamma_2 (\bmod W)$，即 $\gamma_1 - \gamma_2 \in W$，而 $\gamma_1, \gamma_2 \in W'$，故 $\gamma_1 - \gamma_2 \in W'$，因此, $\gamma_1 - \gamma_2 \in W \cap W'$。由于 W' 是 W 的补空间，所以 $W \cap W' = \{0\}$，那么只有 $\gamma_1 - \gamma_2 = 0$，即 $\gamma_1 = \gamma_2$，从而 η 是单射。

因此，η 是线性同构[3]，从而 W' 和 V/W 同构。

由上述定理我们还能得到下面这样一个自然的推论：

[3]两个线性空间线性同构是指存在它们之间的线性双射，将这个双射称为同构映射，简称同构，同构空间具有很多相同的性质。

推论 2.3

设 W 是线性空间 V 的子空间，则 V 关于 W 的商空间 V/W 的维数为 $\dim(V/W)=\dim V-\dim W$.

证明 由定理2.3，$\dim(V/W)=\dim(W')=\dim V-\dim W$，其中 W' 为 W 的补空间。

不变子空间

上次课我们初次学习到了特征值和特征向量的概念，线性映射把它的特征向量映为其常数倍，那么特征向量的任意常数倍也都是特征向量，且相同特征值对应的特征向量的和仍然是该特征值对应的特征向量，那如果我们考虑某个特征值对应的所有特征向量全体构成的集合，这个集合就也是一个线性空间，我们称其为特征子空间。并且特征子空间在映射下的像仍然落在特征子空间里。

那么我们来研究一个更广泛的有类似性质的子空间，即不变子空间：

定义 2.30 (不变子空间)

设 $\mathscr{A}:V\to V$ 是线性变换，U 是 V 的子空间，如果对任意 $\alpha\in U$，都有 $\mathscr{A}(\alpha)\in U$，即 $\mathscr{A}(U)\subset U$，则称 U 为线性变换 $\mathscr{A}$ 的一个不变子空间。

研究不变子空间有什么用处呢？我们取不变子空间上的一组基，并把它们扩充成全空间的基，我们发现线性变换在这组基下的矩阵具有很好的形式：

定理 2.4

设 $\mathscr{A}$ 是 V 上的线性变换，U 是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间。设 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\ \alpha_k\}$ 是 U 的一组基，则 $\mathscr{A}$ 在 V 的基 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k,\alpha_{k+1},\cdots,\alpha_n\}$ 下的方阵是准上三角方阵。

证明 因为 U 是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间，所以对 $1\leqslant i\leqslant k, \mathscr{A}(\alpha_j)\in U$，由于 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k\}$ 是 U 的基，因此设 $\mathscr{A}(\alpha_i)=a_{i1}\alpha_1+a_{i2}\alpha_2+\cdots+a_{ik}\alpha_k$. 而当 $k+1\leqslant j\leqslant n$ 时，由于 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k,\alpha_{k+1},\cdots,\alpha_n\}$ 为 V 的基，故设 $\mathscr{A}(\alpha_j)=a_{j1}\alpha_1+a_{j2}\alpha_2+\cdots+a_{jn}\alpha_n$，因此：

$$\mathscr{A}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{k1} & a_{k+1,1} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1k} & \cdots & a_{kk} & a_{k+1,k} & \cdots & a_{nk} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{k+1,k+1} & \cdots & a_{n,k+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{k+1,n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},\text{定理得证。}$$

同时反过来也容易发现：如果线性变换 $\mathscr{A}$ 在基 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$ 下的方阵是准上三角的，且其左上角的块是一个 k 阶的方阵，那么由 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k\}$ 生成的子空间是 $\mathscr{A}$ 的一个不变子空间。

那么我们就会发现，如果可以把 V 分解成一系列 $\mathscr{A}$ 的不变子空间的直和，那么这些不变子空间的基的并集构成 V 的一组基，并且 $\mathscr{A}$ 在这组基下的矩阵是准对角阵！这个时候，你可能就会对相似标准形的求解产生一些想法，其实求解相似标准形的过程中很重要的一步实质上就是一个不变子空间分解的过程。

2.5.3 补充题目

习题 2.33

将数域 $\mathbb{F}$ 上 n 维 $(n\geqslant 2)$ 数组空间 $\mathbb{F}^n$ 中的每个向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 看作一个具有 n 项的数列，如下集合 W 是否构成 F^n 的一个子空间？如果是，求出它的维数及一组基。

(1) $\mathbb{F}^n$ 中所有的等比数列组成的集合。

(2) $\mathbb{F}^n$ 中所有的等差数列组成的集合。

解 (1) 不是子空间，对加法不封闭，如取等比数列 $(1, q, \cdots, q^{n-1})$ 与 $(-1, q, \cdots, (-1)^n q^{n-1})$ 其和 $(0, 2q, 0, \cdots)$ 显然不是等比数列，从而不是子空间。

(2) 是子空间，显然任意两个等差数列之和、任意等差数列的常数倍仍是等差数列，且任意等差数列

$$(a, a+d, \cdots, a+(n-1)d) = a(1, 1, \cdots, 1) + d(0, 1, 2, \cdots, n-1)$$

都是两个线性无关等差数列 $(1, 1, \cdots, 1)$ 及 $(0, 1, 2, \cdots, n-1)$ 的线性组合，从而这两个等差数列构成一组基，那么该子空间的维数是 2.

习题 2.34

设 W_1, W_2 分别是数域 $\mathbb{F}$ 上齐次线性方程组 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$ 与 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 的解空间。求证：$\mathbb{F}^n = W_1 \oplus W_2$。

证明 设 $X_0 = (x_1, \cdots, x_n) \in W_1 \cap W_2$，由 $X_0 \in W_2$ 知 $X_0 = (x_1, \cdots, x_1)$，由 $X_0 \in W_1$ 知 $nx_1 = 0$，则 $x_1 = 0$，$X_0 = \mathbf{0}$。那么 $W_1 \cap W_2 = \{0\}$，$W_1 + W_2 = W_1 \oplus W_2$。对每个 $X = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{F}^n$，令 $c = \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n)$，$X_2 = (c, \cdots, c)$，$X_1 = X - X_2 = (x_1 - c, \cdots, x_n - c)$，由 $(x_1 - c) + \cdots + (x_n - c) = (x_1 + \cdots + x_n) - nc = 0$ 知 $X_1 \in W_1, X_2 \in W_2$，而 $X = X_1 + X_2 \in W_1 + W_2$。从而 $\mathbb{F}^n = W_1 + W_2 = W_1 \oplus W_2$.

习题 2.35

设 f 是 $\mathbb{F}^{n \times n}$ 上的线性函数，且 $f(AB) = f(BA)$，对任意 n 阶方阵 A, B 都成立，证明：存在常数 $c \in \mathbb{F}$，使 $f(A) = c \cdot tr(A)$.

证明 取 $\mathbb{F}^{n \times n}$ 上的一组自然基 $\{E_{ij} : 1 \leqslant i, j \leqslant n\}$，其中 E_{ij} 为 (i, j) 位置元素为 1，其余位置均为 0 的 n 阶方阵。那么对任意的 i, j, k, t，有 $E_{ki}E_{ij} = E_{kj}$，而 $i \neq t$ 时，有 $E_{ki}E_{tj} = O$，因此有：

$$f(E_{ij}) = f(E_{ii}E_{ij}) = f(E_{ij}E_{ii}) = f(O) = O \ (i \neq j);$$

$$f(E_{ii}) = f(E_{i1}E_{1i}) = f(E_{1i}E_{i1}) = f(E_{11})$$

那么对于任意的 n 阶方阵 $A = \sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{ij}E_{ij}$，有 $f(A) = \sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{ij}f(E_{ij}) = (a_{11} + \cdots + a_{nn})f(E_{11}) = c \cdot tr(A)$. 其中 $c = f(E_{11})$ 为常数，这样就证明了命题。

习题 2.36

设 $\mathscr{A} : U \to U$ 是线性变换，证明存在线性变换 $\mathscr{B} : U \to U$，使得 $\mathscr{A}\mathscr{B} = 0$，且 $rank(\mathscr{A}) + rank(\mathscr{B}) = \dim U$.

证明 取 U 的一组基 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$，设 $\mathscr{A}$ 在这组基下的矩阵是 A，那么存在可逆方阵 P, Q 使 $A = P\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}Q$，$rank(\mathscr{A}) = rank(A) = r$，取 $B = Q^{-1}\begin{pmatrix} O & O \\ O & I_{n-r} \end{pmatrix}$，则 $AB = O$，那么由第六章作业第 43 题，可以定义线性变换 $\mathscr{B}$，满足其在基 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ 下的矩阵为 B，则 $rank(\mathscr{B}) = rank(B) = n - r$，那么有：

$$\mathscr{A}\mathscr{B}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = \mathscr{A}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)B = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)AB = O$$

于是 $\mathscr{A}\mathscr{B} = 0$，且 $rank(\mathscr{A}) + rank(\mathscr{B}) = r + n - r = n = \dim U$，即证。

笔记 涉及线性变换的秩的题目一般都是转化到矩阵会更好处理。这道题其实就是想办法让 0 和 1 交错开.

习题 2.37

已知线性空间 V 上的线性变换 $\mathscr{A}$ 满足条件 $\mathscr{A}^2=\mathscr{A}$，求证：

(1) $V=\operatorname{Im}\mathscr{A}\oplus\ker A$；

(2) $\mathscr{A}$ 在任何一组基下的矩阵 A 满足条件 $rank(A)=tr(A)$；

(3) 在适当的基下将 V 的向量用坐标表示，可以使 $\mathscr{A}$ 具有投影变换的形式，即：

$$(x_1,\cdots,x_r,x_{r+1},\cdots,x_n)^T\to(x_1,\cdots,x_r,0,\cdots,0)^T$$

证明 (1) 设 $\alpha\in\operatorname{Im}\mathscr{A}\cap\ker\mathscr{A}$，则由 $\alpha\in\operatorname{Im}\mathscr{A},\exists\beta\in V$ 使 $\alpha=\mathscr{A}(\beta)$。再由 $\alpha\in\ker\mathscr{A}$ 知 $\mathscr{A}(\alpha)=0$，于是 $\alpha=\mathscr{A}(\beta)=\mathscr{A}^2(\beta)=\mathscr{A}(\mathscr{A}(\beta))=\mathscr{A}(\alpha)=0$。那么 $\operatorname{Im}\mathscr{A}\cap\ker\mathscr{A}=\{0\}$。故 $\operatorname{Im}\mathscr{A}+\ker\mathscr{A}=\operatorname{Im}\mathscr{A}\oplus\ker\mathscr{A}$。而 $\dim V=\dim\operatorname{Im}\mathscr{A}+\dim\ker\mathscr{A}$，故 $V=\operatorname{Im}\mathscr{A}\oplus\ker\mathscr{A}$.

(2) 由 $V=\operatorname{Im}\mathscr{A}\oplus\ker\mathscr{A}$ 知 $\operatorname{Im}\mathscr{A}$ 的任意一组基 $S_1=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_r\}$ 与 $\ker\mathscr{A}$ 的任一组基 $S_0=\{\beta_1,\cdots,\beta_k\}$ 的并 $M_1=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\beta_1,\cdots,\beta_k\}$ 是 V 的一组基，其中每个 $\beta_j\in\ker\mathscr{A}$ 满足 $\mathscr{A}(\beta_j)=0$，每个 $\alpha_i\in\operatorname{Im}\mathscr{A}$ 能写成 $\mathscr{A}(\gamma_i)$ 的形式 $(\gamma_i\in V)$，于是 $\mathscr{A}(\alpha_i)=\mathscr{A}^2(\gamma_i)=\mathscr{A}(\gamma_i)=\alpha_i$，那么有：

$$\mathscr{A}(\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\beta_1,\cdots,\beta_k)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\beta_1,\cdots,\beta_k)\begin{pmatrix}I_r&O\\O&O\end{pmatrix}$$

即 $\mathscr{A}$ 在这组基下的矩阵为 $A_1=diag(I_r,O)$，其满足 $tr(A_1)=r=rank(A_1)$。而在任意一组基 M 下的矩阵 $A=P^{-1}A_1P$，其中可逆阵 P 是 M_1 到 M 的过渡矩阵。那么有 $rank(A)=rank(P^{-1}A_1P)=rank(A_1)$，且 $tr(A)=tr(P^{-1}A_1P)=tr(A_1)=rank(A_1)=rank(A)$.

(3) 由 (2)，$\mathscr{A}$ 在基 M_1 下的矩阵为 $A_1=diag(1,\cdots,1,0,\cdots,0)$。那么坐标为 $X=(x_1,\cdots,x_n)^T$ 的向量被 $\mathscr{A}$ 映到坐标为 $A_1X=(x_1,\cdots,x_r,0,\cdots,0)^T$ 的向量，即具有所要求的投影变换形式。