2.6 第六次习题课

2.6.1 不可对角化矩阵

习题 2.38

设

$$J_n(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda\end{pmatrix}_{n\times n}.$$

证明：$J_n(\lambda)$ 不可对角化，其中 $n>1$.

证明 注意到 $J_n(\lambda)$ 的特征值为 λ，若 $J_n(\lambda)$ 可对角化，则矩阵 $J_n(\lambda)$ 有 n 个线性无关的特征向量，即方程组 $(\lambda I-J_n(\lambda))x=0$ 的解空间维数为 n, 但注意到 $r(\lambda I-J_n(\lambda))=n-1$, 故解空间维数为 1，矛盾！

注 以上证明过程说明：$J_n(\lambda)$ 可对角化当且仅当 $n=1$.

习题 2.39

设 $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & 2\end{pmatrix}$, 证明:$A$ 在实数域上不可对角化.

证明 特征多项式 $\det(\lambda I-A)=\lambda^2-2\lambda+2$ 在实数域上无解，因此矩阵 A 在实数域上不可对角化.

注 注意到矩阵 A 在复数域上有两个不同的根，因此 A 在复数域上可以对角化.

笔记 以上两个例子说明，矩阵是否可以对角化不仅与矩阵本身有关，而且和数域也有关.

2.6.2 矩阵多项式，逆矩阵及伴随矩阵的特征值

习题 2.40

设 $A\in\mathbb{F}^{n\times n},\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是矩阵 A 的全部特征值，$f(x)$ 是一个多项式. 证明：$f(\lambda_1),f(\lambda_2),\cdots,f(\lambda_n)$ 是 $f(A)$ 的全部特征值.

证明 存在一个复可逆矩阵 P, 使得

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}.$$

通过矩阵运算不难得到

$$P^{-1}f(A)P=f(P^{-1}AP)=\begin{pmatrix}f(\lambda_1) & * & \cdots & * \\ 0 & f(\lambda_2) & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f(\lambda_n)\end{pmatrix}.$$

于是 $f(\lambda_1),f(\lambda_2),\cdots,f(\lambda_n)$ 是 $f(A)$ 的全部特征值.

习题 2.41

设 $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, 且 A 可逆，$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是矩阵 A 的全部特征值. 证明：$\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \cdots, \lambda_n^{-1}$ 是 A^{-1} 的全部特征值.

证明 存在一个复可逆矩阵 P, 使得

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

注意到 $\det(A) = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n \neq 0$, 因此对任意 $\lambda_i \neq 0$. 由于上三角矩阵的逆矩阵仍然是上三角矩阵，于是

$$P^{-1}A^{-1}P = \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2^{-1} & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^{-1} \end{pmatrix}.$$

故 $\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \cdots, \lambda_n^{-1}$ 是 A^{-1} 的全部特征值.

习题 2.42

设 $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$，$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是矩阵 A 的全部特征值,A^* 是矩阵 A 的伴随矩阵.
证明：$\prod\limits_{i\neq 1} \lambda_i, \prod\limits_{i\neq 2} \lambda_i, \cdots, \prod\limits_{i\neq n} \lambda_i$ 是 A^* 的全部特征值.

证明 存在一个复可逆矩阵 P, 使得

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

上式两边同时取伴随矩阵，有存在一个复可逆矩阵 P, 使得

$$P^*A^*(P^*)^{-1} = (P^{-1}AP)^* = \begin{pmatrix} \prod\limits_{i\neq 1}\lambda_i & * & \cdots & * \\ 0 & \prod\limits_{i\neq 2}\lambda_i & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \prod\limits_{i\neq n}\lambda_i \end{pmatrix}.$$

因此 $\prod\limits_{i\neq 1} \lambda_i, \prod\limits_{i\neq 2} \lambda_i, \cdots, \prod\limits_{i\neq n} \lambda_i$ 是 A^* 的全部特征值.

习题 2.43

设 $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$,$g(x)$ 为多项式，λ 为 A 的特征值. 证明：若 $g(A) = 0$, 则 $g(\lambda) = 0$.

证明 设 x 是 A 的属于 λ 的特征向量，即 $Ax = \lambda x$. 于是 $g(\lambda)x = g(A)x = 0$，又 $x \neq 0$，因此 $g(\lambda) = 0$.

2.6.3 矩阵对角化的应用

习题 2.44

设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 4 & -2\\ -3 & -3 & 5\end{pmatrix}$, 求 A^n.

解 $\det(\lambda I-A)=(\lambda-2)^2(\lambda-6)$, 因此 A 的特征值为 $2,6$. 解线性方程组 $(2I-A)x=0$ 与 $(6I-A)x=0$, 分别得到三个线性无关的特征向量 $(-1,1,0)^T,(1,0,1)^T,(1,-2,3)^T$. 因此可设 $P=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$, 于是 $B=P^{-1}AP=\mathrm{diag}(2,2,6)$. 故

$$A^n=PB^nP^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}5\cdot 2^n-6^n & 2^n-6^n & 6^n-2^n\\ 2\cdot 6^n-2^{n+1} & 2\cdot 6^n+2^{n+1} & 2^{n+1}-2\cdot 6^n\\ 3\cdot 2^n-3\cdot 6^n & 3\cdot 2^n-3\cdot 6^n & 2^n+3\cdot 6^n\end{pmatrix}.$$

注 小测第二题可以同上作类似处理.

习题 2.45

设数列 a_n 的递推公式为 $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$, 其中 $a_0=0,a_1=1$. 试求 a_n 的通项公式.

解 注意到

$$\begin{pmatrix}a_{n+1}\\ a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_n\\ a_{n-1}\end{pmatrix}.$$

记 $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, 于是

$$\begin{pmatrix}a_{n+1}\\ a_n\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}a_n\\ a_{n-1}\end{pmatrix}=A^2\begin{pmatrix}a_{n-1}\\ a_{n-2}\end{pmatrix}=\cdots=A^n\begin{pmatrix}a_1\\ a_0\end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix}a_1\\ a_0\end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}.$$

进而问题转化为求 A^n. 由于 $\det(\lambda I-A)=\lambda^2-\lambda-1$, 故矩阵 A 的两个特征值分别为 $\lambda_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$,$\lambda_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. 对应的特征向量分别是 $(\frac{1+\sqrt{5}}{2},1)^T,(\frac{1-\sqrt{5}}{2},1)^T$ 可以记 $P=\begin{pmatrix}\frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2}\\ 1 & 1\end{pmatrix}$. 类似于上一题过程，可以算得

$$A^n=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1}-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1} & (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n}-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n}\\ (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n}-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n} & (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n-1}-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n-1}\end{pmatrix}.$$

于是有 $a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n)$.

注 我们可以用这个方法处理第五周作业第 16 题的第三问（第三章习题第 16 题第三问），注意到 $D_n=2\cos\theta D_{n-1}-D_{n-2}$，且 $D_1=2\cos\theta, D_2=4\cos^2\theta-1$, 同样可以利用矩阵对角化求 D_n 的通项公式.

作为变式，我们给出下面例题，请读者自己完成证明.

习题 2.46

有两个数列 $\{a_n\}$,$\{b_n\}$,$a_1=1,b_1=-1,a_n=a_{n-1}+2b_{n-1},b_n=-a_{n-1}+4b_{n-1}$. 求证：

$$a_n=2^{n+1}-3^n, b_n=2^n-3^n.$$

2.6.4 Jordan 标准形及其应用

首先我们不加证明的给出下面定理

定理 2.5

任何一个复方阵 A 均相似于一个 $Jordan$ 矩阵 J, 其中 $J=\text{diag}(J_{r_1}(\lambda_1),\cdots,J_{r_s}(\lambda_s))$. 若不计 $Jordan$ 块次序，则 J 是唯一的.(也即在相似意义下唯一)

注 此时 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$ 即为矩阵 A 的全部特征值.

推论 2.4

复方阵 A 可对角化当且仅当他的每个 $Jordan$ 块是一阶的.

证明 由矩阵的 $Jordan$ 标准形立明.

推论 2.5

设 λ_0 是 n 阶矩阵 A 的特征值. 则对任意的正整数 k，特征值为 λ_0 的 k 阶 $Jordan$ 块出现的个数为

$$r((A-\lambda_0 I)^{k-1})+r((A-\lambda_0 I)^{k+1})-2r((A-\lambda_0 I)^k),$$

其中 $(A-\lambda_0 I)^0=I$.

证明 存在可逆矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP=\text{diag}(J_{r_1}(\lambda_1),\cdots,J_{r_s}(\lambda_s))$. 注意到

$$(A-\lambda_0 I)^k=P\text{diag}(J_{r_1}^k(\lambda_1-\lambda_0),\cdots,J_{r_s}^k(\lambda_s-\lambda_0))P^{-1}.$$

因此 $r((A-\lambda_0 I)^k)=\sum\limits_{i=1}^{s}r(J_{r_i}^k(\lambda_i-\lambda_0))$. 当 $\lambda_i\neq\lambda_0$ 时，$r(J_{r_i}^k(\lambda_i-\lambda_0))=r_i$; 当 $\lambda_i=\lambda_0$ 时，若 $r_i<k$, 则 $r((A-\lambda_0 I)^k)=0$, 若 $r_i\geq k$, 则 $r((A-\lambda_0 I)^k)=r_i-k$. 因此 $r((A-\lambda_0 I)^{k-1})-r((A-\lambda_0 I)^k)$ 等于特征值为 λ_0 且阶数大于等于 k 的 $Jordan$ 块个数. 同理 $r((A-\lambda_0 I)^k)-r((A-\lambda_0 I)^{k+1})$ 等于特征值为 λ_0 且阶数大于等于 $k+1$ 的 $Jordan$ 块个数. 从而特征值为 λ_0 的 k 阶 $Jordan$ 块出现的个数为

$$\begin{aligned}&r((A-\lambda_0 I)^{k-1})-r((A-\lambda_0 I)^k)-(r((A-\lambda_0 I)^k)-r((A-\lambda_0 I)^{k+1}))\\&=r((A-\lambda_0 I)^{k-1})+r((A-\lambda_0 I)^{k+1})-2r((A-\lambda_0 I)^k).\end{aligned}$$

推论 2.6

设 $A,B\in\mathbb{C}^{n\times n}$, 则 A,B 相似等价于对 A,B 的任意特征值 λ_0 及任意正整数 k，有 $r((A-\lambda_0 I)^k)=r((B-\lambda_0 I)^k)$.

证明 必要性显然，下面我们证明充分性.
由推论2.5知矩阵 A,B 特征值为 λ_0 的 k 阶 $Jordan$ 块出现的个数相同，因此 A,B 相似于同一个 $Jordan$ 矩阵，故 A,B 相似.

推论 2.7

设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$, 若存在正整数 k，使得 $r(A^k)=r(A^{k+1})$. 则 $r(A^k)=r(A^{k+1})=r(A^{k+2})=\cdots$.

证明 (法一) 存在可逆矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP=\text{diag}(J_{r_1}(\lambda_1),\cdots,J_{r_s}(\lambda_s))$. 因此 $r(A^k)=\sum\limits_{i=1}^{s}r(J_{r_i}^k(\lambda_i))$. 当 $\lambda_i\neq 0$ 时，$r(J_{r_i}^k(\lambda_i))=r(J_{r_i}^{k+1}(\lambda_i))$; 当 $\lambda_i=0$ 时，若 $k\geq r_i$, 则 $r(J_{r_i}^k(\lambda_i))=r(J_{r_i}^{k+1}(\lambda_i))=0$，若 $k<r_i$ 则 $r(J_{r_i}^k(\lambda_i))>r(J_{r_i}^{k+1}(\lambda_i))$. 因此 $r(A^k)=r(A^{k+1})$ 时，k 一定大于等于特征值为 0 的 $Jordan$ 块阶数，分析每个 $Jordan$ 块的秩 (考虑特征值是否非零)，自然有 $r(A^k)=r(A^{k+1})=r(A^{k+2})=\cdots$.

(法二) 设 $V_{A^k}=\{x\in\mathbb{F}^{n\times 1}:A^kx=0\}$，同理有 $V_{A^{k+1}}$. 易知 $V_{A^k}\subseteq V_{A^{k+1}}$, 又 $dimV_{A^k}=n-r(A^k)$ 及 $r(A^k)=r(A^{k+1})$, 知 $V_{A^k}=V_{A^{k+1}}$. 因此事实上，证明 $r(A^{k+1})=r(A^{k+2})$ 等价于证明 $V_{A^{k+1}}=V_{A^{k+2}}$. 又

显然有 $V_{A^{k+1}} \subseteq V_{A^{k+2}}$, 下面只需证明 $V_{A^{k+1}} \supseteq V_{A^{k+2}}$. 对任意 $x \in V_{A^{k+2}}$, 有 $A^{k+1}(Ax) = A^{k+2}x = 0$, 因此 $Ax \in V_{A^{k+1}} = V_{A^k}$, 故 $A^{k+1}x = A^k(Ax) = 0$, 因此 $x \in V_{A^{k+1}}$, 于是 $V_{A^{k+1}} \supseteq V_{A^{k+2}}$，命题得证.

推论 2.8

设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 则 A 可对角化等价于对任意 λ，$r(A-\lambda I) = r(A-\lambda I)^2$.

证明 必要性显然，由推论2.5及推论2.7必要性也显然.

习题 2.47

设 $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 10 & -4 & 5 \\ 5 & -4 & 6 \end{pmatrix}$, 求 A 的 Jordan 标准形.

解 $\det(\lambda I - A) = (\lambda-1)^2(\lambda-2)$. 经计算易得 $r(2I-A) = r(2I-A)^2 = 2$，由推论2.5及推论2.7特征值为 2 的 Jordan 块只有一个且为 1 阶.$r(I-A) = 2, r(I-A)^2 = r(I-A)^3 = 1$, 由推论2.5 及推论2.7知特征值为 1 的 Jordan 块只有一个且为 2 阶. 因此 A 的 Jordan 形为 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.