第六次作业

1 设 $A \in \mathbb{F}^{n\times n}, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$
(1) 求
$$\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & I_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -B & I_n \end{pmatrix}.$$
(2) 试用 (1) 及 *Laplace* 展开证明 $\det AB = \det A \cdot \det B$.

2 举例说明存在矩阵 A, B, 使得 $\det AB \neq \det BA$. 问：A, B 是否可取为方阵？

3 设
$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \text{其中 } b_i \neq 0, i = 1, \cdots, n \quad A = \begin{pmatrix} b_1 & & \\ & \ddots & \\ & & b_n \end{pmatrix}.$$
求 $\det(A - BB^T)$.

4 设 $A \in \mathbb{F}^{n\times m}, B \in \mathbb{F}^{m\times n}$. 证明：$\lambda^n \det(\lambda I_m - AB) = \lambda^m \det(\lambda I_n - BA)$.