第三章　矩阵及其运算

§3.1.　矩阵的代数运算

$$\mathbb{F}^{m\times n} = \{(a_{ij})_{m\times n} \mid a_{ij} \in \mathbb{F}\}$$

加法

$$+ : \mathbb{F}^{m\times n} \times \mathbb{F}^{m\times n} \longrightarrow \mathbb{F}^{m\times n}$$

$$(\underset{(a_{ij})}{\underset{\parallel}{A}}, \underset{(b_{ij})}{\underset{\parallel}{B}}) \longmapsto \underset{(c_{ij})_{m\times n}}{\underset{\parallel}{(A+B)_{m\times n}}} \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

<u>加法性质</u>：　$(\mathbb{F}^{m\times n}, +)$ 形成一个阿贝尔群，即：

群
(1) $(A+B)+C = A+(B+C)$　　$\forall A, B, C \in \mathbb{F}^{m\times n}$

(2) $A+O = O+A = A$，其中 $O = (a_{ij})$，$a_{ij} = 0 \ \forall i, j$.

(3) $A+(-A) = (-A)+A = O$，其中 $-A = (-a_{ij})_{m\times n}$

交换
(4) $A+B = B+A$

<u>注</u>　· 可定义矩阵减法　$A-B = A+(-B)$.

$$(a_{ij})_{m\times n} - (b_{ij})_{m\times n} = (a_{ij} - b_{ij})_{m\times n}$$

· 行数、列数相同的两个矩阵方可相加.

数乘

$$\cdot : \mathbb{F} \times \mathbb{F}^{m\times n} \longrightarrow \mathbb{F}^{m\times n}$$

$$(\lambda, A) \longmapsto \lambda A$$

$A = (a_{ij})_{m\times n}$.　　$\lambda A = (\lambda a_{ij})_{m\times n}$

<u>数乘性质</u>

(1) $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$

(2) $1_{\mathbb{F}} A = A$

(3) $(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$

(4) $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$

矩阵乘法

$A=(a_{ij})_{m\times n}$, $B=(b_{jk})_{n\times p}$ 则 $m\times p$ 阶矩阵 $(C_{ik})_{m\times p}$, $C_{ik}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$ $1\le i\le m$. $1\le k\le p$. 称为 A 与 B 的<u>乘积</u>

<u>例</u>: $A=(a_1,\cdots,a_n)\in F^{1\times n}$ $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}\in F^{n\times 1}$

则 $AB=(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)_{1\times 1}$

令 $A=\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}_{m\times n}$ $B=(\beta_1 \cdots \beta_p)$ $\alpha_i\in F^{1\times n}$ $\beta_j\in F^{n\times 1}$

则 $AB=(C_{ik})_{m\times p}$ $C_{ik}=\alpha_i\beta_k$

<u>例</u> $A=(a_1\ \ a_2)$ $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

则 $AB=(a_1b_1+a_2b_2)_{1\times 1}$ $BA=\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_2b_1 \\ a_1b_2 & a_2b_2 \end{pmatrix}$

<u>例</u> $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ $AB=0$, $BA=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$

<u>注</u> (1) 矩阵乘法不满足交换律.

(2) $AB=0 \not\Rightarrow A=0$ 或 $B=0$

<u>例</u> $A=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m \end{pmatrix}$ $B=(b_{ij})_{m\times n}$ $C=\begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix}$

$AB=\begin{pmatrix} \lambda_1b_{11} & \cdots & \lambda_1b_{1n} \\ \lambda_2b_{21} & \cdots & \lambda_2b_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_mb_{m1} & \cdots & \lambda_mb_{mn} \end{pmatrix}$ $BC=\begin{pmatrix} \mu_1b_{11} & \mu_2b_{12} & \cdots & \mu_nb_{1n} \\ \mu_1b_{21} & \mu_2b_{22} & & \mu_nb_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_1b_{m1} & \mu_2b_{m2} & & \mu_nb_{mn} \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}_{n\times n}$ 称为<u>对角阵</u>. 可记作 $\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$

$\mathrm{diag}(\lambda,\cdots\lambda)$ 称为<u>纯量阵</u>, 或<u>标量阵</u>

$\mathrm{diag}(\lambda,\cdots\lambda)=\lambda I_n$ $\mathrm{diag}(\lambda,\cdots,\lambda)A=\lambda A$

注：令 $E_{st}\in\mathbb{F}^{m\times n}$ 为 (s,t)-元为1，其他位置为0的矩阵。

$$E_{st}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ \cdots & & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np}\end{pmatrix} = \begin{array}{c} \\ \\ \leftarrow s\text{行} \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 0 & \cdots & & 0 \\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tp} \\ \cdots & & \cdots & \\ 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \\ a_{p1} & \cdots & a_{pm}\end{pmatrix} E_{st} = \begin{array}{c} t\text{列} \\ \begin{pmatrix} 0 & a_{s1} & \cdots & 0 \\ 0 & a_{s2} & & 0 \\ & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{p} & & 0\end{pmatrix}\end{array}$$

· $A=(a_{ij})_{m\times n}$ $\quad B=\begin{pmatrix}\beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n\end{pmatrix}$ $\quad \beta_j\in\mathbb{F}^{1\times p}$

$$\Rightarrow AB=\begin{pmatrix} a_{11}\beta_1+a_{12}\beta_2+\cdots+a_{1n}\beta_n \\ a_{21}\beta_1+a_{22}\beta_2+\cdots+a_{2n}\beta_n \\ \cdots \\ a_{m1}\beta_1+a_{m2}\beta_2+\cdots+a_{mn}\beta_n \end{pmatrix}$$

· $A=(\alpha_1 \cdots \alpha_n)$ $\quad B=(b_{jk})_{n\times p}$ $\quad \alpha_j\in\mathbb{F}^{m\times 1}$

$$\Rightarrow AB=(b_{11}\alpha_1+b_{21}\alpha_2+\cdots+b_{n1}\alpha_n,\ b_{12}\alpha_1+b_{22}\alpha_2+\cdots+b_{n2}\alpha_n,\ \cdots,\ b_{1p}\alpha_1+b_{2p}\alpha_2+\cdots+b_{np}\alpha_n)$$

乘法性质：

(1) $(AB)C=A(BC)$ $\quad \forall A\in\mathbb{F}^{m\times n}, B\in\mathbb{F}^{n\times p}, C\in\mathbb{F}^{p\times q}$

(2) $AI_n=I_mA=A$ $\quad \forall A\in\mathbb{F}^{m\times n}$, $I_n=\mathrm{diag}(1,\cdots,1)$

(3) $(A+A')B=AB+A'B$, $\quad \forall A,A'\in\mathbb{F}^{m\times n}$ $\quad B,B'\in\mathbb{F}^{n\times p}$

$A(B+B')=AB+AB'$

(4) $(\lambda A)\cdot B=A(\lambda B)=\lambda(AB)$ $\quad \forall A\in\mathbb{F}^{m\times n}$ $\quad B\in\mathbb{F}^{n\times p}$

例．$A\in\mathbb{R}^{2\times 2}$ $\quad A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$

$\mathcal{A}:\mathbb{R}^{2\times 1}\longrightarrow\mathbb{R}^{2\times 1}$ $\quad \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\longmapsto\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\triangleq\begin{pmatrix}ax+by \\ cx+dy\end{pmatrix}$

由上述乘法性质知

$$\mathcal{A}(\alpha+\beta)=\mathcal{A}(\alpha)+\mathcal{A}(\beta) \quad \forall \alpha,\beta\in\mathbb{R}^{2\times 1}, \forall\lambda\in\mathbb{R}$$

$$\mathcal{A}(\lambda\alpha)=\lambda\mathcal{A}(\alpha)$$

· $A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \\ & \lambda_2\end{pmatrix}$ $\quad \mathcal{A}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1 x \\ \lambda_2 y\end{pmatrix}$ ← x轴方向拉伸 λ_1 倍，y … … λ_2 …

· $A=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\cos\theta-y\sin\theta \\ x\sin\theta+y\cos\theta\end{pmatrix}$ ← 逆时针旋转 θ

定义1.1 称映射 $\mathscr{A}: \mathbb{F}^{n\times1} \to \mathbb{F}^{m\times1}$ 为线性映射，若

$$\mathscr{A}(\alpha+\beta) = \mathscr{A}(\alpha)+\mathscr{A}(\beta), \quad \mathscr{A}(\lambda\alpha) = \lambda\mathscr{A}(\alpha) \quad \forall \alpha,\beta\in\mathbb{F}^{n\times1}, \lambda\in\mathbb{F}.$$

记 $\mathcal{L}(\mathbb{F}^{n\times1}, \mathbb{F}^{m\times1})$ 为 $\mathbb{F}^{n\times1}$ 到 $\mathbb{F}^{m\times1}$ 的线性映射全体.

命题1.2 存在双射 $\Phi: \mathbb{F}^{m\times n} \to \mathcal{L}(\mathbb{F}^{n\times1}, \mathbb{F}^{m\times1})$,

$$A \mapsto \Phi(A) \qquad \Phi(A)(X) = AX, \forall X\in\mathbb{F}^{n\times1}$$

PF. 由乘法性质知 $\Phi(A) \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^{n\times1}, \mathbb{F}^{m\times1})$.

设 $\mathscr{A}\in\mathcal{L}(\mathbb{F}^{n\times1}, \mathbb{F}^{m\times1})$，令 $\alpha_i = \mathscr{A}e_i \in \mathbb{F}^{m\times1}$. 其中 $e_i = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\in\mathbb{F}^{n\times1}$ 为第 i 个标准向量. 取 $A = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{F}^{m\times n}$

可验证 $\mathscr{A} = \Phi(A)$，从而 Φ 为满射.

另一方面，若 $A, A'\in\mathbb{F}^{m\times n}$，使得 $\Phi(A) = \Phi(A')$.

即 $AX = A'X, \forall X\in\mathbb{F}^{1\times n}$，故 $AI_n = A'I_n \Rightarrow A = A'$

从而 Φ 为单射 #

注 设 $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$，$B\in\mathbb{F}^{n\times p}$，记 $\Phi(A): \mathbb{F}^{n\times1}\to\mathbb{F}^{m\times1}$

$\Phi(B): \mathbb{F}^{1\times p}\to\mathbb{F}^{1\times n}$，$\Phi(AB): \mathbb{F}^{1\times p}\to\mathbb{F}^{1\times m}$ 分别为

A、B、AB 按上述方式对应的线性映射

则有 $\Phi(AB) = \Phi(A)\circ\Phi(B)$

PF. 直接验证知 $\Phi(AB)(e_i) = (\Phi(A)\circ\Phi(B))(e_i)$, $\forall 1\le i\le p$.

其中 $e_i = \begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$ 为 i 分量为 1，其余分量为 0 的列向量.

$\boxed{\text{方阵的多项式}}$

设 $f(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{F}[x]$. 则对 $\forall A\in\mathbb{F}^{n\times n}$

令 $f(A) = a_m A^m + a_{m-1}A^{m-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I_n \in \mathbb{F}^{n\times n}$，称为多项式

$f(x)$ 在方阵 A 处的赋值，其中 $A^m = \underbrace{AA\cdots A}_{m\text{重}}$.

例 若 $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ $A^k = 0$，$\exists k>0$. 则

$$(I_n - A)(I_n + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}) = I_n - A^k = I_n$$

例. $A=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}\cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ 则

$$AB=\begin{pmatrix}\cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta)\end{pmatrix}$$

$$A=\cos\alpha\, I_2+\sin\alpha\cdot\begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix} \leftarrow J_2 \qquad J_2^2=-I_2$$

$$B=\cos\beta\, I_2+\sin\beta\, J_2$$

$$\begin{aligned}AB&=(\cos\alpha I_2+\sin\alpha\cdot J_2)(\cos\beta\cdot I_2+\sin\beta J_2)\\&=(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)I_2+(\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha)J_2\\&=\cos(\alpha+\beta)\cdot I_2+\sin(\alpha+\beta)J_2\end{aligned}$$

注. 考察 $l:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{R}^{2\times 2}$, 易验证 l 为单射 且满足

$a+b\sqrt{-1}\longmapsto\begin{pmatrix}a & b \\ -b & a\end{pmatrix}$

$$\begin{cases}l(z_1+z_2)=l(z_1)+l(z_2)\\ l(z_1\cdot z_2)=l(z_1)\cdot l(z_2)\end{cases}\quad\forall z_1,z_2\in\mathbb{C}$$

例 求 $x_{n+1}=a x_n+b x_{n-1}$ 通项公式

解. $\begin{pmatrix}x_{n+1}\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\1 & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_n\\x_{n-1}\end{pmatrix}=\cdots=\begin{pmatrix}a & b\\1 & \end{pmatrix}^n\begin{pmatrix}x_1\\x_0\end{pmatrix}$

只须求解 $\begin{pmatrix}a & b\\1 & \end{pmatrix}^n$

矩阵转置

$A=(a_{ij})_{m\times n}\in\mathbb{F}^{m\times n}$, $A^T=(b_{ij})_{n\times m}\in\mathbb{F}^{n\times m}$, $b_{ij}=a_{ji}$ $\begin{matrix}1\le i\le n\\1\le j\le m\end{matrix}$

称为 A 的<u>转置</u> (transpose), 易验证:

(1) $(A+B)^T=A^T+B^T$ $\forall A,B\in\mathbb{F}^{m\times n}$

(2) $(\lambda A)^T=\lambda A^T$ $\forall A\in\mathbb{F}^{m\times n}$ $\forall\lambda\in\mathbb{F}$

(3) $(AB)^T=B^TA^T$ $\forall A\in\mathbb{F}^{m\times n}, B\in\mathbb{F}^{n\times p}$

(4) $(A^T)^T=A$ $\forall A\in\mathbb{F}^{m\times n}$

(5) $\det A^T=\det A$ $\forall A\in\mathbb{F}^{n\times n}$

注. 若 $A^T=A$, 则称 A 为<u>对称方阵</u> (symmetric matrix)

$A^T=-A$. 则称 A 为<u>反对称方阵</u> (anti-symmetric matrix)

或 <u>斜对称方阵</u> (skew-symmetric)

例　X^TX 为对称阵　$\forall\, X\in\mathbb{F}^{m\times n}$

例　$X^TAX=0$　$\forall\, A^T=-A\in\mathbb{F}^{n\times n}$, $X\in\mathbb{F}^{n\times 1}$

例　$X\in\mathbb{F}^{n\times n}\ \Longrightarrow\ X=\underbrace{\frac{1}{2}(X+X^T)}_{\text{对称}}+\underbrace{\frac{1}{2}(X-X^T)}_{\text{反对称}}$

$\boxed{\text{复共轭}}$ (conjugate)

$A=(a_{ij})_{m\times n}\in\mathbb{C}^{m\times n}$, $\bar{A}=(b_{ij})_{m\times n}$, 其中 $b_{ij}=\overline{a_{ij}}$, 称为 A 的复共轭

可验证：(1) $\overline{A+B}=\bar{A}+\bar{B}$　(2) $\overline{\lambda A}=\bar{\lambda}\bar{A}$

(3) $\overline{AB}=\bar{A}\bar{B}$　(4) $\bar{A}^T=\overline{A^T}$

一般记 $A^H=\bar{A}^T$.

· 若 $A^H=A$, 则称 A 为 Hermite 阵

$A^H=-A$ 则称 A 为 反 Hermite 阵

例 · 实 Hermite 阵 即实对称阵

实反 Hermite 阵 即反对称阵

· A^HA 为 Hermite 阵, $\forall\, A\in\mathbb{C}^{m\times n}$

· $A=\underbrace{\frac{1}{2}(A+A^H)}_{\text{Hermite}}+\underbrace{\frac{1}{2}(A-A^H)}_{\text{反Hermite}}$

例　$A\in\mathbb{C}^{m\times n}$, $A\neq 0\ \Longrightarrow\ A^HA\neq 0$

$\boxed{\text{矩阵的分块运算}}$

例

$$\begin{array}{c} \\ r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_m \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} c_1 & c_2 & & c_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & \cdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{c} X \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\end{array}=\begin{array}{c} \beta \\ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}\end{array}$$

视每行为整体：$\begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_m \end{pmatrix}(X)=\begin{pmatrix} r_1X \\ r_2X \\ \vdots \\ r_mX \end{pmatrix}$

视 (x_j) 为 1×1 矩阵

$(c_j\cdot x_j)=\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}(x_j)=\begin{pmatrix} a_{1j}x_j \\ \vdots \\ a_{mj}x_j \end{pmatrix}=x_jc_j$

视每列为整体：$(c_1\ c_2\ \cdots\ c_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=(c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n)$

$=(x_1c_1+x_2c_2+\cdots+x_nc_n)$

· 设 $A=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}&\cdots&A_{1s}\\A_{21}&A_{22}&\cdots&A_{2s}\\ A_{r1}&A_{r2}&\cdots&A_{rs}\end{pmatrix}\in\mathbb{F}^{m\times n}$，则 $m_1,\dots,m_r,\ n_1,\dots,n_s>0$ 使得 $m_1+\cdots+m_r=m$，$n_1+\cdots+n_s=n$

称为 A 的一个分块方式，或称 A 为一个 $r\times s$ 分块矩阵，记作 $A=(A_{ij})_{r\times s}$.

其 (i,j)-块 $A_{ij}=A\begin{pmatrix}m_1+\cdots+m_{i-1}+1,\ \dots,\ m_1+\cdots+m_i\\ n_1+\cdots+n_{j-1}+1,\ \dots,\ n_1+\cdots+n_j\end{pmatrix}\in\mathbb{F}^{m_i\times n_i}$，$\forall\, i,j$

易验证：

(1) $\lambda(A_{ij})_{r\times s}=(\lambda A_{ij})_{r\times s}$

(2) $(A_{ij})_{r\times s}+(B_{ij})_{r\times s}=(A_{ij}+B_{ij})_{r\times s}$ 　A,B 有相同分块方式

例 $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$，$A=(c_1c_2\cdots c_n)$ 　$r=1$, $m_1=m$; $s=n$, $n_1=n_2=\cdots=n_s=1$

$A=\begin{pmatrix}r_1\\ \vdots\\ r_m\end{pmatrix}$ 　$r=m$, $m_1=\cdots=m_r=1$; $s=1$, $n_1=n$

分块矩阵乘法：

$$A=\begin{array}{cc}\begin{array}{c}m_1\{\\ m_2\{\end{array}&\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{pmatrix}\\ & \ \ n_1\quad\ n_2\end{array}\qquad B=\begin{array}{cc}\begin{array}{c}n_1\{\\ n_2\{\end{array}&\begin{pmatrix}B_{11}&B_{12}\\B_{21}&B_{22}\end{pmatrix}\\ & \ \ p_1\quad\ p_2\end{array}$$

则 $AB=\begin{pmatrix}A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21}&A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22}\\A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21}&A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22}\end{pmatrix}$

只须验证两边 (i,j)-元相等 $\forall\ 1\le i\le m_1+m_2$，$1\le j\le p_1+p_2$ 即可. 以 $1\le i\le m_1$，$p_1<j\le p_2$ 为例

左边的 (i,j)-元 $=(a_{i1}\cdots a_{i,n_1+n_2})\cdot\begin{pmatrix}b_{1j}\\ \vdots\\ b_{n_1+n_2,j}\end{pmatrix}$

$=\underbrace{a_{i1}b_{1j}+\cdots+a_{in_1}b_{n_1j}}+\underbrace{a_{i,n_1+1}b_{n_1+1,j}+\cdots+a_{i,n_1+n_2}b_{n_1+n_2,j}}$

$=A_{11}B_{12}$ 的 $(i,j-p_1)$ 元 $+$ $A_{12}B_{22}$ 的 $(i,j-p_1)$ 元

$=$ 右边的 (i,j) 元

其他情况类似. 一般地，我们有

命题 1.3 　设 $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$ 　$B\in\mathbb{F}^{n\times p}$

$A=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}&\cdots&A_{1s}\\ \cdots&&\cdots&\\ A_{r1}&A_{r2}&\cdots&A_{rs}\end{pmatrix}$ 　$B=\begin{pmatrix}B_{11}&\cdots&B_{1t}\\ \cdots&&\cdots\\ B_{s1}&\cdots&B_{st}\end{pmatrix}$ 　$A_{ij}\in\mathbb{F}^{m_i\times n_j}$，$B_{jk}\in\mathbb{F}^{n_j\times p_k}$

则 $AB=\begin{pmatrix}C_{11}&C_{12}&\cdots&C_{1t}\\C_{21}&C_{22}&\cdots&C_{2t}\\ \cdots&&\cdots&\\ C_{r1}&C_{r2}&\cdots&C_{rt}\end{pmatrix}$，$C_{ik}=\sum_{j=1}^{s}A_{ij}B_{jk}\in\mathbb{F}^{m_i\times p_k}$

例 · 准上三角阵 $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1r} \\ & A_{22} & \cdots & A_{2r} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & A_{rr} \end{pmatrix}$，类似地，准下三角

· 准对角阵 $\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_r \end{pmatrix}$ 记作 $\mathrm{diag}(A_1,\cdots,A_r)$

命题 1.5
$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} A_{11}^T & A_{21}^T & \cdots & A_{r1}^T \\ A_{12}^T & A_{22}^T & \cdots & A_{r2}^T \\ \vdots & & & \vdots \\ A_{1s}^T & A_{2s}^T & \cdots & A_{rs}^T \end{pmatrix}$$

例 $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ $A=(a_{ij})_{m\times n}=(A_1,\cdots,A_n)$，$B=(b_{ij})_{n\times p}=\begin{pmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_n \end{pmatrix}$

$\Lambda B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 B_1 \\ \vdots \\ \lambda_n B_n \end{pmatrix}$，$A\Lambda = (A_1 A_2 \cdots A_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} = (\lambda_1 A_1,\cdots,\lambda_n A_n)$

例 $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}_{n\times n}$ 求 $N^k = ?$

解：$\forall\ A_{n\times p}$. $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}$

$NA = \begin{pmatrix} A_2 \\ \vdots \\ A_n \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow N^2 = \begin{pmatrix} 0 & I_{n-2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，$N^3 = \begin{pmatrix} 0 & I_{n-3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\cdots \Longrightarrow N^k = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & I_{n-k} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & k<n \\ 0 & k\geq n \end{cases}$

例 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ $B\in\mathbb{F}^{p\times q}$ 则

$A\otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix}_{mp\times nq}$ 称为A与B的张量积

可证明：$A_1A_2\otimes B_1B_2 = (A_1\otimes B_1)(A_2\otimes B_2)$ $\forall\ A_1\in\mathbb{F}^{m\times n}, A_2\in\mathbb{F}^{n\times l}, B_1\in\mathbb{F}^{p\times q}, B_2\in\mathbb{F}^{q\times r}$

注. $A\in\mathbb{F}^{m\times n} \rightsquigarrow \mathcal{A}: \mathbb{F}^{n\times 1}\longrightarrow\mathbb{F}^{m\times 1}$

$A_{ij}\in\mathbb{F}^{m\times n} \rightsquigarrow \mathcal{A}_{ij}: \mathbb{F}^{n_j\times 1}\hookrightarrow \mathbb{F}^{n\times 1} = \begin{pmatrix} \mathbb{F}^{n_1\times 1} \\ \vdots \\ \mathbb{F}^{n_j\times 1} \\ \vdots \\ \mathbb{F}^{n_s\times 1} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \mathbb{F}^{m_1\times 1} \\ \vdots \\ \mathbb{F}^{m_i\times 1} \\ \vdots \\ \mathbb{F}^{m_r\times 1} \end{pmatrix} \twoheadrightarrow \mathbb{F}^{m_i\times 1}$

$\Longrightarrow A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \vdots & & & \vdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{pmatrix}$

例 $A=\begin{pmatrix}1&2&1&2\\-1&-2&-1&-2\\1&2&1&2\\-1&-2&-1&-2\end{pmatrix}$ 求 $A^n=?$ $n\geq 1$

解 $A=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}(1\ 2\ 1\ 2) \Rightarrow A^n=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}\left[(1\ 2\ 1\ 2)\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}\right]^{n-1}(1\ 2\ 1\ 2)=(-2)^{n-1}A$

矩阵的迹

定义1.5 $A\in \mathbb{F}^{n\times n}$ 的对角元之和称为 A 的迹 (trace)，记作 $\mathrm{tr}A$

令 $A=(a_{ij})_{n\times n}$. 则 $\mathrm{tr}A=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$.

命题1.6. (1) $\mathrm{tr}A=\mathrm{tr}A^T$, (2) $\mathrm{tr}(A+B)=\mathrm{tr}A+\mathrm{tr}B$

(3) $\mathrm{tr}(\lambda A)=\lambda\,\mathrm{tr}A$, (4) $\mathrm{tr}A^HA=0 \Rightarrow A=0\ \forall A\in\mathbb{C}^{n\times n}$

(5) $\mathrm{tr}AB=\mathrm{tr}BA$ $\forall A\in\mathbb{F}^{m\times n}, B\in\mathbb{F}^{n\times m}$

(6) $A=\begin{pmatrix}A_{11}&\cdots&A_{1r}\\A_{21}&\cdots&A_{2r}\\A_{r1}&\cdots&A_{rr}\end{pmatrix}$ 为分块阵, $A_{ii}\in\mathbb{F}^{n_i\times n_i}$, 则 $\mathrm{tr}A=\sum_{i=1}^{r}\mathrm{tr}A_{ii}$

PF (1), (2), (3), (6) 显然

(4) $\mathrm{tr}A^HA=\sum_{i,j}|a_{ij}|^2=0 \Rightarrow a_{ij}=0\ \forall i,j$

其中 $A=(a_{ij})_{m\times n}$

(5) $A=(a_{ij})_{m\times n}$ $B=(b_{jk})_{n\times m}$. 则

$\mathrm{tr}AB=\sum_{i=1}^{m}\underbrace{(AB)_{i,i}}_{AB\text{的}(i,i)\text{元}}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{ji}=\sum_{j=1}^{n}\underbrace{(BA)_{j,j}}_{BA\text{的}(j,j)\text{元}}=\mathrm{tr}BA$

注. 上述(2), (3) 表明 $\mathrm{tr}:\mathbb{F}^{n\times n}\longrightarrow\mathbb{F}$ 为线性映射

- 一般地, $\mathrm{tr}AB\neq\mathrm{tr}A\,\mathrm{tr}B$.

例 $A=B=I_2$. 则 $\mathrm{tr}A\,\mathrm{tr}B=4\neq 2=\mathrm{tr}(AB)$

例 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 则矩阵方程 $AX=0$, $X\in\mathbb{R}^{n\times p}$ 有解 $\Leftrightarrow A^TAX=0$ 有解

- "$\Rightarrow$" $AX=0 \Rightarrow A^TAX=0$.
- "$\Leftarrow$" $A^TAX=0 \Rightarrow X^TA^TAX=0 \Rightarrow \mathrm{tr}\,X^TA^TAX=0$

$\Rightarrow AX=0$ (由命题1.6(5)可得)

§3.2 Binet-Cauchy 公式

对单位阵进行初等行变换：

- 交换 I_n 的 i,j 两行： $P_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 0 & \cdots & 1 & \\ & \vdots & \ddots & \vdots & \\ & 1 & \cdots & 0 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$

- 将 I_n 的第 j 行乘以 λ 倍加到第 i 行 $T_{ij}(\lambda) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & & \lambda & \\ & \ddots & & \\ & & & 1 \end{pmatrix} & \leftarrow i \\ \quad\uparrow j & \end{array}$

- 将 I_n 的第 i 行乘以一个倍数 λ （不允许 λ 取 0） $D_i(\lambda) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{pmatrix} & \leftarrow i \end{array}$

注：令 E_{ij} 表示 (i,j)-分量为 1，其他位置为 0 的矩阵，则有

$$P_{ij} = I_n - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}, \quad T_{ij}(\lambda) = I_n + \lambda E_{ij}$$

$$D_i(\lambda) = I_n + (\lambda-1)E_{ii}$$

由行列式性质，$\det P_{ij} = -1$，$\det T_{ij}(\lambda) = 1$，$\det D_i(\lambda) = \lambda$

- 对 $B \in \mathbb{F}^{n\times p}$，易知

$P_{ij}B$：将 B 的 i,j 两行互换 $\qquad \det P_{ij}B = -\det B = \det P_{ij}\det B$

$D_i(\lambda)B$：将 B 的 i 行乘以 λ 倍 $\qquad \det D_i(\lambda)B = \lambda\det B = \det D_i(\lambda)\det B$

$T_{ij}(\lambda)B$：将 B 的第 j 行乘以 λ 倍加到第 i 行 $\det T_{ij}(\lambda)B = \det B = \det T_{ij}(\lambda)\det B$

对 $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$，有

AP_{ij}：将 A 的 i,j 两列互换

$AD_i(\lambda)$：将 A 的 i 列乘以 λ 倍，其他不动

$AT_{ij}(\lambda)$：将 A 的第 i 列乘以 λ 倍加到第 j 列。

$$\boxed{\begin{array}{l} \det AP = \det A \det P \\ P = P_{ij},\ D_i(\lambda) \text{或} \\ T_{ij}(\lambda) \end{array}}$$

更一般地，有

定理 2.1 设 $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$，则 $\det AB = \det A \det B$

证一：利用初等变换，任一矩阵可通过初等行、列变换转化成对角元为 1 或 0 的对角阵，从而 $A = P_1P_2\cdots P_r$，P_i 具有形式 P_{ij}，$T_{ij}(\lambda)$，$D_i(\lambda)$（λ 可取 0）的乘积，从而

$$\det AB = \det(P_1P_2\cdots P_rB) = \det P_1 \det(P_2\cdots P_rB)$$
$$= \cdots = \det P_1 \det P_2 \cdots \det P_r \det B$$
$$= \det(P_1\cdots P_r)\det B = \det A \det B.$$

证二 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ $B=\begin{pmatrix}B_1\\ B_n\end{pmatrix}$, $AB=\begin{pmatrix}C_1\\ C_n\end{pmatrix}$

$C_i = a_{i1}B_1+\cdots+a_{in}B_n \in F^{1\times n}$,

故 $\det AB = \det(C_1,\cdots,C_n)$
$$= \det\left(\sum_{j_1=1}^{n} a_{1j_1}B_{j_1},\ \cdots,\ \sum_{j_n=1}^{n} a_{nj_n}B_{j_n}\right)$$
$$= \sum_{j_1,j_2,\cdots j_n=1}^{n} a_{1j_1}\cdots a_{nj_n}\det(B_{j_1},\cdots,B_{j_n})$$
$$= \sum_{(j_1,\cdots,j_n)\in S_n} a_{1j_1}\cdots a_{nj_n}\cdot(-1)^{\tau(j_1,\cdots,j_n)}\det(B_1,\cdots,B_n)$$
$$= \sum_{(j_1,\cdots j_n)\in S_n}(-1)^{\tau(j_1,\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{nj_n}\ \det B$$
$$= \det A \det B.$$

类似证明方法知

定理2.2 (Binet-Cauchy公式) $A\in F^{m\times n}$, $B\in F^{n\times m}$, 则

$$\det AB = \begin{cases} 0 & m>n \\ \det A\det B & m=n \\ \displaystyle\sum_{1\le j_1<\cdots<j_m\le n} A\begin{pmatrix}1&2&\cdots&m\\ j_1&j_2&\cdots&j_m\end{pmatrix} B\begin{pmatrix}j_1&\cdots&j_m\\ 1&\cdots&m\end{pmatrix} & m<n\end{cases}$$

证一 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$, $B=\begin{pmatrix}B_1\\ B_n\end{pmatrix}$, $AB=\begin{pmatrix}C_1\\ C_m\end{pmatrix}$ 则同上有

$$\det AB = \sum_{j_1,j_2,\cdots j_m=1}^{n} a_{1j_1}\cdots a_{mj_m}\det(B_{j_1},\cdots,B_{j_m})$$ [=0 若 m<n]

[m≥n]
$$= \sum_{\substack{1\le k_1<k_2<\cdots<k_m\le n\\ (j_1,\cdots,j_m)\in S\{k_1,\cdots,k_m\}}} (-1)^{\tau(j_1,\cdots,j_m)}a_{1j_1}\cdots a_{mj_m}\det(B_{k_1},\cdots,B_{k_m})$$
$$= \sum_{1\le k_1<k_2<\cdots<k_m\le n}\left(\sum_{(j_1,\cdots,j_m)\in S\{k_1,\cdots,k_m\}}(-1)^{\tau(j_1,\cdots j_m)}a_{1j_1}\cdots a_{mj_m}\right) B\begin{pmatrix}k_1&\cdots&k_m\\ 1&\cdots&m\end{pmatrix}$$
$$= \sum_{1\le k_1<k_2<\cdots<k_m\le n} A\begin{pmatrix}1&\cdots&m\\ k_1&\cdots&k_m\end{pmatrix} B\begin{pmatrix}k_1&\cdots&k_m\\ 1&\cdots&m\end{pmatrix}$$ #.

证二 $\begin{pmatrix}I_n&-B\\ A&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I&B\\ &I\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}I&\\ A&AB\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \det\begin{pmatrix}I_n&-B\\ A&0\end{pmatrix} = \det(AB)$.

左边按后m行Laplace展开即可 (细节作为练习) #

利用 Binet-Cauchy 公式，可得

定理 2.3 $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$，$B\in\mathbb{F}^{n\times p}$ 则有

$$(AB)\begin{pmatrix}i_1\cdots i_r\\ j_1\cdots j_r\end{pmatrix}=\begin{cases}0 & r>n\\ \displaystyle\sum_{1\le k_1<k_2<\cdots<k_r\le n} A\begin{pmatrix}i_1\cdots i_r\\ k_1\cdots k_r\end{pmatrix}B\begin{pmatrix}k_1\cdots k_r\\ j_1\cdots j_r\end{pmatrix} & r\le n\end{cases}$$

PF $A=\begin{pmatrix}A_1\\ \vdots\\ A_m\end{pmatrix}$ $B=(B_1\ \cdots\ B_n)$ 则 $AB\begin{pmatrix}i_1\cdots i_r\\ j_1\cdots j_r\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{i_1}\\ \vdots\\ A_{i_r}\end{pmatrix}(B_{j_1}\cdots B_{j_r})$ #

例 $A=\begin{pmatrix}a_0 & a_1 & \cdots & a_n\\ a_n & a_0 & a_1 & \\ a_2 & & \ddots & a_1\\ a_1 & a_2 & a_n & a_0\end{pmatrix}$ 求 $\det A=?$

解 令 $N=\begin{pmatrix}0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1\\ 1 & & & 0\end{pmatrix}\in\mathbb{F}^{(n+1)\times(n+1)}$ 则 $N^k=\begin{pmatrix} & I_{n+1-k}\\ I_k & \end{pmatrix}$

$A=a_0I_n+a_1N+\cdots+a_nN^n$ 令 $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$

令 $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & \omega & \cdots & \omega^n\\ 1 & \omega^2 & \cdots & \omega^{2n}\\ \vdots & & & \vdots\\ 1 & \omega^n & \cdots & \omega^{n^2}\end{pmatrix}$ 则 $NB=\begin{pmatrix}1 & \omega & \cdots & \omega^n\\ 1 & \omega^2 & \cdots & \omega^{2n}\\ \vdots & & & \vdots\\ 1 & \omega^n & \cdots & \omega^{n^2}\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}=B\begin{pmatrix}1 & & & \\ & \omega & & \\ & & \omega^2 & \\ & & & \ddots\ \omega^n\end{pmatrix}$

$=B\Omega$

其中 ω 为 $n+1$ 次本原单位根

则 $N^kB=B\Omega^k$ $AB=f(N)B=Bf(\Omega)$

$\det B\neq 0\Rightarrow \det A=\det f(\Omega)=\prod_{k=0}^{n}f(\omega^k)$

例 $A=(a_{ij})$，$a_{ij}=(i,j)$ 求 $\det A$.

解 $(i,j)=\sum_{1\le k|(i,j)}\varphi(k)=\sum_{1\le k\le n}b_{ik}\varphi(k)b_{jk}$，其中 $b_{ik}=\begin{cases}1 & k|i\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

令 $B=(b_{ij})_{n\times n}$ 则 $A=B\begin{pmatrix}\varphi(1) & & \\ & \ddots & \\ & & \varphi(n)\end{pmatrix}B^T$

显然 B 为对角元为 1 的下三角阵，从而 $\det B=1$ 故

$\det A=\varphi(1)\cdots\varphi(n)$

例 $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$，$B\in\mathbb{F}^{n\times m}$ 则 $\det(I_m-AB)=\det(I_n-BA)$.

PF $\begin{pmatrix}I_m & A\\ B & I_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_m & -A\\ & I_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I & \\ & I-BA\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}I_m & A\\ B & I_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_m & \\ -B & I_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I_m-AB & A\\ & I_n\end{pmatrix}$

取行列式可知

$\det(I-BA)=\det\begin{pmatrix}I & \\ & I-BA\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}I_m & A\\ B & I_n\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}I_m-AB & A\\ & I_n\end{pmatrix}=\det(I-AB)$.

例　求行列式 $\begin{vmatrix} 1+a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & 1+a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \cdots & & \cdots & \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & 1+a_nb_n \end{vmatrix}$.

解　令 $A=\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$　$B=(-b_1,\cdots,-b_n)$

则 原式 $=\det(I_n-AB)=\det(I_1-BA)=1+a_1b_1+\cdots+a_nb_n$

例　$A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}$　$B=\begin{pmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \\ \vdots & \vdots \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$　则

$AB=\begin{pmatrix} \Sigma a_ic_i & \Sigma a_id_i \\ \Sigma b_ic_i & \Sigma b_id_i \end{pmatrix}$　故由 Binet-Cauchy 公式

$$\det AB = \Sigma a_ic_i\cdot\Sigma b_id_i - \Sigma b_ic_i\,\Sigma a_id_i$$
$$= \sum_{1\le s<t\le n} \begin{vmatrix} a_s & a_t \\ b_s & b_t \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} c_s & d_s \\ c_t & d_t \end{vmatrix}$$
$$= \sum_{1\le s<t\le n} (a_sb_t-a_tb_s)\cdot(c_sd_t-c_td_s)$$

特别地，若 $A=B^T\in\mathbb{R}^{2\times n}$，则有

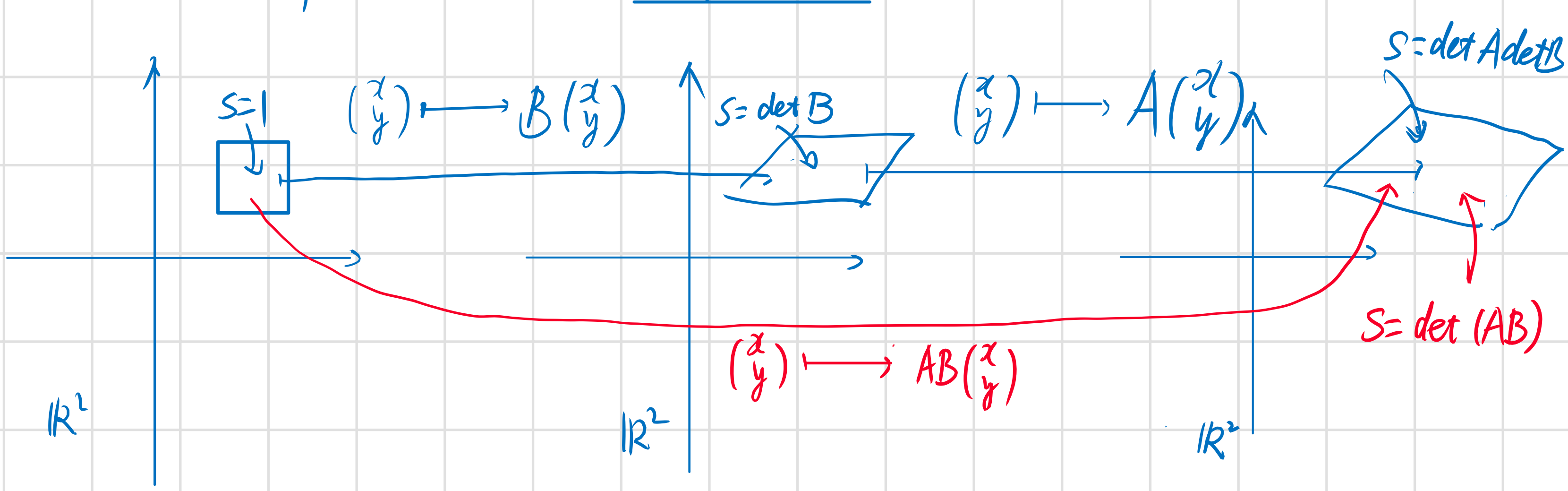
$$\Sigma a_i^2\,\Sigma b_i^2-(\Sigma a_ib_i)^2=\sum_{1\le s<t\le n}(a_sb_t-a_tb_s)^2\geq 0$$

即 $\Sigma a_i^2\,\Sigma b_i^2\geq(\Sigma a_ib_i)^2$

等号成立 $\Longleftrightarrow$ $a_sb_t=a_tb_s\ \ \forall\ s,t$ $\Longleftrightarrow$ $(a_1\cdots a_n)$，$(b_1\cdots b_n)$ 成比例

注　$A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ 则 $AA^T\begin{pmatrix} i_1\cdots i_r \\ i_1\cdots i_r \end{pmatrix}\geq 0$　$\forall\ 1\le i_1<\cdots<i_r\le m$.

注　行列式乘法公式几何意义：



§3.3 可逆矩阵

$\mathscr{A}: \mathbb{F}^{n\times1} \longrightarrow \mathbb{F}^{m\times1}$ 为线性映射 称 $\mathscr{A}$ 可逆，若存在映射 $\mathscr{B}: \mathbb{F}^{m\times1} \longrightarrow \mathbb{F}^{n\times1}$，使得 $\mathscr{B}\circ\mathscr{A} = Id_{\mathbb{F}^{n\times1}}$，$\mathscr{A}\circ\mathscr{B} = Id_{\mathbb{F}^{m\times1}}$ 此时 $\mathscr{B}$ 必为线性映射 $(\because \mathscr{B}x+\mathscr{B}y = \mathscr{B}\mathscr{A}(\mathscr{B}x+\mathscr{B}y) = \mathscr{B}(\mathscr{A}(\mathscr{B}x+\mathscr{B}y))$

$= \mathscr{B}(\mathscr{A}\mathscr{B}x + \mathscr{A}\mathscr{B}y) = \mathscr{B}(x+y)$

$\lambda\mathscr{B}x = \mathscr{B}\mathscr{A}(\lambda\mathscr{B}x) = \mathscr{B}(\lambda\mathscr{A}(\mathscr{B}x)) = \mathscr{B}(\lambda x)$.

由前面的对应，$\mathcal{L}(\mathbb{F}^{n\times1}, \mathbb{F}^{m\times1}) \xleftrightarrow{1-1} \mathbb{F}^{m\times n}$ 知 $\mathscr{A}$ 对应矩阵 $A_{m\times n}$. $\mathscr{B}$ 对应矩阵 $B_{n\times m}$. 且有

$AB = I_m \quad BA = I_n$

由此可引入可逆矩阵的概念

<u>定义3.1</u> $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$. 若存在 $B\in\mathbb{F}^{n\times m}$，使得 $AB=I_m$, $BA=I_n$. 则称 A <u>可逆</u>，B为A的一个<u>逆元</u>，或称 A, B <u>互逆</u>.

(invertible) (inverse)

<u>命题3.2</u> 若矩阵A的逆存在，则必唯一，记作 A^{-1}

Pf. 设 B_1, B_2 均为A的逆，则 $B_1 = B_1 I = B_1(AB_2) = (B_1A)B_2 = I\cdot B_2 = B_2$. #

<u>注</u>
- $(A^{-1})^{-1} = A \qquad (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.
- A, B 可逆，则 AB 可逆. 且 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

  特别地，A可逆，$0\neq\lambda\in\mathbb{F}$ 则 λA 可逆，$(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}$.
- $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ A可逆 $\Longrightarrow$ $\det A\neq 0$.

  $(1 = \det I_n = \det(AA^{-1}) = \det A \det A^{-1}, \Rightarrow \det A\neq0)$

<u>定义</u> $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$. 若 $\det A=0$ 则称A为<u>奇异方阵</u> (singular)，否则称A为非奇异阵.

上述表明可逆阵为非奇异阵. 下面说明反之也成立

另一方面，$\det A \neq 0$ 则 $AX=\beta$ 有唯一解，对 $\forall \beta \in \mathbb{F}^{n\times 1}$

从而存在一组唯一的 $X_1, \cdots, X_n \in \mathbb{F}^{n\times 1}$，使得

$$A(X_1, \cdots, X_n) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \ddots \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

(adjoint matrix)

由 Cramer 法则 $(X_1, \cdots, X_n) = \dfrac{A^*}{\det A}$ 其中 $A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & & A_{nn} \end{pmatrix}$ 为伴随阵.

定理 3.3 $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ 可逆，

$\iff$ A 为方阵，且 $\det A \neq 0$。此时 $A^{-1} = \dfrac{A^*}{\det A}$.

PF. "$\Leftarrow$" 由伴随阵定义知 $AA^* = A^*A = \det A\, I_n$，$\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ij}A_{kj} = \delta_i^j \det A\right)$

故当 A 非奇异时，$\dfrac{1}{\det A}A^* = A^{-1}$.

"$\Rightarrow$" 只须证 A 为方阵.

若 $m>n$，则 $\det AB = 0 \Rightarrow AB \neq I_n \quad \forall B \in \mathbb{F}^{n\times m}$

此时 A 不可逆。同理 $m<n$ 时，A 不可逆，故 $m=n$. ※

注. · $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$，若 $B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ 满足 $AB = I_n$ 则 A 可逆，且 $B = A^{-1}$.

· 若 A 可逆，则方程 $AX=\beta$，$\beta \in \mathbb{F}^{n\times 1}$ 有解 X，则有

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}\beta \implies X = A^{-1}\beta$$ 即方程有唯一解.

可验证 $X = \dfrac{1}{\det A}A^*\beta$ 即为 Cramer 法则.

$\boxed{\text{逆矩阵求法}}$

- $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} A^*$

  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{F})$ 则 $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

- 初等变换法.

  $AX = \beta \Rightarrow X = A^{-1}\beta \quad \forall \beta \in \mathbb{F}^{n\times 1}$

  $(A \vdots \beta)$ 通过一系列的初等行变换化为 $(I_n \vdots X)$ 的形式.

  即 $P_1P_2\cdots P_r(A \vdots \beta) = (I_n \vdots X)$

  $\Rightarrow P_1P_2\cdots P_r = A^{-1}$ 且 $A^{-1}\beta = X$ 即 $AX = \beta$.

  由此可得到方程 $AX = B$ 的初等变换求解方式.

  $\boxed{\text{对}(A, B)\text{进行系列初等行变换化为}(I_n, X)\text{形式 则 } AX = B}$.

<u>例</u> $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ 求 A^{-1}

<u>解</u>
$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & & & \\ & 1 & \cdots & 1 & & 1 & & \\ & & \ddots & \vdots & & & \ddots & \\ & & & 1 & & & & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[(n-1)-(n)]{(1)-(2),\ (2)-(3),\ \cdots} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & & & & 1 & -1 & & \\ & 1 & & & & 1 & -1 & \\ & & \ddots & & & & \ddots & -1 \\ & & & 1 & & & & 1 \end{array}\right)$$

即 $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & -1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}$.

<u>注</u> 令 $J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}_{n\times n}$. 则 $J_n^n = 1$.

$A = I_n + J_n + J_n^2 + \cdots + J_n^{n-1}$. $\quad A(I_n - J_n) = I_n - J_n^n = I_n$

<u>例</u> $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 求 A^{-1}

<u>解</u>
$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 & & & \\ 1 & 0 & \cdots & 1 & & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots & & & \ddots & \\ 1 & 1 & \cdots & 0 & & & & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} n-1 & n-1 & \cdots & n-1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 & & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots & & & \ddots & \\ 1 & 1 & \cdots & 0 & & & & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & \cdots & 1 & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} \\ 1 & 0 & \cdots & 1 & & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots & & & \ddots & \\ 1 & 1 & \cdots & 0 & & & & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & \cdots & 1 & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} \\ & -1 & & & \frac{-1}{n-1} & \frac{n-2}{n-1} & \cdots & \frac{-1}{n-1} \\ & & \ddots & & \vdots & & & \vdots \\ & & & -1 & \frac{-1}{n-1} & \frac{-1}{n-1} & \cdots & \frac{n-2}{n-1} \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & & & & \frac{2-n}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} \\ & -1 & & & \frac{-1}{n-1} & \frac{n-2}{n-1} & \cdots & \frac{-1}{n-1} \\ & & \ddots & & \vdots & & & \vdots \\ & & & -1 & \frac{-1}{n-1} & \frac{-1}{n-1} & \cdots & \frac{2-n}{n-1} \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & & & & \frac{2-n}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} \\ & 1 & & & \frac{1}{n-1} & \frac{2-n}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} \\ & & \ddots & & \vdots & & & \vdots \\ & & & 1 & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{2-n}{n-1} \end{array}\right)$$

<u>例2</u>　令 $N=\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}$　显然 $N^2=nN$.

而 $A=N-I$.　从而 $(A+I)^2=n(A+I)$

$\Longrightarrow \quad A^2+2A+I_n=nA+nI_n \Rightarrow A(A+(2-n)I_n)=(n-1)I_n$

$\Longrightarrow \quad A^{-1}=\frac{1}{n-1}(A+(2-n)I_n)=\frac{1}{n-1}\begin{pmatrix}2-n & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 2-n & \cdots & 1\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 2-n\end{pmatrix}$

<u>注</u>：一般地，$A\in F^{n\times n}$ 若 A 满足多项式 $f(x)=x^n+a_{n-1}x+\cdots+a_1x+a_0$，

其中 $a_0\neq 0$. 则有 $A(A^{n-1}+a_{n-1}A^{n-2}+\cdots+a_1I_n)=-a_0I_n$

$\Longrightarrow$ A 可逆，且 $A^{-1}=-\frac{1}{a_0}(A^{n-1}+a_{n-1}A^{n-2}+\cdots+a_1I_n)$.

若 $\det A\neq 0$，则 $\varphi_A(x)=\det(xI_n-A)$ 即为符合条件的多项式.

$\boxed{\text{分块矩阵的逆}}$

<u>例</u>　$S\in F^{m\times n}$，$A\in F^{m\times m}$　$B\in F^{n\times n}$　A, B 可逆 则

(1) $\begin{pmatrix}I_m & S\\ & I_n\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}I_m & -S\\ & I_n\end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix}A & S\\ & B\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}A^{-1} & -A^{-1}SB^{-1}\\ & B^{-1}\end{pmatrix}$.

<u>定理3.4</u>　(Schur公式)

(1) $\begin{pmatrix}I & \\ -CA^{-1} & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A & B\\ & D-CA^{-1}B\end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I & -A^{-1}B\\ & I\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A & \\ C & D-CA^{-1}B\end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix}I & \\ -CA^{-1} & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I & -A^{-1}B\\ & I\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A & \\ & D-CA^{-1}B\end{pmatrix}$

<u>例</u>　$A, B, C, D\in \mathbb{R}^n$　$AC=CA$　则

$\det\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}=\det(AD-CB)$.

<u>PF</u>　· 若 A 可逆，则由 Schur 公式

$\det\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}=\det A\det(D-CA^{-1}B)=\det(AD-ACA^{-1}B)$

$=\det(AD-CAA^{-1}B)=\det(AD-CB)$

· 对一般的 A 考察 $A_\lambda=\begin{pmatrix}A+\lambda I & B\\ C & D\end{pmatrix}$ 知

$\underset{f(\lambda)}{\det A_\lambda}$ 与 $\underset{g(\lambda)}{\det((A+\lambda I)D-CB)}$ 均为关于 λ 的多项式

$\det(A+\lambda I)\neq 0$ 时 $\quad \det A_\lambda = \det((A+\lambda I)D - CB)$

而 $\det(A+\lambda I)=0$ 至多有有限个解，从而 $\exists$ 无穷多个 $\lambda_0\in\mathbb{R}$

$f(\lambda_0) = g(\lambda_0)$ 即 $(f-g)(\lambda_0)=0$

另一方面，非0多项式只有有限个零点 即 $(f-g)(\lambda)=0$

$\Longrightarrow f(0)=g(0)$ 原式得证 #

例 $A=\begin{pmatrix} 0 & & & -a_n \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & -a_2 \\ & & 1 & -a_1 \end{pmatrix}$ 求 $\det(\lambda I_n - A)$

解 $\lambda I_n - A = \begin{pmatrix} \lambda & & & a_n \\ -1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & \lambda & a_2 \\ & & -1 & \lambda+a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda & B \\ C & D \end{pmatrix}$ $\quad \Lambda = \lambda I_{n-1} - \begin{pmatrix} 0 & & \\ 1 & \ddots & \\ & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} a_n \\ \vdots \\ a_2 \end{pmatrix}\in F^{(n-1)\times 1}$

$C=(0,\cdots,0,-1)\in F^{1\times(n-1)}$ $D=\lambda+a_1\in F^{1\times 1}$

记 $N=\begin{pmatrix} 0 & & \\ 1 & \ddots & \\ & 1 & 0 \end{pmatrix}\in F^{(n-1)\times(n-1)}$，$\Lambda = \lambda I_{n-1} - N = \lambda\left(I_{n-1}-\frac{N}{\lambda}\right)$

$$\Longrightarrow \Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda} & & & \\ \frac{1}{\lambda^2} & \frac{1}{\lambda} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \frac{1}{\lambda^{n-1}} & & \frac{1}{\lambda^2} & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix} \Rightarrow C\Lambda^{-1}B = -\left(\frac{a_n}{\lambda^{n-1}}+\frac{a_{n-1}}{\lambda^{n-2}}+\cdots+\frac{a_2}{\lambda}\right)$$

由 Schur 公式，
$$\det\begin{pmatrix} \Lambda & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det\Lambda\cdot\det(D-C\Lambda^{-1}B)$$
$$= \lambda^{n-1}\cdot\left(\lambda+a_1+\frac{a_2}{\lambda}+\cdots+\frac{a_n}{\lambda^{n-1}}\right)$$
$$= \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2}+\cdots+a_n.$$

例 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 的顺序主子式（即形如 $A\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & r \\ 1 & 2 & \cdots & r\end{pmatrix}$ 的子式）为正，且非对角元均为负数，则 A^{-1} 的每个元素为正.

证 · 对 n 归纳 $\quad n=1$ ✓

· 设结论对 $n-1$ 阶实方阵成立 $\quad$ 设 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 满足题中条件

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & \alpha \\ \beta^T & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \alpha,\beta\in F^{(n-1)\times 1} \Longrightarrow \begin{pmatrix} I_{n-1} & \\ -\beta^T A_1^{-1} & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} I_{n-1} & -A_1^{-1}\alpha \\ & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & \\ & a_{nn}-\beta^T A_1^{-1}\alpha \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} I_n & -A_1^{-1}\alpha \\ & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1^{-1} & \\ & \tilde{a}_{nn}^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_{n-1} & \\ -\beta^T A_1^{-1} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1^{-1}+\tilde{a}_{nn}^{-1}A_1^{-1}\alpha\beta^T A_1^{-1} & -\tilde{a}_{nn}^{-1}A_1^{-1}\alpha \\ -\tilde{a}_{11}^{-1}\beta^T A_1^{-1} & \tilde{a}_{11}^{-1} \end{pmatrix}$$

令 $\tilde{a}_{nn} = a_{nn}-\beta^T A_1^{-1}\alpha$，$\det A = \det A_1\,\tilde{a}_{nn} \Longrightarrow \tilde{a}_{nn}>0$ 即有 $-A_1^{-1}\alpha$，A_1^{-1}，$-\beta^T A_1^{-1}$，$\tilde{a}_{nn}^{-1}$ 中每个元素均为正数，从而 A^{-1} 中每个元素均为正数. #

§3.4 矩阵的秩与相抵

Recall: $T_{ij}(\lambda)$, P_{ij}, $D_i(\lambda)$ $(\lambda\neq 0)$ 称为初等方阵

$T_{ij}(\lambda)A$: 将 A 的第 j 行乘以 λ 倍加到第 i 行

$P_{ij}A$ 将 A 的 i,j 行互换

$D_i(\lambda)A$ 将 A 的第 i 行乘以一个非0倍数 λ

$AT_{ij}(\lambda)$ 将 A 的第 i 列乘以 λ 倍加到第 j 列

AP_{ij} 将 A 的 i,j 列互换

$AD_i(\lambda)$ 将 A 的第 i 列乘以一个非0倍数 λ

任一矩阵 A 可以通过一系列的初等行、列变换化成 $\begin{pmatrix}I_r & \\ & 0\end{pmatrix}$ 的形式.
或等价的存在一系列初等方阵 $P_1\cdots P_u$, $Q_1\cdots Q_v$ 使得

$$P_u\cdots P_1 A Q_1\cdots Q_v = \begin{pmatrix}I_r & \\ & 0\end{pmatrix}.$$

注 若 $A\in F^{n\times n}$ 可逆, 则 $\det A\neq 0$. 从而上述 $r=n$ 故有

A 可逆 $\Longleftrightarrow$ $A=P_1P_2\cdots P_u$, P_i 为初等阵.

问题: 对一般的 A, 上述 r 是否由 A 唯一确定?

设 $A=P_1\begin{pmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}Q_1 = P_2\begin{pmatrix}I_s & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}Q_2$ 即有

$P\begin{pmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}I_s & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}Q$ $\qquad P=P_2^{-1}P_1$, $Q=Q_2Q_1^{-1}$

若 $r<s$

$$s\{\begin{pmatrix}\overbrace{P_1}^{r} & P_2\\ P_3 & P_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} = s\{\begin{pmatrix}I_s & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\overbrace{Q_1}^{s} & Q_2\\ Q_3 & Q_4\end{pmatrix}\}s$$

$$\Rightarrow s\{\begin{pmatrix}P_1 & 0\\ \underbrace{P_3}_{r} & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}Q_1 & Q_2\\ \underbrace{0}_{s} & 0\end{pmatrix}\}s$$

$$\Longrightarrow Q = \begin{pmatrix}P_1\ \overbrace{0}^{s-r} & 0\\ Q_3 & Q_4\end{pmatrix} \Longrightarrow \det Q = 0,\ 矛盾.$$

同理 $s<r$ 矛盾.

定义4.1 $A, B \in \mathbb{F}^{m\times n}$ 若 A 可通过一系列的初等行、列变换变成 B，则称 A 与 B **相抵**

命题4.2 (1) 相抵为 $\mathbb{F}^{m\times n}$ 上的等价关系

(2) 对任一 $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$，存在唯一 r，使得 $A \sim \begin{pmatrix} I_r & \\ & 0 \end{pmatrix}$

PF (1) · $A \sim B \overset{\triangle}{\Longleftrightarrow} \exists\ P, Q$ 可逆 $PAQ = B$

$\Longleftrightarrow A = P^{-1}BQ^{-1} \overset{\triangle}{\Longleftrightarrow} B \sim A$

· $A\sim B \overset{\triangle}{\Longleftrightarrow} \exists\ P_1, Q_1$ 可逆 $P_1AQ_1 = B$

$B \sim C \overset{\triangle}{\Longleftrightarrow} \exists\ P_2, Q_2$ 可逆 $P_2BQ_2 = C$

$\Rightarrow (P_2P_1)A(Q_1Q_2) = C \overset{\triangle}{\Longleftrightarrow} A \sim C$

· $A = I_m \cdot A\, I_n \Longrightarrow A \sim A$ #

(2) 证明见上

注 命题中的 $\begin{pmatrix} I_r & \\ & 0 \end{pmatrix}$ 称为 A 的相抵标准形

定义4.3 (Sylvester 1851) $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ A 的非0子式的最高阶称为 A 的**秩** 记作 $rk(A)$.

显然，$rk(A) \le \min\{m, n\}$. $rk(A) = m$ **行满秩**

$rk(A) = n$ **列满秩**

注 $rk(A) = r \Longleftrightarrow A$ 的 $r+1$ 阶子式均为0，且存在 r 阶非0子式.

例 $rk\begin{pmatrix} I_r & * \\ & 0 \end{pmatrix} = r = rk\begin{pmatrix} I_r & \\ * & 0 \end{pmatrix}$

· $(P_{ij}A)\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_r \\ j_1 & \cdots & j_r \end{pmatrix} = \begin{cases} A\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_r \\ j_1 & \cdots & j_r \end{pmatrix} & i, j \notin \{i_1, \cdots, i_r\} \\ \pm A\begin{pmatrix} i_1 \cdots i_{k-1}, j, i_{k+1} \cdots i_r \\ j_1 \quad \cdots \quad \cdots \quad j_r \end{pmatrix} & i = i_k,\quad j \notin \{i_1, \cdots, i_r\} \\ -A\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_r \\ j_1 & \cdots & j_r \end{pmatrix} & i, j \notin \{i_1, \cdots, i_r\} \end{cases}$

· $(T_{ij}(\lambda)A)\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_r \\ j_1 & \cdots & j_r \end{pmatrix} = \begin{cases} A\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_r \\ j_1 & \cdots & j_r \end{pmatrix} & i \notin \{i_1, \cdots, i_r\} \\ A\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_r \\ j_1 & \cdots & j_r \end{pmatrix} + \lambda A\begin{pmatrix} i_1 \cdots i_{k-1}, j, i_{k+1} \cdots i_r \\ j_1 \quad \cdots \quad \cdots \quad j_r \end{pmatrix} & i = i_k,\ j \notin \{i_1, \cdots, i_r\} \\ A\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_r \\ j_1 & \cdots & j_r \end{pmatrix} & i, j \in \{i_1, \cdots, i_r\} \end{cases}$

$$(D_i(\lambda)A)\begin{pmatrix} i_1 \cdots i_r \\ j_1 \cdots j_r \end{pmatrix} = \begin{cases} \lambda A\begin{pmatrix} i_1 \cdots i_r \\ j_1 \cdots j_r \end{pmatrix} & i\in\{i_1,\cdots,i_r\} \\ A\begin{pmatrix} i_1 \cdots i_r \\ j_1 \cdots j_r \end{pmatrix} & i\notin\{i_1,\cdots,i_r\} \end{cases}$$

由上述分析知 $\mathrm{rk}\,PA \le \mathrm{rk}A$，若 $P=P_{ij},\ T_{ij}(\lambda)$ 或 $D_i(\lambda)$

而任一矩阵可写成上述几类矩阵的乘积，故有

命题4.4 $\mathrm{rk}\,AB \le \mathrm{rk}A \qquad \mathrm{rk}AB \le \mathrm{rk}B$

PF 一个直接的证明是利用 Binet-Cauchy 公式：

$$(AB)\begin{pmatrix} i_1 \cdots i_r \\ j_1 \cdots j_r \end{pmatrix} = \sum_{1\le k_1<\cdots<k_r\le n} A\begin{pmatrix} i_1 \cdots i_r \\ k_1 \cdots k_r \end{pmatrix} B\begin{pmatrix} k_1 \cdots k_r \\ j_1 \cdots j_r \end{pmatrix}$$ #

命题4.5 $P\in GL_m(\mathbb{F}),\ Q\in GL_n(\mathbb{F}) \quad A\in \mathbb{F}^{m\times n}$ 则

$\mathrm{rk}(PAQ) = \mathrm{rk}(A)$

PF $\mathrm{rk}(PA) \le \mathrm{rk}(A) \le \mathrm{rk}(P^{-1}(PA)) \le \mathrm{rk}(PA)$

$\Rightarrow \mathrm{rk}(PA) = \mathrm{rk}(A)$，同理，$\mathrm{rk}(AQ) = \mathrm{rk}(A)$，

$\mathrm{rk}(PAQ) = \mathrm{rk}(A)$. #

推论4.6 A 的相抵标准形为 $\begin{pmatrix} I_{\mathrm{rk}(A)} & \\ & 0 \end{pmatrix}$

推论4.7 $A \overset{\text{相抵}}{\sim} B \iff \mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(B)$.

$\mathbb{F}^{m\times n}$ 的相抵类（完全代表元系）：$0,\ \begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} I_2 & \\ & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} I_{\min(m,n)} & \\ & 0 \end{pmatrix}$

例 · $\mathrm{rk}A=0 \iff A=0$

· $\mathrm{rk}A = 1 \iff A = XY \qquad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \quad Y=(y_1 \cdots y_n)$

$\left(A = P\begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix}Q = \begin{pmatrix} P_{11} & \\ \vdots & 0 \\ P_{m1} & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q_{11} \cdots Q_{1n} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11} \\ \vdots \\ P_{m1} \end{pmatrix}(Q_{11} \cdots Q_{1n}) \right)$

· $\mathrm{rk}A = r \iff A = BC,\quad B=\mathbb{F}^{m\times r}$ 列满秩，$C=\mathbb{F}^{r\times n}$ 行满秩.

事实上 $rk(A)=r \Rightarrow A = P\begin{pmatrix} I_r & \\ & 0\end{pmatrix} Q$

$\Rightarrow A = P\begin{pmatrix} I_r \\ 0\end{pmatrix} (I_r\ 0)\, Q$

取 $B = P\begin{pmatrix} I_r \\ 0\end{pmatrix}$. $C = (I_r\ 0)\, Q$ 即可

另一方面，B 列满秩 $\Leftrightarrow B = P\begin{pmatrix} I_r \\ 0\end{pmatrix}$.

C 行满秩 $\Leftrightarrow C = (I_r\ 0) Q$,

故 $rk(BC) = rk\left(P\begin{pmatrix} I_r \\ 0\end{pmatrix}(I_r\ 0)Q\right) = rk\left(P\begin{pmatrix} I_r & \\ & 0\end{pmatrix}Q\right) = r$

例 $A \in F^{n\times n}$, $rk(A) = r$. 则 $\exists B \in F^{n\times n}$, $rk(B) = n-r$, 且 $AB=BA=0$

解: $A = P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix} Q$. 令 $B = Q^{-1}\begin{pmatrix} 0 & \\ & I_{n-r}\end{pmatrix} P^{-1}$ 即可.

例 (1) $rk\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B\end{pmatrix} = rkA + rkB$

(2) $rk\begin{pmatrix} A & \\ C & B\end{pmatrix} \geq rkA + rkB$

(3) $rk\, A\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_p \\ j_1 & \cdots & j_q\end{pmatrix} \leq rk A$

PF (1) 设 A_1 为 A 非0子式，B_1 为 B 非0子式

$\Rightarrow \begin{pmatrix} A_1 & \\ & B_1\end{pmatrix}$ 为 $\begin{pmatrix} A & \\ & B\end{pmatrix}$ 的非0子式 $\Rightarrow rk\begin{pmatrix} A & \\ & B\end{pmatrix} \geq rk(A) + rk(B)$

反之，设 X 为 $\begin{pmatrix} A & \\ & B\end{pmatrix}$ 非0子式，则 $X = \begin{pmatrix} X_1 & \\ & X_2\end{pmatrix}$

其中 X_1 为 X 与 A 的交，X_2 为 X 与 B 的交，此时 X_1, X_2 必为方阵，否则 $\det X = 0$，故 X_1, X_2 分别为 A, B 的非0子式，

即有 $rk\begin{pmatrix} A & \\ & B\end{pmatrix} \leq rk(A) + rk(B)$

(2) 设 A 有非0子式 X_1，B 有非0子式 X_2 则 $\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B\end{pmatrix}$ 有非0子式

形如 $\begin{pmatrix} X_1 & \\ * & X_2\end{pmatrix}$ 故 $rk\begin{pmatrix} A & \\ C & B\end{pmatrix} \geq rk(A) + rk(B)$

(3) 显然 A 的子式的子式均为 A 的子式. 　证

例 $rk(A+B) \leq rk(A) + rk(B)$

PF $rk\begin{pmatrix} A & \\ B & B\end{pmatrix} = rk\left(\begin{pmatrix} A & \\ B & B\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & \\ -I & I\end{pmatrix}\right) = rk\begin{pmatrix} A & \\ & B\end{pmatrix} = rk(A) + rk(B)$

$\|$

$rk\left(\begin{pmatrix} I & \\ I & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & \\ B & B\end{pmatrix}\right) = rk\begin{pmatrix} A & \\ A+B & B\end{pmatrix} \geq rk(A+B)$ 　证

例 (Frobenius 秩不等式) $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$, $B\in\mathbb{F}^{n\times p}$, $C\in\mathbb{F}^{p\times q}$

则 $rk(AB)+rk(BC)\leq rk(ABC)+rk(B)$

PF
$$\begin{pmatrix}ABC & \\ & B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I & \\ C & I\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ABC & \\ BC & B\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}I & -A\\ & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}ABC & \\ BC & B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} & -AB\\ BC & B\end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow rk(ABC)+rk(B)=rk\begin{pmatrix}ABC & \\ & B\end{pmatrix}=rk\begin{pmatrix} & -AB\\ BC & B\end{pmatrix}\geq rk(BC)+rk(AB) \quad \#$$

取 $B=I_n$ 则有 Sylvester 秩不等式:
$$rk(A)+rk(C)-n\leq rk(AC)$$

例 $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$, $B\in\mathbb{F}^{n\times m}$, λ 为不定元, 则
$$\lambda^n\det(\lambda I_m-AB)=\lambda^n\det(\lambda I_n-BA)$$

PF 设 $rk(A)=r$

(i) 若 $A=\begin{pmatrix}I_r & \\ & 0\end{pmatrix}$ 令 $B=\begin{pmatrix}B_1 & B_2\\ B_3 & B_4\end{pmatrix}$, $B_1\in\mathbb{F}^{r\times r}$ 则
$$\lambda^n\det(\lambda I_m-AB)=\lambda^n\det\begin{pmatrix}\lambda I_r-B_1 & -B_2\\ & \lambda I_{m-r}\end{pmatrix}=\lambda^{m+n-r}\det(\lambda I_r-B_1)$$
$$\lambda^m\det(\lambda I_n-BA)=\lambda^m\det\begin{pmatrix}\lambda I_r-B_1 & \\ -B_3 & \lambda I_{n-r}\end{pmatrix}=\lambda^{m+n-r}\det(\lambda I_r-B_1).$$
结论成立

(ii) $A=P\begin{pmatrix}I_r & \\ & 0\end{pmatrix}Q$. $P\in GL_m(\mathbb{F})$ $Q\in GL_n(\mathbb{F})$
$$\lambda^n\det(\lambda I_m-AB)=\lambda^n\det\left(P\left(\lambda I_m-\begin{pmatrix}I_r & \\ & 0\end{pmatrix}QBP\right)P^{-1}\right)$$
$$=\lambda^n\det\left(\lambda I_m-\begin{pmatrix}I_r & \\ & 0\end{pmatrix}QBP\right)$$
$$\lambda^m\det(\lambda I_n-BA)=\lambda^m\det\left(Q^{-1}\left(\lambda I_n-QBP\begin{pmatrix}I_r & \\ & 0\end{pmatrix}\right)Q\right)$$
$$=\lambda^m\det\left(\lambda I_n-QBP\begin{pmatrix}I_r & \\ & 0\end{pmatrix}\right)$$
由 (i) 知 $\lambda^n\det(\lambda I_m-AB)=\lambda^m\det(\lambda I_n-BA)$. #

例 $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$ 求所有 $X\in\mathbb{F}^{m\times n}$, 使得 $A^TX=X^TA$

解 (i) $A=\begin{pmatrix}I_r & \\ & 0\end{pmatrix}$ 令 $X=\begin{pmatrix}X_1 & X_2\\ X_3 & X_4\end{pmatrix}$ $X_1\in\mathbb{F}^{r\times r}$ 则
$$A^TX=\begin{pmatrix}I_r & \\ & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_1 & X_2\\ X_3 & X_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X_1 & X_2\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$
$$X^TA=\begin{pmatrix}X_1^T & 0\\ X_2^T & 0\end{pmatrix} \qquad A^TX=X^TA\Rightarrow X_1=X_1^T,\ X_2=0,\ X_3, X_4 \text{ 任取}$$

(ii) $A = P\begin{pmatrix} I_r & \\ & 0\end{pmatrix} Q.$ $P \in GL_n(\mathbb{F})$ $Q \in GL_n(\mathbb{F})$

$$A^T X = Q^T\begin{pmatrix} I_r & \\ & 0\end{pmatrix} P^T X = X^T A = X^T P\begin{pmatrix} I_r & \\ & 0\end{pmatrix} Q$$

即 $$Q^T\begin{pmatrix} I_r & \\ & 0\end{pmatrix} P^T X = X^T P\begin{pmatrix} I_r & \\ & 0\end{pmatrix} Q$$

$$\begin{pmatrix} I_r & \\ & 0\end{pmatrix} P^T X Q^{-1} = (Q^{-1})^T X^T P\begin{pmatrix} I_r & \\ & 0\end{pmatrix} = (P^T X Q^{-1})^T \begin{pmatrix} I_r & \\ & 0\end{pmatrix}$$

$\overset{\text{由(i)}}{\Longrightarrow}$ $P^T X Q^{-1} = \begin{pmatrix} Y_1 & \\ Y_3 & Y_4\end{pmatrix}$ $Y_1 = Y_1^T \in \mathbb{F}^{r\times r}$, $Y_3 \in \mathbb{F}^{(m-r)\times r}$, $Y_4 \in \mathbb{F}^{(m-r)\times(n-r)}$

$\Longrightarrow$ $X = (P^T)^{-1}\begin{pmatrix} Y_1 & \\ Y_3 & Y_4\end{pmatrix} Q.$

例 $S^T = S \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\operatorname{rk} S = r \Rightarrow S$ 有一个非0 r 阶主子式. 且 S 所有主子式同号

PF (i) $S^T = S$, $\operatorname{rk} S = r \Longrightarrow S = P\begin{pmatrix} X & \\ & 0\end{pmatrix} P^T$ 其中 $X \in GL_r(\mathbb{F})$.

事实上, $S = P\begin{pmatrix} I_r & \\ & 0\end{pmatrix} Q = Q^T\begin{pmatrix} I_r & \\ & 0\end{pmatrix} P^T = S^T$

$\Longrightarrow$ $\begin{pmatrix} I_r & \\ & 0\end{pmatrix}(P^{-1}Q^T)^T = (P^{-1}Q^T)\begin{pmatrix} I_r & \\ & 0\end{pmatrix}$

令 $R = P^{-1}Q^T = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22}\end{pmatrix}$

则 $\begin{pmatrix} R_{11} & 0 \\ R_{21} & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11}^T & R_{21}^T \\ 0 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} R_{11} = R_{11}^T \\ R_{21} = 0\end{cases}$

$\Rightarrow$ $P^{-1}Q^T = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ & R_{22}\end{pmatrix}$ $R_{11}^T = R_{11}$

$\Rightarrow$ $Q^T = P\begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ & R_{22}\end{pmatrix} \Longrightarrow Q = \begin{pmatrix} R_{11}^T & \\ R_{12}^T & R_{22}^T\end{pmatrix} P^T$

$\Rightarrow$ $S = P\begin{pmatrix} I_r & \\ & 0\end{pmatrix} Q = P\begin{pmatrix} I_r & \\ & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} R_{11}^T & \\ R_{12}^T & R_{22}^T\end{pmatrix} P^T$

$$= P\begin{pmatrix} R_{11}^T & \\ & 0\end{pmatrix} P^T = P\begin{pmatrix} R_{11} & \\ & 0\end{pmatrix} P^T$$

比较秩知 $\operatorname{rk}(R_{11}) = r$ 即 R_{11} 为可逆对称阵

(ii) 由 Binet-Cauchy 公式

$$S\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_r \\ i_1 & \cdots & i_r\end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_r \\ 1 & \cdots & r\end{pmatrix} \det R_{11}\, P^T\begin{pmatrix} 1 & \cdots & r \\ i_1 & \cdots & i_r\end{pmatrix}$$

$$= P\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_r \\ 1 & \cdots & r\end{pmatrix}^2 \det R_{11}$$

若所有 $P\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_r \\ 1 & \cdots & r\end{pmatrix} = 0$, 则将 P 按前 r 列展开有 $\det P = 0$,

与 P 可逆矛盾. 故存在 $P\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_r \\ 1 & \cdots & r\end{pmatrix} \neq 0$ 从而

$$S\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_r \\ i_1 & \cdots & i_r\end{pmatrix} \neq 0$$

最后. 所有非0主子式均与 $\det R_{11}$ 同号 #

例 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ $\quad A^2=A \quad\Rightarrow\quad rk(A)=trA$

PF $\quad A=P\begin{pmatrix}I_r&\\&0\end{pmatrix}Q \qquad A^2=A$

$\Rightarrow P\begin{pmatrix}I_r&\\&0\end{pmatrix}QP\begin{pmatrix}I_r&\\&0\end{pmatrix}Q=P\begin{pmatrix}I_r&\\&0\end{pmatrix}Q$

$\Rightarrow \begin{pmatrix}I_r&\\&0\end{pmatrix}QP\begin{pmatrix}I_r&\\&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I_r&\\&0\end{pmatrix}$, 令 $QP=\begin{pmatrix}R_1&R_2\\R_3&R_4\end{pmatrix}=R$

$\Rightarrow R_1=I_r$,

$\Rightarrow trA=tr\left(P\begin{pmatrix}I_r&\\&0\end{pmatrix}Q\right)=tr\left(\begin{pmatrix}I_r&\\&0\end{pmatrix}QP\right)=tr\begin{pmatrix}I_r&R_2\\0&0\end{pmatrix}=r=rk(A)$.

例 $A_1+A_2=I_n$, 则 $A_1^2=A_1$ $(\Leftrightarrow A_2^2=A_2)$ $\Leftrightarrow rk(A_1)+rk(A_2)=n$

PF "$\Rightarrow$" 由上例可知 $rk(A_1)=trA_1$. $\quad rk(A_2)=trA_2$

故 $rk(A_1)+rk(A_2)=tr(A_1)+tr(A_2)=tr(A_1+A_2)=n$

"$\Leftarrow$" 证一: $\quad A_1=P\begin{pmatrix}I_r&\\&0\end{pmatrix}Q \qquad A_1^2=A_1\Leftrightarrow (P^{-1}A_1P)^2=P^{-1}A_1P$

令 $\tilde{A}_1=P^{-1}A_1P \qquad \tilde{A}_2=P^{-1}A_2P$ 则

$\tilde{A}_1+\tilde{A}_2=I_n$, $\quad rk\tilde{A}_1+rk\tilde{A}_2=n$

令 $QP=\begin{pmatrix}R_1&R_2\\R_3&R_4\end{pmatrix}$. 则 $\tilde{A}_1=\begin{pmatrix}I_r&\\&0\end{pmatrix}QP=\begin{pmatrix}R_1&R_2\\0&0\end{pmatrix}$

$rk(\tilde{A}_2)=rk\begin{pmatrix}I_r-R_1&-R_2\\&I_{n-r}\end{pmatrix}\geq n-r+rk(I_r-R_1)$

从而 $rk(\tilde{A}_1)+rk(\tilde{A}_2)\geq n-r+rk(I_r-R_1)+r$

$\Rightarrow rk(I_r-R_1)\leq 0 \Rightarrow rk(I_r-R_1)=0\Rightarrow R_1=I_r$

$\Rightarrow \tilde{A}_1=\begin{pmatrix}I_r&R_2\\0&0\end{pmatrix}$, 易验证 $\tilde{A}_1^2=\tilde{A}_1$

证二: $\quad rk(A)+rk(I_n-A)=n$

$\begin{pmatrix}I&\\I&I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A&\\&I-A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I&I\\&I\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A&\\A&I-A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I&I\\&I\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A&A\\A&I\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}A&A\\A&I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I&\\-A&I\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A-A^2&A\\&I\end{pmatrix}$

$\Rightarrow n=rk\begin{pmatrix}A&\\&I-A\end{pmatrix}\geq rk(A-A^2)+n$

$\Rightarrow rk(A-A^2)=0 \Rightarrow A-A^2=0$ 即 $A^2=A$

思考题 $\quad A_1,\cdots,A_k\in\mathbb{R}^{n\times n} \quad A_1+\cdots+A_k=I_n$ 则

$A_i^2=A_i,\ i=1,\cdots k \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{k}rk(A_i)=n$.

PF "$\Rightarrow$" 同上. "$\Leftarrow$" $n=rk(A_1+(A_2+\cdots+A_k))\leq rkA_1+rk(A_2+\cdots+A_k)\leq\sum_{i=1}^{k}rk(A_i)=n\Rightarrow rk(A_1)+rk(I_n-A_1)=n$

#

例 (Roth 1952) $A\in F^{m\times n}$, $B\in F^{p\times q}$, $C\in F^{m\times q}$, $X\in F^{n\times q}$, $Y\in F^{m\times p}$

则 $AX-YB=C$ 有解 $\Longleftrightarrow$ $\begin{pmatrix}A&\\&B\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}A&C\\&B\end{pmatrix}$ 相抵

PF "$\Longrightarrow$" 设 X, Y 为一组解 则

$$\begin{pmatrix}I_m&-Y\\&I_p\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A&\\&B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I&X\\&I\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A&AX-YB\\&B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A&C\\&B\end{pmatrix}$$

"$\Longleftarrow$" · 首先对 $A=\begin{pmatrix}I_r&\\&0\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}I_s&\\&0\end{pmatrix}$ 情形进行证明

设 $\left(\begin{array}{cc|cc}I_r&&\multicolumn{2}{c}{W}\\&0&&\\\hline&&I_s&\\&&&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|cc}I_r&&&\\&0&&\\\hline&&I_s&\\&&&0\end{array}\right)$ 设 $W=\begin{array}{c}\overbrace{\quad}^{s}\\\begin{pmatrix}W_{11}&W_{12}\\W_{21}&W_{22}\end{pmatrix}\end{array}\}r$

其中 $W_{11}\in F^{r\times s}$, $W_{12}\in F^{r\times(q-s)}$ $W_{21}\in F^{(m-r)\times s}$ $W_{22}\in F^{(m-r)\times(q-s)}$

由于 $rk\left(\begin{array}{cc|cc}I_r&&W_{11}&W_{12}\\&0&W_{21}&W_{22}\\\hline&&I_s&\\&&&0\end{array}\right)=r+s\Longrightarrow W_{22}=0$

$$\left(r+s=rk\begin{pmatrix}I_r&&W_{11}&W_{12}\\&0&W_{21}&W_{22}\\&&I_s&\\&&&0\end{pmatrix}\geq r+rk\begin{pmatrix}W_{21}&W_{22}\\I_s&\end{pmatrix}\geq r+s+rk\,W_{22}\right)$$

容易看出 $\begin{pmatrix}W_{11}&W_{12}\\W_{21}&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}W_{11}&W_{12}\\&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&\\-W_{12}&0\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}I_r&\\&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}W_{11}&W_{12}\\&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&\\-W_{2}&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}I_s&\\&0\end{pmatrix}$$

即 $W=AX-YB$ 有解.

· 下面考虑一般的 A, B. 设 $rk(A)=r$, $rk(B)=s$

则存在可逆阵 $P\in F^{m\times m}$, $Q\in F^{n\times n}$, $R\in F^{p\times p}$, $S\in F^{q\times q}$.

使得 $PAQ=\begin{pmatrix}I_r&\\&0\end{pmatrix}$ $RBS=\begin{pmatrix}I_s&\\&0\end{pmatrix}$ 从而

$$\begin{pmatrix}P&\\&R\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A&\\&B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Q&\\&S\end{pmatrix}\overset{\text{相抵}}{\sim}\begin{pmatrix}P&\\&R\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A&C\\&B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Q&\\&S\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc}\|&&\|\\\left(\begin{array}{c|c}\begin{matrix}I_r&\\&0\end{matrix}&\\\hline&\begin{matrix}I_s&\\&0\end{matrix}\end{array}\right)&&\left(\begin{array}{c|c}\begin{matrix}I_r&\\&0\end{matrix}&PCS\\\hline&\begin{matrix}I_s&\\&0\end{matrix}\end{array}\right)\end{array}$$

由上述分析,知 $PCS=\begin{pmatrix}I_r&\\&0\end{pmatrix}\cdot X-Y\begin{pmatrix}I_s&\\&0\end{pmatrix}$

$\Longrightarrow PCS=PAQX-YRBS\Longrightarrow C=A(QXS^{-1})-(P^{-1}YR)B$ #