第四章 线性空间

§4.1 线性空间的定义

Recall. $\mathbb{F}^{m\times n}$, $+: \mathbb{F}^{m\times n}\times\mathbb{F}^{m\times n}\longrightarrow\mathbb{F}^{m\times n}$

$\cdot: \mathbb{F}\times\mathbb{F}^{m\times n}\longrightarrow\mathbb{F}^{m\times n}$

满足：
- $(A+B)+C=A+(B+C)$
- $A+B=B+C$
- $A+0=0+A$
- $A+(-A)=0$
- $(\lambda\mu)A=\lambda(\mu A)$
- $1_{\mathbb{F}}A=A$
- $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$
- $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$

定义1.1 $\phi\neq V$ 为非空集合，$\mathbb{F}$ 为域，若 V 上定义了运算

$+: V\times V\to V$, $(u,v)\longmapsto u+v$, $\cdot: \mathbb{F}\times V\longrightarrow V$, $(\lambda,v)\longmapsto\lambda v$.

使得 $(V,+)$ 为加法群，即满足

(A1) $(u+v)+w=u+(v+w)$ (加法结合律)

(A2) $u+v=v+u$ (加法交换律)

(A3) $\exists\, 0\in V$, $u+0=0+u$ (0向量)

(A4) $\forall\, v\in V$, $\exists\, -v$, 使得 $v+(-v)=(-v)+v=0$ (负向量)

以及

(M1) $(\lambda\mu)v=\lambda(\mu v)$ $\quad\forall\,\lambda,\mu\in\mathbb{F},\ v\in V$

(M2) $1_{\mathbb{F}}\cdot v=v$ $\quad\forall\, v\in V$

(D1) $(\lambda+\mu)v=\lambda v+\mu v$ $\quad\forall\,\lambda,\mu\in\mathbb{F},\ v\in V$

(D2) $\lambda(u+v)=\lambda u+\lambda v$ $\quad\forall\,\lambda\in\mathbb{F},\ u,v\in V$

则称 $(V,+,\cdot)$ 为一个<u>$\mathbb{F}$-线性空间</u>或 $\mathbb{F}$-向量空间，简称 V 为一个 $\mathbb{F}$-线性空间，记作 $V/\mathbb{F}$

注：(1) $v\in V$ 称为向量，$\lambda\in\mathbb{F}$ 称为纯量或数量.

(2) $-v$ 称为 v 的负向量或反向量.

例

- $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ 实向量(线性)空间　　$\mathbb{F}=\mathbb{C}$，复向量(线性)空间
- $\mathbb{F}[x] = \{f(x)=a_n x^n+\cdots+a_1x+a_0 \mid n\geq 0,\ a_i\in\mathbb{F}\}$

$\mathbb{F}_n[x] = \{f(x)\in\mathbb{F}[x] \mid \deg f(x)\leq n\}$

$\mathbb{F}_0[x]\subseteq\mathbb{F}_1[x]\subseteq\mathbb{F}_2[x]\subseteq\cdots$

- $\mathbb{F}^{m\times n}$，　$\mathbb{F}^{m\times 1}$，　$\mathbb{F}^{1\times n}$
- $C[a,b] = \{f:[a,b]\to\mathbb{R} \mid f \text{ 连续}\}$.

$C^\infty[a,b] = \{f\in C[a,b] \mid f \text{ 光滑}\}$

性质：(1) 0向量唯一确定，负向量唯一确定

· 若 $0, 0'$ 均满足 A3. 则 $0 \overset{A3}{=} 0+0' \overset{A3}{=} 0'$

· 设 v', v'' 均满足 A4 则

$v'' \overset{A3}{=} 0+v'' \overset{A4}{=} (v'+v)+v'' \overset{A1}{=} v'+(v+v'') \overset{A4}{=} v'+0 \overset{A3}{=} v'$

(2) $v+v=v \Longrightarrow v=0$

$v+v=v \Rightarrow (v+v)+(-v) = v+(-v) \overset{A1}{\Rightarrow} v+(v+(-v)) = v+(-v)$

$\overset{A4}{\Rightarrow} v+0=0 \overset{A3}{\Rightarrow} v=0$

(3) $\lambda v=0 \Longleftrightarrow \lambda=0$ 或 $v=0$　　$\forall\lambda\in\mathbb{F},\ v\in V$.

"$\Leftarrow$"　· $\forall v\in V$，$0\cdot v=(0+0)\cdot v \overset{D1}{=} 0\cdot v+0\cdot v \Rightarrow 0\cdot v=0$

· $\forall\lambda\in\mathbb{F}$，$\lambda\cdot 0_v \overset{A3}{=} \lambda\cdot(0_v+0_v) \overset{D2}{=} \lambda 0_v+\lambda 0_v \Rightarrow \lambda\cdot 0_v=0$

"$\Rightarrow$"　设 $\lambda v=0$．若 $\lambda=0$ 则命题得证.

下设 $\lambda\neq 0$，则由上述证明，$\frac{1}{\lambda}(\lambda v)=\frac{1}{\lambda}\cdot 0_v=0$

从而　$0=\frac{1}{\lambda}(\lambda v) \overset{M1}{=} (\frac{1}{\lambda}\lambda)v = 1\cdot v \overset{M2}{=} v$　故 $v=0$　#

(4) $(-1)\cdot v=-v$.

$v+(-1)\cdot v \overset{M2}{=} 1\cdot v+(-1)\cdot v \overset{D1}{=} (1+(-1))\cdot v = 0\cdot v = 0$

故 $(-1)\cdot v$ 为 v 的负向量　即 $(-1)\cdot v=-v$.

(5) A2 为冗余的　即 A2 可由其他公理给出.

$2u=(1+1)u \overset{D1}{=} 1\cdot u+1\cdot u \overset{M2}{=} u+u$，同理 $2v=v+v$

$2(u+v) = (u+v)+(u+v) = 2u+2v = (u+u)+(v+v) \Longrightarrow u+v=v+u$

§4.2 线性相关性

定义2.1 设 $V/\mathbb{F}$，$v_1,\cdots,v_n\in V$，$\lambda_1,\cdots,\lambda_n\in\mathbb{F}$ 则向量 $\lambda_1v_1+\cdots+\lambda_nv_n$ 称为 $v_1,\cdots,v_n$ 的一个线性组合，$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 为组合系数。若 $w\in V$ 可以写成 $v_1,\cdots,v_n$ 的一个线性组合，则称 w 可由 $v_1,\cdots,v_n$ 线性表示。

一般地，$S\subseteq V$，称 $w\in V$ 可由 S 线性表示，若存 S 中有限个向量 $v_1,\cdots,v_n$，使得 w 可由 $v_1,\cdots,v_n$ 线性表示。

记 $\mathbb{F}\langle S\rangle=\{w\in V\mid w\text{ 可由 }S\text{ 线性表示}\}$

$=\{\lambda_1v_1+\cdots+\lambda_nv_n\mid n\geq 1,\ v_i\in V,\ \lambda_i\in\mathbb{F}\ i=1,\cdots,n\}$

约定：
- $\lambda_1v_1+\cdots+\lambda_kv_k=0$ 若 $k=0$
- $\mathbb{F}\langle\phi\rangle=\{0\}$

定义2.2 $V/\mathbb{F}$，$\phi\neq W\subseteq V$ 若 W 对 V 中加法和数乘封闭，

即 $w_1+w_2\in W$ $\forall\ w_1,w_2\in W$

$\lambda w\in W$ $\forall\ w\in W,\ \forall\lambda\in\mathbb{F}$

则称 W 为 V 的线性子空间。

注 $\mathbb{F}\langle S\rangle$ 为 V 包含 S 的最小线性子空间，称为 S 生成的线性子空间。若 $W=\mathbb{F}\langle S\rangle$ 则称 S 为 W 的一组生成元。

例
- $\mathbb{F}^{m\times n}$：$\{E_{ij}\mid 1\leq i\leq m,1\leq j\leq n\}$ 为一组生成元
- $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ 为可逆方阵，$A=(A_1\cdots A_n)$ 则 $A_1,\cdots,A_n$ 为 $\mathbb{F}^{n\times 1}$ 的一组生成元。

定义2.3 设 $S,T\subseteq V$，若 S 可由 T 线性表示，T 可由 S 线性表示，则称 S,T 等价

注 · S 与 T 等价 $\overset{\Delta}{\Longleftrightarrow}$ $S\subseteq\mathbb{F}\langle T\rangle$，$T\subseteq\mathbb{F}\langle S\rangle$

$\Longleftrightarrow$ $\mathbb{F}\langle S\rangle=\mathbb{F}\langle T\rangle$

· V 中向量组的等价是向量组的集合上的等价关系. 其等价类的完全代表元系为 V 的所有线性子空间

定义 2.4　$V/\mathbb{F}$　$v_1, \cdots, v_n \in V$　若存在不全为 0 的 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{F}$ 使得 $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0$，则称 $v_1, \cdots, v_n$ 线性相关. 否则, 称它们线性无关. 称 $\phi \neq S \subseteq V$ 线性相关, 若存在 S 的有限子集线性相关, 否则称 S 线性无关.

注　· $v_1, \cdots, v_n \in V$ 线性无关

$\Longleftrightarrow$ $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$

$\Longleftrightarrow$ 对 $\forall\ v \in \mathbb{F}\langle v_1, \cdots, v_n\rangle$　v 可唯一表示成 $v_1, \cdots, v_n$ 的线性组合

· S 线性无关 $\Longleftrightarrow$ S 的任一有限子集线性无关

· 我们约定 ϕ 线性无关. 若 $0 \in S$, 则 S 线性相关.

定理 2.5　$V/\mathbb{F}$,　$v_1, \cdots, v_n \in V$,　$\phi \neq S \subseteq V$

(1) 下述等价:　(a) $v_1, \cdots, v_n$ 线性相关

(b) $\exists\ 1 \leq k \leq n$,　$v_k \in \mathbb{F}\langle v_1, \cdots, v_{k-1}, v_{k+1}, \cdots, v_n\rangle$

(c) $\exists\ 1 \leq k \leq n$,　$v_k \in \mathbb{F}\langle v_1, \cdots, v_{k-1}\rangle$

(2) S 线性相关 $\Longleftrightarrow$ $\exists\ v \in S$,　$v \in \mathbb{F}\langle S \setminus \{v\}\rangle$

Pf: (1) (a)$\Rightarrow$(c)　设 $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0$,　$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 不全为 0.

取最大的 k, 使得 $\lambda_k \neq 0$. 即有 $\lambda_k \neq 0$ 且 $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k = 0$

则有　$v_k = (-\frac{1}{\lambda_k})v_1 + (-\frac{2}{\lambda_k})v_2 + \cdots + (-\frac{\lambda_{k-1}}{\lambda_k})v_{k-1} \in \mathbb{F}\langle v_1, \cdots, v_{k-1}\rangle$

(c)$\Rightarrow$(b)　显然

(b)$\Rightarrow$(a)　设 $v_k = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_{k-1} v_{i-1} + \lambda_{k+1} v_{i+1} + \cdots + \lambda_n v_n$

取 $\lambda_k = -1$, 则 $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n = 0$, 且 $\lambda_k \neq 0$　*

(2) "$\Rightarrow$" 由定义, 存在 $v_1, \cdots, v_n \in S$ 线性相关, $\Rightarrow \exists\ v_k \in \mathbb{F}\langle v_1, \cdots, v_{k-1}\rangle \subseteq \mathbb{F}\langle S \setminus \{v_k\}\rangle$

"$\Leftarrow$" $v \in \mathbb{F}\langle S \setminus \{v_i\}\rangle \Rightarrow v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$　$v_1, \cdots, v_n \in S \setminus \{v_i\} \Rightarrow v, v_1, \cdots, v_k$ 线性相关.

例 $V=\mathbb{F}^3$. $(1,-1,0),(1,0,-1),(0,1,-1)$ 线性相关;

$(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)$ 线性无关.

例 若 $0\in S$, 则 S 线性相关.

命题2.6 $v_1,\cdots,v_s\in V$, $1\le i_1<\cdots<i_k\le s$, $\phi\ne T\subseteq S\subseteq V$ 则

(1) $v_{i_1},\cdots,v_{i_k}$ 线性相关 $\Longrightarrow$ $v_1,\cdots,v_s$ 线性相关

$\Longleftarrow$ 无

(2) T 线性相关 $\Longrightarrow$ S 线性相关

无 $\Longleftarrow$ 无

定义 2.7 $V/\mathbb{F}$, $\phi\ne S\subseteq V$ 若 $M\subseteq S$ 满足

(1) M 线性无关

(2) $\forall\ M\subsetneq M'\subseteq V$, M' 线性相关

则称 M 为 S 的一个极大线性无关组, 简称极大无关组.

注 (2) $\Longleftrightarrow$ $\forall\ v\in S\setminus M$, $M\cup\{v\}$ 线性相关

命题2.8 $M\subseteq S$ 为极大无关组

$\Longleftrightarrow$ (1) M 线性无关 (2) $S\subseteq\mathbb{F}\langle M\rangle$

($\Longleftrightarrow$ (1) M 线性无关 (2) $S=\mathbb{F}\langle M\rangle$)

PF 显然, $F\langle M\rangle\subseteq F\langle S\rangle$ 成立. 故 (1)+(2) $\Longleftrightarrow$ (1)+(2').

"$\Longrightarrow$" 设 $M\subseteq S$ 为极大无关组, 则(1)成立. 任取 $v\in S$.

· 若 $s\in M$. 则 $s\in M\subseteq\mathbb{F}(M)$;

· 若 $s\notin M$. 则 $s\cup\{M\}$ 线性相关. 故存在 $v_1,\cdots,v_n\in M$

以及不全为0的 $\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_n\in\mathbb{F}$ 使得

$$\lambda_0 s+\lambda_1 v_1+\cdots+\lambda_n v_n=0$$

我们断言 $\lambda_0 \neq 0$ 否则 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 不全为 0 且

$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n = 0$，与 M 线性无关矛盾

从而 $v_0 = -\frac{1}{\lambda_0}(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n) \in F\langle M\rangle$

"$\Leftarrow$" 设 M 为线性无关组，且 $S \subseteq F\langle M\rangle$，下证 M 的极大性

任取 $v_0 \in S \setminus M$，设 $v_0 = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$，其中 $v_1, \cdots, v_n \in M$，

$\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in F$，令 $\lambda_0 = -1$，则有

$\lambda_0 v_0 + \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0$ 且 $\lambda_0, \cdots, \lambda_n$ 不全为 0，故

$v_0, v_1, \cdots, v_n$ 线性相关，故 M 为极大无关组。

<u>命题 2.9</u> 设 $\phi \neq S \subseteq V$ 为有限子集，则 V 的任一线性无关子集 X 均可扩充为 S 的一个极大无关组。

<u>PF</u> 令 $\mathcal{S} = \{T \subseteq S \mid T \supseteq X,\ T \text{ 线性无关}\} \subseteq \mathcal{P}(S)$（"S 的子集的集合"）

任取 $M \in \mathcal{S}$，使得 $\#M$ 最大，则 M 为 S 的极大无关组

否则，存在 $v_0 \in S \setminus M$，使得 $M \cup \{v_0\}$ 线性无关，从而

$M \cup \{v_0\} \in \mathcal{S}$ 且 $\#M\cup\{v_0\} > \#M$，与 $\#M$ 极大性矛盾 #

$\boxed{\text{注}}$* 上述命题对任意 V 以及无限子集 S 均成立，证明要用到 <u>Zorn 引理</u>：

> 设 $(\mathcal{S}, \leq)$ 为偏序集，若 $\mathcal{S}$ 中任一全序的子集 $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}$，存在 $s \in \mathcal{S}$，使得 $s \geq t\ \forall t \in \mathcal{T}$，则 $\mathcal{S}$ 中有极大元

如上令 $\mathcal{S} = \{T \subseteq S \mid T \supseteq X,\ T \text{ 线性无关}\} \subseteq \mathcal{P}(S)$，则 $(\mathcal{S}, \subseteq)$ 在集合包含关系下形成一个偏序集，且满足 Zorn 引理条件，$\mathcal{S}$ 中极大元即为所求

（设 $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}$ 为全序子集，令 $I = \bigcup_{Y \in \mathcal{T}} Y$，则 $I \in \mathcal{S}$ 且 $I \supseteq Y\ \forall Y \in \mathcal{T}$，为此，只须说明 I 线性无关，任取 V 中有限子集 $v_1, \cdots, v_n$，对 v_i，存在某个 $Y_i \in \mathcal{T}$，使得 $v_i \in Y_i$，而 $\mathcal{T}$ 为全序子集，故 $\bigcup_{i=1}^{n} Y_i = Y_k$，其中 Y_k 为所有 Y_i 中最大的一个，从而 $v_1, \cdots, v_n \in Y_k$ 线性无关，故 I 线性无关。）

命题 2.10 设 $v_1, \cdots, v_t$ 可由 $w_1, \cdots, w_s$ 线性表示，$t>s$ 则 $v_1, \cdots, v_t$ 线性相关.

PF 令
$$v_1 = a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \cdots + a_{s1}w_s$$
$$v_2 = a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \cdots + a_{s2}w_s$$
$$\cdots \quad \cdots$$
$$v_t = a_{1t}w_1 + a_{2t}w_2 + \cdots + a_{st}w_s$$

由于 $t>s$. 方程 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1t} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2t} \\ \cdots & & \cdots & \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{st} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_t \end{pmatrix} = 0$ 有非0解 $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_t \end{pmatrix}$

从而 $b_1v_1 + b_2v_2 + \cdots + b_tv_t$
$$= \sum_{i=1}^{t} b_iv_i = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{s} b_i a_{ji} w_j = 0 \qquad \#$$

注：记 $(v_1, \cdots, v_t)\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_t \end{pmatrix} = b_1v_1 + b_2v_2 + \cdots + b_tv_t$

向量的行向量 类似于矩阵乘法

(或 $(b_1 \cdots b_t)\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_t \end{pmatrix} \triangleq b_1v_1 + b_2v_2 + \cdots + b_tv_t$)

向量的列向量

从而 $(v_1, v_2, \cdots, v_t) = (w_1, \cdots, w_s)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1t} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{st} \end{pmatrix}$

可验证，上述表达方式满足结合律：即
$$\left[(w_1, \cdots, w_s)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1t} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2t} \\ \cdots & & \cdots & \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{st} \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_t \end{pmatrix} = (w_1, \cdots, w_s)\left[\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1t} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2t} \\ \cdots & & \cdots & \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{st} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_t \end{pmatrix}\right]$$

定理 2.11 $v_1, \cdots, v_m$ 的任一极大无关组等价于 $v_1, \cdots, v_m$，从而 $v_1, \cdots, v_m$ 的两个极大无关组元素个数相同.

PF · 第一个结论由 2.8 可知.

· 设 $v_{i_1}, v_{i_2}, \cdots, v_{i_s}$ 与 $v_{j_1}, \cdots, v_{j_t}$ 为两个极大无关组，故可相互表示，由 2.10 知 $t \le s$，$s \le t$，从而 $s=t$. #

定义2.12 向量组 S 的任一极大无关组元素的个数称为向量组的**秩**

记作 $rk(S)$

注

- $T \subseteq S$，则 $rk(T) \leq rk(S)$
- T 与 S 等价，则 $rk(T) = rk(S)$
- $rk(S) = rk(\mathbb{F}\langle S\rangle)$

例 矩阵 $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ 的 **行秩**：行向量组的秩

列秩：列向量组的秩

引理2.13 (1) 初等行变换不改变矩阵的行秩

(1') … 列 …… 列 …

(2) 初等行变换不改变矩阵的列秩

(2') … 列 …… 行 …

PF 利用矩阵的转置知 (1) $\Leftrightarrow$ (1')，(2) $\Leftrightarrow$ (2')

(1) $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{m\times n}$. P 为 m 阶初等方阵

记 $PA = \begin{pmatrix} A_1' \\ \vdots \\ A_m' \end{pmatrix}$，$A = P^{-1}PA = P^{-1}\begin{pmatrix} A_1' \\ \vdots \\ A_m' \end{pmatrix}$

故 $A_1, \dots, A_m$ 与 $A_1' \cdots A_m'$ 等价，从而 A 与 PA 行秩相同.

(2) $A = (A_1, \cdots, A_n) \in \mathbb{F}^{m\times n}$. $A_i \in \mathbb{F}^{m\times 1}$ $\forall i$.

设 P 为 m 阶初等阵 $PA = (PA_1, \cdots, PA_n) = (A_1', \cdots, A_n')$.

易知 $A_{i_1}, \cdots, A_{i_s}$ 线性相关

$\Leftrightarrow$ $(A_{i_1} \cdots A_{i_s})\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_s \end{pmatrix} = 0$ 有非0解

$\Leftrightarrow$ $P(A_{i_1} \cdots A_{i_s})\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_s \end{pmatrix} = 0$ 有非0解

$\Leftrightarrow$ $(A_{i_1}', \cdots, A_{i_s}')\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_s \end{pmatrix} = 0$ 有非0解.

$\Leftrightarrow$ $A_{i_1}', \cdots, A_{i_s}'$ 线性相关.

从而 $rk(A_1, \cdots, A_n) = rk(A_1', \cdots, A_n')$ □

定理 2.14　$A\in\mathbb{F}^{m\times n}$.　A的行秩 = A的列秩 = A的秩.

PF　显然,结论对 $\begin{pmatrix} I_r & \\ & 0 \end{pmatrix}$ 成立. 另一方面,任一矩阵可通过系列初等变换化为 $\begin{pmatrix} I_r & \\ & 0 \end{pmatrix}$ 形式,由引理2.13知结论成立.

例　求 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & 0 & -5 & 1 \\ 2 & 4 & -3 & -19 & 6 \\ 3 & 6 & -3 & -24 & 7 \end{pmatrix}$ 的行秩、列秩.

解: 令 $A=\begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_4 \end{pmatrix}=(C_1 \cdots C_5)$.

· $R_4=R_2+R_3$, $R_3=3R_2-R_1 \Longrightarrow rk(A)=rk(R_1,R_2)=2$

· $C_2=2C_1$,　$C_5-C_1=-\frac{4}{3}C_3$　$C_4+5C_1=3C_3$

$\Longrightarrow rk(A)=rk(C_1,C_3)=2$

例 (1) $rk(A+B)\le rk(A)+rk(B)$　$\forall A,B\in\mathbb{F}^{m\times n}$

(2) $rk(AB)\le rk(A), rk(B)$　$\forall A\in\mathbb{F}^{m\times n}, B\in\mathbb{F}^{n\times p}$

PF (1) 令 $A=(A_1,\cdots,A_n)$　$B=(B_1,\cdots,B_n)$　$A+B=(C_1,\cdots,C_n)$

设 $A_{i_1},\cdots,A_{i_r}$ 为 $A_1,\cdots,A_n$ 的极大无关组

$B_{j_1},\cdots,B_{j_s}$ 为 $B_1,\cdots,B_n$ 的极大无关组

则 $C_1,\cdots,C_n$ 可由 $A_{i_1},\cdots,A_{i_r}$, $B_{j_1}\cdots B_{j_s}$ 线性表示,从而

$rk(C)=rk(C_1,\cdots,C_n)\le r+s=rk(A)+rk(B)$.

(2) $A=(A_1,\cdots,A_n)$　$AB=(C_1,\cdots,C_p)$ 则

$C_1,\cdots,C_p$ 可由 $A_1,\cdots A_n$ 线性表示. 从而

$rk(AB)=rk(C_1,\cdots,C_p)\le rk(A_1,\cdots,A_n)=rk(A)$

同理, $rk(AB)\le rk(B)$.　#

§4.3 基与坐标

定义3.1　$V/\mathbb{F}$ 若 V 可由有限个元素生成，则称 V 为有限维空间

此时，V 的秩 $r(V)$ 有限，称为 V 的维数，记作 $\dim V$

若存在 V 的一组向量 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$，使得任一 $v\in V$，可唯一写成

$v=\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_n\alpha_n$ 则称 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 为 V 的一组基。此时 $(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)^T$

称为 v 在基 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 下的坐标　　$\overset{\frown}{\mathbb{F}^{n\times 1}}$

注．若 V 不为有限维，则称 V 为无限维空间，记作 $\dim V=\infty$．

．基元有顺序，若 $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 为一组基，则 $(\alpha_2,\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 为另一组不同的基．α_1 在上述两组基下坐标分别为 $\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$ 以及 $\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$．

注．取定 V 的一组基 $\mathbb{B}=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，则有映射

$$\varphi_{\mathbb{B}}:\ V\longrightarrow\mathbb{F}^{n\times1}\qquad v=\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_n\alpha_n\longmapsto\begin{pmatrix}\lambda_1\\\vdots\\\lambda_n\end{pmatrix}$$

易知 $\varphi_{\mathbb{B}}$ 为双射．且　$\varphi_{\mathbb{B}}(v_1+v_2)=\varphi_{\mathbb{B}}(v_1)+\varphi_{\mathbb{B}}(v_2)$，$\varphi_{\mathbb{B}}(\lambda v)=\lambda\varphi_{\mathbb{B}}(v)$

定理3.2　设 $\dim V<\infty$　$\phi\neq S\subseteq V$　$V=\mathbb{F}\langle S\rangle$ 则

(1)　S 的任一极大无关组为 V 的一组基

(2)　$\mathbb{B}$ 为 V 的一组基 $\Longleftrightarrow$ $\mathbb{B}$ 为 V 的极大无关组

(3)　V 中所有基所含元素个数相同．

(4)　设 $\{\beta_1,\cdots,\beta_m\}$ 为 V 中任一线性无关组，则 $m\leq\dim V$．

PF　(1)　设 $\mathbb{B}=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ 为 S 极大无关组知 $\mathbb{F}\langle\mathbb{B}\rangle=\mathbb{F}\langle S\rangle=V$

故对 $\forall v\in V$，$\exists\ \lambda_1,\cdots,\lambda_n\in\mathbb{F}$，使得　$\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_n\alpha_n=v$．

而 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 唯一性由　$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 的线性无关系给出．

(2) 证明类似于 (1)．　　(3)，(4) 由 (2) 以及秩的性质给出．

注．若 $V=\{0\}$，约定 $\dim V=0$，ϕ 为 V 一组基

．$V\subseteq\mathbb{F}^n$，V 的一组基可扩充为 $\mathbb{F}^n$ 一组基

定理3.3　$A=(a_{ij})\in\mathbb{F}^{m\times n}$，线性方程组 $AX=0$ 的解集 V_A 为 $\mathbb{F}^{n\times 1}$ 的线性子空间，且 $\dim V_A = n-rk(A)$.

Pf　· $Y, Z\in V_A\subseteq \mathbb{F}^{n\times 1} \Rightarrow AY=0,\ AZ=0$

$\Rightarrow A(Y+Z)=0 \Rightarrow Y+Z\in V_A$

$A(\lambda Y)=0\ \forall\lambda\in\mathbb{F} \Rightarrow \lambda Y\in V_A\ \forall\lambda\in\mathbb{F}$ $\Big\}\Rightarrow$ V_A 为子空间

· 设 $A=P\begin{pmatrix}I_r & \\ & 0\end{pmatrix}Q$，$P\in GL_m(\mathbb{F})$　$Q\in GL_n(\mathbb{F})$

则 $AX=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}I_r & \\ & 0\end{pmatrix}QX=0$

$\Leftrightarrow QX\in\mathbb{F}\langle e_{r+1},\cdots,e_n\rangle$

$\Leftrightarrow X\in\mathbb{F}\langle Q^{-1}e_{r+1},\cdots,Q^{-1}e_n\rangle$

$e_{r+1},\cdots,e_n$ 线性无关 $\Rightarrow Q^{-1}e_{r+1},\cdots,Q^{-1}e_n$ 线性无关

$\Rightarrow Q^{-1}e_{r+1},\cdots,Q^{-1}e_n$ 为 V_A 的一组极大无关组，

即有 $\dim V_A = n-r = n-rk(A)$.　※

注　V_A 的一组基称为齐次方程组的一个基础解系.

命题3.4　$A\in\mathbb{F}^{m\times n}$，$\beta\in\mathbb{F}^{m\times 1}$，则方程组 $AX=\beta$ 有解

$\Leftrightarrow rk(A,\beta)=rk(A)$，此时解集为 $V_{A,\beta}=V_A+X^0$

其中 X^0 为任一特解.

注 (1) $\beta\neq 0$ 则 $V_{A,\beta}$ 不为线性子空间.

(2) $\beta\neq 0$，则 $rk(V_{A,\beta}) = n-rk(A)+1$

事实上，令 $X^1,\cdots,X^{n-r}$ 为 $AX=0$ 一组基础解系，其中 $r=rk(A)$

X^0 为 $AX=\beta$ 的一个特解，则 $X^0,X^1,\cdots,X^{n-r}$ 为 $V_{A,\beta}$ 极大无关组

· $X^0,\cdots,X^{n-r}$ 线性无关：$X^1,\cdots,X^{n-r}$ 线性无关 且 $X^0\notin\mathbb{F}\langle X^1,\cdots,X^{n-r}\rangle$

故 $\lambda_0X^0+\lambda_1X^1+\cdots+\lambda_{n-r}X^{n-r}=0 \Rightarrow \lambda_0=0$ （$X^0\notin\mathbb{F}\langle X^1,\cdots,X^{n-r}\rangle$）

$\Rightarrow \lambda_1X^1+\cdots+\lambda_{n-r}X^{n-r}=0 \Longrightarrow \lambda_1=\cdots=\lambda_{n-r}=0$ （$X^1,\cdots,X^{n-r}$ 线性无关）

· $X^0,\cdots,X^{n-r}$ 极大：任取 $X'\in V_{A,\beta}$ 知 $X'-X\in\mathbb{F}\langle X^1,\cdots,X^{n-r}\rangle$　※

设 $\mathbb{B}_1=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，$\mathbb{B}_2=(\beta_1,\cdots,\beta_n)$ 为 V 的两组基

令 β_j 在 $\mathbb{B}_1$ 下坐标为 $\begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}$ 即 $(\beta_1,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & & & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$ $B=(b_{ij})$

令 α_j 在 $\mathbb{B}_2$ 下坐标为 $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$ 即 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(\beta_1,\cdots,\beta_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ $A=(a_{ij})$

B 称为从基 $\mathbb{B}_1$ 到 $\mathbb{B}_2$ 的过渡矩阵，A 为从 $\mathbb{B}_2$ 到 $\mathbb{B}_1$ 的过渡矩阵。

定理3.5 上述 A,B 由 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 和 $(\beta_1,\cdots,\beta_n)$ 唯一确定，且 A,B 互逆，即 $AB=I_n=BA$.

PF $(\beta_1,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)B=((\beta_1,\cdots,\beta_n)A)B=(\beta_1,\cdots,\beta_n)(AB)$

$\Longrightarrow AB=I_n$ （β_j 在 $\mathbb{B}_2$ 下的坐标为 $e_j=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\leftarrow j$）

同理 $BA=I_n$ $\square$

任取 $v\in V$，设 v 在 $\mathbb{B}_1,\mathbb{B}_2$ 下坐标分别为 $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ 则有

$$v=(\alpha_1\cdots\alpha_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=((\beta_1,\cdots,\beta_n)A)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=(\beta_1\cdots\beta_n)\left(A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

定理3.6 设 $\mathbb{B}_1=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，$\mathbb{B}_2=(\beta_1,\cdots,\beta_n)$ 为 V 的两组基，$\mathbb{B}_2$ 到 $\mathbb{B}_1$ 的过渡阵为 A. $v\in V$ 在 $\mathbb{B}_1,\mathbb{B}_2$ 下的坐标分别为 $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$，$Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ 则 $Y=AX$.

例 $V=\mathbb{F}^{3\times 1}$. $\alpha_1=e_1$，$\alpha_2=e_1+e_2$　$\alpha_3=e_1+e_2+e_3$　$v\ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

求 v 在 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 下的坐标.

解: $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(e_1,e_2,e_3)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow (e_1,e_2,e_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix} 1 & -1 & \\ & 1 & -1 \\ & & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow v$ 在 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 下坐标为 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & \\ & 1 & -1 \\ & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\square$

§4.4 线性空间的同构

定义4.1 $V, V'/\mathbb{F}$ 映射 $\mathscr{A}: V \to V'$ 称为一个<u>线性映射</u>，若

- $\mathscr{A}v_1 + \mathscr{A}v_2 = \mathscr{A}(v_1+v_2)$ $\quad \forall v_1, v_2, v \in V$
- $\mathscr{A}(\lambda v) = \lambda \mathscr{A} v$ $\quad \forall \lambda \in \mathbb{F}$

若进一步，$\mathscr{A}$ 为双射，则称 $\mathscr{A}$ 为（线性）<u>同构</u>

V 到自身的线性映射称为<u>线性变换</u>

记 $\mathscr{L}(V, V') = \{\mathscr{A}: V \to V' \mid \mathscr{A} \text{ 线性}\}$，$\mathscr{L}(V) = \mathscr{L}(V, V)$

命题4.2 $V, W/\mathbb{F}$ $\mathscr{A} \in \mathscr{L}(V, W)$，则

(i) $\mathscr{A} 0_V = 0_W$ $\quad \mathscr{A}(-v) = -\mathscr{A}v$ $\quad \forall v \in V$

(ii) $S \subseteq V$ 线性相关 $\Longrightarrow$ $\mathscr{A}S \subseteq W$ 线性相关

无 $\Longleftarrow$ 无

(iii) 若 $\mathscr{A}$ 单，则 $S \subseteq V$ 线性无关 $\Longleftrightarrow$ $\mathscr{A}S$ 线性无关

(iv) 若 $\mathscr{A}$ 为同构，则 $\mathbb{B}$ 为 V 的一组基 $\Longleftrightarrow$ $\mathscr{A}\mathbb{B}$ 为 W 的一组基

(v) $\mathscr{A}$ 为同构 $\Longleftrightarrow$ $\mathscr{A}$ 单，且 $\dim V = \dim W$

$\Longleftrightarrow$ $\mathscr{A}$ 满，且 $\dim V = \dim W$

<u>Pf</u> (i) $\mathscr{A}(0_V) = \mathscr{A}(0_V + 0_V) = \mathscr{A}0_V + \mathscr{A}0_V \Rightarrow \mathscr{A}0_V = 0_W$

$\mathscr{A}(-v) + \mathscr{A}(v) = \mathscr{A}(-v+v) = \mathscr{A}0_V = 0_W \Rightarrow \mathscr{A}(-v) = -\mathscr{A}v$

(ii) 对 $\forall v_1, \cdots, v_m \in V$，$\lambda_1, \cdots, \lambda_m \in \mathbb{F}$，

$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_m v_m = 0 \Rightarrow \mathscr{A}(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_m v_m) = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 \mathscr{A}v_1 + \cdots + \lambda_m \mathscr{A}v_m = 0$

故 $v_1, \cdots, v_m$ 线性相关 $\Rightarrow$ $\mathscr{A}v_1, \cdots, \mathscr{A}v_m$ 线性相关

(iii) 若 $\mathscr{A}$ 为单射，则 $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 \mathscr{A}v_1 + \cdots + \lambda_n \mathscr{A}v_n = 0$

故 $v_1, \cdots, v_n$ 线性相关 $\Longleftrightarrow$ $\mathscr{A}v_1, \cdots, \mathscr{A}v_n$ 线性相关

(iv) "$\Rightarrow$" 由(iii)知 $\mathscr{A}\mathbb{B}$ 为 W 中线性无关组，若 $\mathscr{A}\mathbb{B}$ 不为基，

则存在 $w_0 \in W$，$w_0 \notin \mathscr{A}\mathbb{B}$，使得 $\mathscr{A}\mathbb{B} \cup \{w_0\}$ 为线性无关组

则由(iii)，$\mathscr{A}^{-1}(\mathscr{A}\mathbb{B} \cup \{w_0\}) = \mathbb{B} \cup \{\mathscr{A}^{-1}(w_0)\}$ 是 $\mathbb{B}$ 为 V 中无关组，矛盾

(v) 由定义，$\mathscr{A}$ 为同构知 $\mathscr{A}$ 为双射，且 $\dim V=\dim W$.

下证若 $\mathscr{A}$ 为单射，且 $\dim V=\dim W$，则 $\mathscr{A}$ 必为满射.

设 $v_1,\cdots,v_n$ 为 V 一组基，则 $\mathscr{A}v_1,\cdots,\mathscr{A}v_n$ 为 W 的线性无关组，

由 $\dim V=\dim W$ 知，$\mathscr{A}v_1,\cdots\mathscr{A}v_n$ 为极大无关组，故 $W=\mathbb{F}\langle \mathscr{A}v_1,\cdots,\mathscr{A}v_n\rangle$

即 $\mathscr{A}$ 为满射

同理，若 $\mathscr{A}$ 为满射，且 $\dim V=\dim W$，则 $\mathscr{A}$ 必为单射.

注 若 $\dim V=n$，则 $V\simeq \mathbb{F}^{n\times 1}$

取 V 一组基 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，则有映射

$$\varphi_B: V\longrightarrow \mathbb{F}^{n\times1},\quad \lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_n\alpha_n\longmapsto \begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}$$

为线性空间的同构，其逆映射为 $\varphi_B^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}=\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_n\alpha_n$

例 $V/\mathbb{R}$ u_1,u_2,u_3 线性无关

(1) 试判断 $u_1+u_2,\ u_1+u_3,\ u_2+u_3$ 线性相关性

(2) 分析 $S=\{u_1-\lambda u_2,\ u_2-\lambda u_3,\ u_3-\lambda u_1\}$ 的秩

解：令 $U=\mathbb{F}\langle u_1,u_2,u_3\rangle$，则有 $\mathscr{A}: U\xrightarrow{\sim}\mathbb{F}^{3\times1}$ $\mathscr{A}u_i=e_i$

(1) $u_1+u_2,\ u_1+u_3,\ u_2+u_3$ 的线性相关性与 $e_1+e_2,\ e_1+e_3,\ e_2+e_3$

相同．而 $e_1+e_2,\ e_1+e_3,\ e_2+e_3$ 线性无关：$\operatorname{rk}\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}=3$.

(2) $\operatorname{rk}S=\operatorname{rk}\{e_1-\lambda e_2,\ e_2-\lambda e_3,\ e_3-\lambda e_1\}$

$=\operatorname{rk}A$ 其中 $A=\begin{pmatrix}1&0&-\lambda\\-\lambda&1&0\\0&-\lambda&1\end{pmatrix}$.

$\det A=1-\lambda^3$ $\begin{cases}=0 & 线性相关，~~此时~~\ \lambda=1\\ \neq0 & 线性无关\quad \lambda\neq1\end{cases}$ 口

§4.5 子空间的交与和

命题5.1　$V/\mathbb{F}$，$W_i \le V$　$i \in I$，则 $\bigcap_{i\in I} W_i \le V$

PF　$u, v \in \bigcap_{i\in I} W_i \iff u, v \in W_i \quad \forall i \in I$

$\Rightarrow \begin{cases} u+v \in W_i & \forall i \in I \\ \lambda u \in W_i & \forall \lambda \in \mathbb{F},\ \forall i \in I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u+v \in \bigcap_{i\in I} W_i \\ \lambda u \in \bigcap_{i\in I} W_i & \forall \lambda \end{cases}$ #

注：$\bigcup_{i\in I} W_i \nleq V$：数乘封闭，但加法不封闭

例　$V = \mathbb{R}^2$，$W_1 = \{(a,0) \mid a \in \mathbb{R}\}$，$W_2 = \{(0,b) \mid b \in \mathbb{R}\}$

则 $(0,1), (1,0) \in W_1 \cup W_2$，但 $(0,1) + (1,0) = (1,1) \notin W_1 \cup W_2$

定义5.2　$W_1, W_2, \dots, W_t \le V$，$W_1 + W_2 + \cdots + W_t \triangleq \{w_1 + \cdots + w_t \mid w_i \in W_i,\ \forall 1 \le i \le t\}$

为 V 子空间，称为 $W_1, \dots, W_t$ 的和。

注　令 $\mathrm{Sub}(V) = \{W \mid W \le V\}$，则有运算

$$+ : \mathrm{Sub}(V) \times \mathrm{Sub}(V) \longrightarrow \mathrm{Sub}(V)$$
$$(W_1, W_2) \longmapsto W_1 + W_2$$

易验：

- $(W_1+W_2) + W_3 = W_1 + (W_2+W_3)$
  $W_1 + W_2 = W_2 + W_1$　$\forall W_1, W_2, W_3 \in \mathrm{Sub}(V)$
- $0 + W = W + 0 = W$　$0 = \{0\}$ 为零空间
- $\forall W \ne 0$，不存在 $-W$，使得 $W + (-W) = 0$.

命题5.3　(1) $W_1 + W_2 + \cdots + W_t = \mathbb{F}\langle W_1 \cup W_2 \cup \cdots \cup W_t \rangle$

(2) 令 S_i 为 W_i 一组生成元，$i = 1, \dots, t$。则

$W_1 + W_2 + \cdots + W_t = \mathbb{F}\langle S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_t \rangle$

(3) $\dim(W_1 + \cdots + W_t) \le \dim W_1 + \cdots + \dim W_t$

PF (1) 显然，$W_1+\cdots+W_t \subseteq F\langle W_1\cup W_2\cup\cdots\cup W_t\rangle$.

另一方面，$W_1+W_2+\cdots+W_t \supseteq W_i \quad i=1,\cdots,t$

$\Rightarrow W_1+W_2\cdots+W_t \supseteq W_1\cup\cdots\cup W_t$

$\Rightarrow W_1+\cdots+W_t \supseteq F\langle W_1\cup\cdots\cup W_t\rangle$

(2) $S_i\subseteq W_i \quad \forall i=1,\cdots t$, $\Rightarrow F\langle S_1\cup\cdots\cup S_t\rangle \subseteq F\langle W_1\cup\cdots\cup W_i\rangle$

另一方面，$F\langle S_1\cup S_2\cup\cdots\cup S_t\rangle \supseteq F\langle S_i\rangle = W_i \quad \forall i$

$\Rightarrow F\langle S_1\cup\cdots\cup S_t\rangle \supseteq W_1\cup\cdots\cup W_i$

$\Rightarrow F\langle S_1\cup\cdots\cup S_t\rangle \supseteq F\langle W_1\cup\cdots\cup W_i\rangle$.

(3) 令 $S_1, S_2,\cdots, S_t$ 分别为 $W_1,\cdots,W_t$ 极大无关组

则由(2) $F\langle S_1\cup\cdots\cup S_t\rangle = W_1+\cdots+W_t$

从而 $\dim F\langle S_1\cup\cdots\cup S_t\rangle \leq |S_1\cup\cdots\cup S_t|$

$\leq |S_1|+\cdots+|S_t| = \dim W_1+\cdots+\dim W_t$.

定理5.4 V/F, $U, W\leq V$ 则 $\dim(U+W)+\dim(U\cap W)=\dim U+\dim W$

PF 设 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)$ 为 $U\cap W$ 的一组基，扩充为

U 的一组基 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_r)$ 以及

W 的一组基 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\gamma_1,\cdots,\gamma_t)$

断言：$\alpha_1,\cdots\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_r,\gamma_1,\cdots,\gamma_t$ 为 $U+W$ 一组基：

- $U+W = F\langle\alpha_1\cdots\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_r,\gamma_1,\cdots\gamma_t\rangle$ (命题5.3(2))
- $\alpha_1,\cdots\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_r,\gamma_1\cdots\gamma_t$ 线性无关：

设 $a_1\alpha_1+\cdots+a_s\alpha_s+b_1\beta_1+\cdots+b_r\beta_r+c_1\gamma_1+\cdots+c_t\gamma_t=0$

$$\Longrightarrow \underbrace{a_1\alpha_1+\cdots+a_s\alpha_s+b_1\beta_1+\cdots+b_r\beta_r}_{\in U} = \underbrace{-(c_1\gamma_1+\cdots+c_t\gamma_t)}_{\in W}$$

$\Rightarrow -(c_1\gamma_1+\cdots+c_t\gamma_t)=a_1\alpha_1+\cdots+a_s\alpha_s+b_1\beta_1+\cdots+b_r\beta_r\in F\langle\alpha_1,\cdots,\alpha_s\rangle$

$\Rightarrow b_1=\cdots=b_r=0 \quad (\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_r$ 线性无关)

$\Rightarrow a_1=\cdots=a_s=0,\quad c_1=\cdots=c_t=0 \quad (\alpha_1,\cdots\alpha_s,\gamma_1,\cdots,\gamma_t$ 无关).

从而 $\dim(U+W)+\dim(U\cap W) = r+s+t+r = \dim U+\dim W$. #

推论5.5 $U, W \le V$，则 $\dim(U\cap W) \le \dim U + \dim W - \dim V$

推论5.6 (1) $\dim(U+W) = \dim U + \dim V \iff U\cap V = 0$

(2) $\dim(W_1+W_2+\cdots+W_t) = \dim W_1 + \cdots + \dim W_t$

$\iff (W_1+\cdots+W_i)\cap W_{i+1} = 0 \quad \forall\, i=1,2,\cdots,t-1$.

PF (1) $U\cap V = 0 \iff \dim(U\cap V) = 0$，应用5.4可得

(2) $\dim(W_1+\cdots+W_t) \le \dim(W_1+\cdots+W_{t-1}) + \dim W_t$

$\le \dim(W_1+\cdots+W_{t-2}) + \dim W_{t-1} + \dim W_t$

$\vdots$

$\le \dim W_1 + \dim W_2 + \cdots + \dim W_t$

等号成立 $\iff (W_1+\cdots+W_i)\cap W_{i+1} = 0 \quad i=t-1,\cdots,1$

问题. $v\in W_1+\cdots+W_t \implies v = v_1+\cdots+v_t, \exists\, v_i\in W_i \quad \forall\, i$

上述表达方式是否唯一？即若 $v = w_1+\cdots+w_t$，$w_i\in W_i$

是否必有 $v_i = w_i$?

定义5.7 设 $W = W_1+W_2+\cdots+W_t$，$W_i \le V \ \forall\, i=1,\cdots,t$. 若对 $\forall\, w\in W$，存在唯一的一组 $w_i\in W_i$，$i=1,\cdots,t$，使得 $w = w_1+\cdots+w_t$，则称 W 为子空间 $W_1,\cdots,W_t$ 的直和，记作 $W = W_1\oplus\cdots\oplus W_t$.

引理5.8 令 $W = W_1+\cdots+W_n$. 则 $W = W_1\oplus\cdots\oplus W_t$ 的充要条件为

$w_1+\cdots+w_t = 0$, $w_i\in W_i \implies w_i = 0 \quad \forall\, i$.

PF "$\Longrightarrow$" 显然 $0 = 0+\cdots+0$. $0\in W_i \ \forall i$. 故由唯一性

$w_i = 0 \quad \forall\, i$.

"$\Longleftarrow$" 任取 $w\in W$ 设 $w = w_1+\cdots+w_t = v_1+\cdots+v_t$, $w_i, v_i\in W_i$

则 $(w_1-v_1)+\cdots+(w_t-v_t) = 0$ 且 $w_i - v_i\in W_i \ \forall i$

从而 $w_i - v_i = 0$, $\forall i$ 即有 $w_i = v_i \ \forall i$. #

定理5.9 $V/\mathbb{F}$ 设 $W \leq V$，$W_i \leq W$ $\forall i$

(1) $W = W_1 + W_2$ 则 $W = W_1 \oplus W_2 \iff W_1 \cap W_2 = 0$

$(\iff \dim W_1 + \dim W_2 = \dim(W_1 + W_2))$

(2) $W = \sum_{i=1}^{t} W_i$ 则 $W = W_1 \oplus \cdots \oplus W_t \iff (W_1 + \cdots + W_i) \cap W_{i+1} = 0$，$i = 1, \cdots, t-1$

$(\iff \dim W_1 + \cdots + \dim W_t = \dim(W_1 + \cdots + W_t))$

Pf (1) "$\Longrightarrow$" 设 $W = W_1 \oplus W_2$，任取 $w \in W_1 \cap W_2$

则 $0 = \underset{W_1}{\underset{\cap}{w}} + \underset{W_2}{\underset{\cap}{(-w)}} = \underset{W_1}{\underset{\cap}{0}} + \underset{W_2}{\underset{\cap}{0}} \Longrightarrow w = 0$

"$\Longleftarrow$" 设 $W_1 \cap W_2 = 0$，若 $0 = w_1 + w_2$，$w_1 \in W_1$，$w_2 \in W_2$

$\Longrightarrow w_1 = -w_2 \in W_2 \Longrightarrow w_1 \in W_1 \cap W_2 = 0 \Rightarrow w_2 = 0$.

由引理5.8 知 $W = W_1 \oplus W_2$

(2) "$\Longrightarrow$" 设 $W = W_1 \oplus \cdots \oplus W_t$. 对 $\forall i$. 任取 $w \in (W_1 + \cdots + W_i) \cap W_{i+1}$,

$\Longrightarrow 0 = \underset{W_1 + \cdots + W_i}{\underset{\cap}{-w}} + \underset{W_{i+1}}{\underset{\cap}{w}} \Longrightarrow w = 0$

"$\Longleftarrow$" 设 $(W_1 + \cdots + W_i) \cap W_{i+1} = 0$ $\forall i$

设 $0 = w_1 + w_2 + \cdots + w_t$，$w_i \in W_i$，下证 $w_i = 0$ $\forall i$

由假设 $w_t = -(w_1 + \cdots + w_{t-1}) \in (W_1 + \cdots + W_{t-1}) \cap W_t = \{0\}$

$\Longrightarrow w_t = 0 \Longrightarrow w_1 + \cdots + w_{t-1} = 0$

重复上述步骤，知 $w_{t-1} = 0$ $\cdots$，$w_1 = 0$ #.

例 $\mathbb{F}^{n\times 1} = \mathbb{F}\langle e_1\rangle \oplus \cdots \oplus \mathbb{F}\langle e_n\rangle$，其中 $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i$

$$\mathbb{F}^{m\times n} = \underset{\mathbb{F}^{m\times 1}}{\underset{\cong}{\begin{pmatrix} * & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ * & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}}} \oplus \cdots \oplus \underset{\mathbb{F}^{m\times 1}}{\underset{\cong}{\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & * & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & * & 0 & \cdots & 0 \\ & & & \vdots & & & \\ 0 & \cdots & 0 & \underset{\uparrow i}{*} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}}} \oplus \cdots \oplus \underset{\mathbb{F}^{m\times 1}}{\underset{\cong}{\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & * \\ 0 & \cdots & 0 & * \\ & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & * \end{pmatrix}}}$$

定义5.10 $V/\mathbb{F}$. $U, W \leq V$ 若 $V = U \oplus W$. 则称 W 为 U 在 V 中的一个<u>补空间</u>，或 U, W 线性互补.

注：补空间不唯一. 例 $\mathbb{R}^2=\{(a,0)\mid a\in\mathbb{R}\}\oplus\{(0,b)\mid b\in\mathbb{R}\}$

$=\{(a,0)\mid a\in\mathbb{R}\}\oplus\{(\lambda b,b)\mid b\in\mathbb{R}\},\ \forall\lambda\in\mathbb{R}$

定理5.11 $U,W\leq V$ 下述等价：

(1) U 为 W 在 V 中的一个补

(2) $\dim U+\dim W=\dim V$，且 $U\cap W=0$

(3) U 的任一组基与 W 的任一组基的并给出 V 的一组基

(4) U 的某组基与 W 某组基的并给出 V 的一组基.

证. (1) $\Rightarrow$ (2) $V=U\oplus W\Rightarrow\begin{cases}U\cap W=0\\ \dim U+\dim W=\dim(U+W)=\dim V\end{cases}$

(2) $\Rightarrow$ (3) 设 $U\cap V=0$ 且 $\dim U+\dim W=\dim V$

则 $\dim(U+W)=\dim U+\dim W-\dim(U\cap V)$

$\Rightarrow\dim(U+W)=\dim U+\dim W=\dim V\Rightarrow U+W=V$.

任取 U 的一组基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$，W 的一组基 $\beta_1,\cdots,\beta_t$

由于 $U\cap W=0$ 知 $\alpha_1,\cdots\alpha_r,\beta_1,\cdots,\beta_t$ 线性无关，比较秩知 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 与 $\beta_1,\cdots,\beta_t$ 为 V 的极大无关组.

(3) $\Rightarrow$ (4) 显然.

(4) $\Rightarrow$ (1) 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 为 U 一组基. $\beta_1,\cdots\beta_t$ 为 W 基.

且 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\beta_1,\cdots\beta_s$ 为 V 一组基. 显然有

$V=\mathbb{F}\langle\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\beta_1,\cdots,\beta_s\rangle=\mathbb{F}\langle\alpha_1,\cdots,\alpha_r\rangle+\mathbb{F}\langle\beta_1,\cdots,\beta_s\rangle$

且 $0=u+w=\underbrace{a_1\alpha_1+\cdots+a_r\alpha_r}_{u}+\underbrace{b_1\beta_1+\cdots+b_s\beta_s}_{w}$

$\Rightarrow a_1=\cdots=a_r=b_1=\cdots=b_s=0$

$\Rightarrow u=w=0$. #

注：补空间存在性：对 $U\leq V$ 必存在 $W\leq V$ 使得 $V=U\oplus W$.

任取 U 一组基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$，扩充为 V 的一组基 $\alpha_1\cdots\alpha_r\cdots\alpha_n$

则令 $W=\mathbb{F}\langle\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n\rangle$ 即可.

外直和 *

$U/\mathbb{F}$ $\quad W/\mathbb{F}$

在 $U\times W=\{(u,w)\mid u\in U,\ w\in W\}$ 上定义运算如下

$+$: $(u_1,w_1)+(u_2,w_2)\triangleq(u_1+u_2,\ w_1+w_2)$

$\cdot$: $\lambda\cdot(u,w)\triangleq(\lambda u,\ \lambda w)$

则 $(U\times W,+,\cdot)$ 形成一个 $\mathbb{F}$-线性空间，其中零向量为 $(0_U,0_W)$ 称为 U 与 W 的(外)直和，记作 $U\amalg W$ 或 $U\dot{\oplus}W$.

命题 $U,W\leq V$, $\quad U\cap W=0$ 则有线性空间同构.

$$\mathcal{A}:\ U\dot{\oplus}W\longrightarrow U\oplus W$$
$$(u,w)\longmapsto u+w$$

PF: · $\mathcal{A}$ 为线性映射 (验证)

· $\mathcal{A}$ 为单射.

$\mathcal{A}(u,w)=0\iff u+w=0\iff u=w=0\iff(u,w)=(0,0)$.

· $\mathcal{A}$ 为满射.

$U\oplus W=U+W=\{u+w\mid u\in U,\ w\in W\}$. #