第五章 线性映射与线性变换

§5.1 线性映射

<u>Recall</u> $U, V / \mathbb{F}$，$\mathcal{A}: U \to V$ <u>线性映射</u>，若

(L_1)：$\mathcal{A}(u_1+u_2) = \mathcal{A}u_1 + \mathcal{A}u_2 \quad \forall\, u_1, u_2 \in U$

(L_2)：$\mathcal{A}(\lambda u) = \lambda \mathcal{A}u \quad \forall\, u \in U,\ \lambda \in \mathbb{F}$

$\mathcal{A}: V \to V$ 称为<u>线性变换</u>.

$\mathcal{L}(U,V)$：U 到 V 线性映射全体. $\mathcal{L}(V) = \mathcal{L}(V,V)$.

<u>例1.</u> $U = \mathbb{F}^{n\times 1}$，$V = \mathbb{F}^{m\times 1}$

· $\mathcal{A}: U \longrightarrow V$ 令 $A_i = \mathcal{A}e_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}$

则有矩阵 $A = (A_1 A_2 \cdots A_n) \in \mathbb{F}^{m\times n}$

<u>且</u> $\mathcal{A}\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) = A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

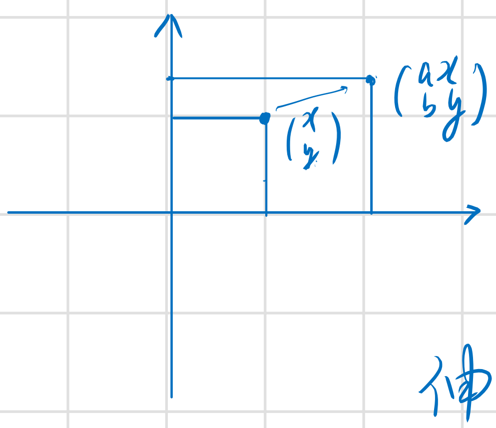
· 反之，$\forall\, A \in \mathbb{F}^{m\times n}$，构造线性映射

$$\mathcal{L}_A: \mathbb{F}^{n\times 1} \longrightarrow \mathbb{F}^{m\times 1}$$
$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto AX$$

从而有 $\mathcal{L}(U,V) \xrightarrow{\sim} \mathbb{F}^{m\times n}$ 作为线性空间.

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} ax \\ by \end{pmatrix}$$

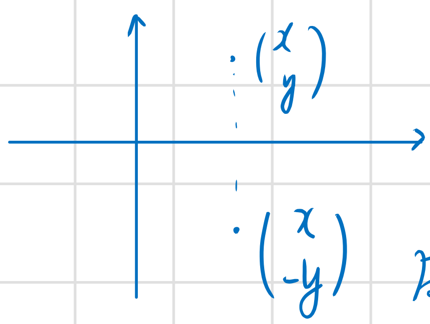
$$\begin{pmatrix} a & \\ & b \end{pmatrix}$$



伸缩

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

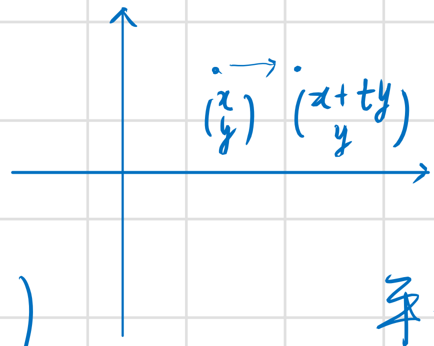
$$\begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$$



反射

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\longmapsto\begin{pmatrix}x+ty\\y\end{pmatrix}$$

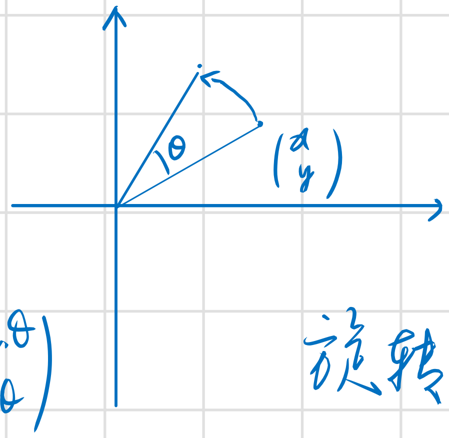
$$\begin{pmatrix}1&t\\&1\end{pmatrix}$$



平移（剪切）

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\longmapsto\begin{pmatrix}x\cos\theta-y\sin\theta\\x\sin\theta+y\cos\theta\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$$



旋转

<u>注</u>. $\mathbb{R}^2$上任一可逆线性变换均为关于坐标轴的伸缩、反射、旋转变换的复合.

· $A\in\mathbb{R}^{2\times2}$ $\det A=1$ 则存在 $a>0$, $t\in\mathbb{R}$, $\theta\in[0,2\pi)$

$$A=\begin{pmatrix}1&t\\&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&\\&\frac{1}{a}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$$

2. $V/\mathbb{F}$, $\alpha_1,\cdots,\alpha_n\in V$ 则有

$$\mathcal{A}:\ \mathbb{F}^{n\times1}\longrightarrow V,\quad \begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\longmapsto x_1\alpha_1+\cdots+x_n\alpha_n$$

则 $\mathcal{A}$ 为唯一的一个将 $e_i\longmapsto\alpha_i$ $i=1,\cdots,n$ 的线性映射.

进一步, $\mathcal{A}$ 为同构 $\Longleftrightarrow$ $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 为一组基. 此时 $\mathcal{A}$ 的逆映射为 $\mathcal{A}^{-1}:\ V\longrightarrow\mathbb{F}^{n\times1}$

$$\alpha\longmapsto\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$$

其中 $\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$ 为 α 在基 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 下坐标.

3. $V=C^\infty(\mathbb{R})$ $\quad \frac{d}{dx}:\ C^\infty(\mathbb{R})\longrightarrow C^\infty(\mathbb{R})$

$$f(x)\longmapsto f'(x)=\frac{d}{dx}f(x)$$

4. $V=\mathbb{F}[x]$. $\quad \mathcal{D}: \mathbb{F}[x] \longrightarrow \mathbb{F}[x]$

$$a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0 \longmapsto na_nx^{n-1}+\cdots+2a_2x+a_1$$

5. $U=\mathbb{F}^{n\times 1}$, $V=\mathbb{F}^{m\times 1}$ $\quad n>m$

$$\pi: \mathbb{F}^{n\times 1} \longrightarrow \mathbb{F}^{m\times 1} \qquad \begin{pmatrix} x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1\\ \vdots \\ x_m\end{pmatrix}$$

$$\iota: \mathbb{F}^{m\times 1} \longrightarrow \mathbb{F}^{n\times 1} \qquad \begin{pmatrix} x_1\\ \vdots \\ x_m\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1\\ \vdots \\ x_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0\end{pmatrix}$$

$$\pi\circ\iota = \mathrm{Id}_{\mathbb{F}^{m\times 1}} \qquad (\iota\circ\pi)^2 = \iota\circ\pi.$$

6. $P\in\mathbb{F}^{p\times m}$, $Q\in\mathbb{F}^{n\times q}$.

$$\mathcal{L}_{P,Q}: \mathbb{F}^{m\times n} \longrightarrow \mathbb{F}^{p\times q}, \quad X \longmapsto PXQ$$

注: $\forall \mathcal{A}\in\mathcal{L}(\mathbb{F}^{m\times n}, \mathbb{F}^{p\times q})$ 存在一组 $P_1,\cdots P_k\in\mathbb{F}^{p\times m}$, $Q_1,\cdots Q_k\in\mathbb{F}^{n\times q}$,
使得 $\mathcal{A}=\sum_{i=1}^{k}\mathcal{L}_{P_i,Q_i}$

7. $\mathcal{O}: U \longrightarrow V \qquad u\longmapsto 0 \quad \forall u\in U$

8. $\mathbb{1}_V: V\longrightarrow V \qquad v\longmapsto v \quad \forall v$ 恒同映射

<u>性质</u> $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(U,V)$ 则

(1) $\mathcal{A}(0_U)=0_V \qquad \mathcal{A}(-u)=-\mathcal{A}u$

(2) $\mathcal{A}(\lambda_1u_1+\cdots+\lambda_nu_n)=\lambda_1\mathcal{A}(u_1)+\cdots+\lambda_n\mathcal{A}(u_n)$

(3) $u_1\cdots u_n$ 线性相关 $\Longrightarrow$ $\mathcal{A}(u_1),\cdots,\mathcal{A}(u_n)$ 线性相关
无 $\Longleftarrow$ 无

$\mathcal{A}: U\to V$, $\quad \alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 为 U 的基 $\quad \beta_1,\cdots,\beta_m$ 为 V 的基

$$\mathcal{A}(\alpha_i)=(\beta_1,\cdots,\beta_m)\begin{pmatrix} a_{1i}\\ \vdots \\ a_{mi}\end{pmatrix}=a_{1i}\beta_1+a_{2i}\beta_2+\cdots+a_{mi}\beta_m$$

即 $\mathcal{A}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\triangleq(\mathcal{A}\alpha_1,\cdots,\mathcal{A}\alpha_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)A$, 其中 $A=(a_{ij})_{m\times n}$.

<u>定义1.1</u> 上述 A 称为线性映射 $\mathcal{A}: U\to V$ 在<u>基 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 以及 $(\beta_1,\cdots,\beta_m)$ 下的矩阵</u>. 若 $U=V$, $(\beta_1,\cdots,\beta_m)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 则称上述 A 为线性变换 $\mathcal{A}$ 在<u>基 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 下的矩阵</u>.

注 $A\in \mathbb{F}^{m\times n}$ $\quad \mathcal{L}_A: \mathbb{F}^{n\times 1}\longrightarrow \mathbb{F}^{m\times 1}$ $\quad X\longmapsto AX$

在基 $(e_1,\cdots,e_n)$ 和 $(e_1,\cdots,e_m)$ 下的矩阵为 A

注 设 $\mathbb{B}_1=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 为 U 一组基, $\mathbb{B}_2=(\beta_1,\cdots,\beta_m)$ 为 V 一组基

$$\begin{tikzcd}
\sum_{i=1}^{n} x_i\alpha_i \arrow[d, mapsto] & U \arrow[r, "\mathcal{A}"] \arrow[d, "\varphi_{\mathbb{B}_1}"', "\wr"] & V \arrow[d, "\varphi_{\mathbb{B}_2}", "\wr"'] & \sum_{j=1}^{m} y_j\beta_j \arrow[d, mapsto] \\
\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix} & \mathbb{F}^{n\times 1} \arrow[r, "\mathcal{L}_A"] & \mathbb{F}^{m\times 1} & \begin{pmatrix} y_1\\ \vdots \\ y_m\end{pmatrix}
\end{tikzcd}$$

则 $\varphi_{\mathbb{B}_1}$ 在基 $\mathbb{B}_1$ 以及 $e_1,\cdots,e_n$ 下矩阵为 I_n

$\varphi_{\mathbb{B}_2}$ 在基 $\mathbb{B}_2$ 以及 $e_1,\cdots,e_m$ 下矩阵为 I_m

$\mathcal{A}$ 在基 $\mathbb{B}_1$ 以及 $\mathbb{B}_2$ 下矩阵为 A.

例 $V=\mathbb{F}^{2\times 2}$, $\quad A=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in \mathbb{F}^{2\times 2}$

$\mathcal{L}_A: V\longrightarrow V \quad X\longmapsto AX$

取 V 一组基 $E_{11}=\begin{pmatrix} 1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $E_{12}=\begin{pmatrix} 0&1\\0&0\end{pmatrix}$, $E_{21}=\begin{pmatrix} 0&0\\1&0\end{pmatrix}$, $E_{22}=\begin{pmatrix} 0&0\\0&1\end{pmatrix}$

则 $\mathcal{L}_A$ 在 $E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$ 下矩阵为 $\begin{pmatrix} a & & b & \\ & a & & b\\ c & & d & \\ & c & & d\end{pmatrix}=A\otimes I_2$

思考题: $U=\mathbb{F}^{n\times q}$, $V=\mathbb{F}^{m\times p}$ $\quad A\in\mathbb{F}^{m\times n}$, $B\in \mathbb{F}^{p\times q}$

$\mathcal{L}_{A,B}: U\longrightarrow V \quad X\longmapsto AXB$

取 U 的一组基 $\mathbb{B}_1=(E_{11},E_{12},\cdots,E_{1q},E_{21},\cdots,E_{n1},\cdots,E_{nq})$

V ⋯ $\mathbb{B}_2=(E_{11},E_{12},\cdots,E_{1p},E_{21},\cdots,E_{m1},\cdots,E_{mp})$

问 $\mathcal{L}_{A,B}$ 在上述基下的矩阵 $=$?

例 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\in\mathbb{F}^{3\times 1}$, $\beta_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\beta_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, $\beta_3=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\in\mathbb{F}^{2\times 1}$

(1) 是否存在 $\mathcal{A}: \mathbb{F}^{3\times 1}\longrightarrow \mathbb{F}^{2\times 1}$, 使得 $\mathcal{A}\alpha_i=\beta_i$, $i=1,2,3$?

(2) ⋯⋯ $\mathcal{B}: \mathbb{F}^{2\times 1}\longrightarrow \mathbb{F}^{3\times 1}$, 使得 $\mathcal{B}\beta_i=\alpha_i$, $i=1,2,3$?

<u>解</u>: (1) 存在. $\mathscr{A} = \mathscr{L}_A$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ 1 & 1 & \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(2) $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性相关. 而 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关.

<u>例</u> $\mathbb{F}_n[x] = \{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in \mathbb{F}[x] \mid a_i \in \mathbb{F}\}$

$D: \mathbb{F}_n[x] \longrightarrow \mathbb{F}_n[x]$ $\quad D(x^i) = i x^{i-1}$ $\quad i \geq 0$ 则

D 在基 $(1, x, x^2, \cdots, x^{n-1})$ 下矩阵为 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 2 & \\ & & \ddots & n \\ & & & 0 \end{pmatrix}$.

<u>例</u> $V = \mathbb{R}\langle \sin x, \cos x \rangle \leq C^\infty(\mathbb{R})$. $\quad \frac{d}{dx}: V \longrightarrow V$ 在基

$(\sin x, \cos x)$ 下矩阵为 $\begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}$.

<u>定理 1.2</u> $U, V / \mathbb{F}$, $\quad \mathcal{B}_1 = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ 为 U 一组基 $\beta_1, \cdots, \beta_n \in V$.

则存在唯一一个线性映射 $\mathscr{A} \in \mathscr{L}(U, V)$, 使得 $\mathscr{A}\alpha_i = \beta_i$, $i = 1, \cdots, n$.

<u>PF</u>. · 令 $\mathscr{A}(\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \cdots + \lambda_n\alpha_n) = \lambda_1\beta_1 + \cdots + \lambda_n\beta_n$

可验证 $\mathscr{A}$ 为满足条件的线性映射.

· <u>唯一性</u>: 设 $\mathscr{A}, \mathscr{A}' \in \mathscr{L}(U, V)$. $\mathscr{A}\alpha_i = \mathscr{A}'\alpha_i \ \forall i = 1, \cdots n$

则有 $(\mathscr{A} - \mathscr{A}')\alpha_i = 0$, $i = 1, \cdots, n$. 则对 $\forall u \in U$, 存在一组 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$

使得 $u = \lambda_1\alpha_1 + \cdots + \lambda_n\alpha_n$, 从而 $(\mathscr{A} - \mathscr{A}')(u) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (\mathscr{A} - \mathscr{A}')(\alpha_i) = 0$

$\Rightarrow \mathscr{A} - \mathscr{A}' = 0$ 即有 $\mathscr{A} = \mathscr{A}'$ #

<u>推论 1.3</u> $U, V / \mathbb{F}$, $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ 为 U 中线性无关组. $\beta_1, \cdots, \beta_k \in V$.

则存在 $\mathscr{A} \in \mathscr{L}(U, V)$ 使得 $\mathscr{A}\alpha_i = \beta_i$, $i = 1, \cdots, k$.

<u>PF</u> 将 $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ 扩充为 U 的一组基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_k, \cdots \alpha_n$. 则存在

$\mathscr{A} \in \mathscr{L}(U, V)$, 使得 $\mathscr{A}\alpha_1 = \beta_1, \cdots, \mathscr{A}\alpha_k = \beta_k$, $\mathscr{A}\alpha_{k+1} = \cdots = \mathscr{A}\alpha_n = 0$ #

<u>定理 1.4</u> $U, V / \mathbb{F}$ $\mathcal{B}_1 = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, $\mathcal{B}_2 = (\beta_1, \cdots, \beta_m)$ 分别为 U, V 一组基

则 $\quad \mathscr{L}(U, V) \xleftrightarrow[\cong]{\text{线性}} \mathbb{F}^{m \times n}$

$\quad \mathscr{A} \longmapsto \mathscr{A}$ 在 $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ 下的矩阵.

Recall: $\mathcal{L}(U,V)$ 为线性空间: $\begin{cases} (\mathcal{A}+\mathcal{B})(u) \triangleq \mathcal{A}(u)+\mathcal{B}(u) \\ (\lambda\mathcal{A})(u) \triangleq \lambda(\mathcal{A}(u)) \end{cases}$ $\forall \mathcal{A},\mathcal{B}\in\mathcal{L}(U,V)$, $\lambda\in\mathbb{F}$.

命题 1.5 $U, V, W / \mathbb{F}$. $\mathbb{B}_U=(\alpha_1,\cdots,\alpha_p)$, $\mathbb{B}_V=(\beta_1,\cdots,\beta_n)$, $\mathbb{B}_W=(\gamma_1,\cdots,\gamma_m)$
分别为 U,V,W 一组基. $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V,W)$, $\mathcal{B}\in\mathcal{L}(U,V)$, $\mathcal{A},\mathcal{B}$ 在上述基下的矩阵分别为 $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$, $B\in\mathbb{F}^{n\times p}$. 则 $\mathcal{A}\mathcal{B}: U\to W$ 在 $\mathbb{B}_U$, $\mathbb{B}_W$ 下的矩阵为 AB.

PF $U \xrightarrow{\mathcal{B}} V \xrightarrow{\mathcal{A}} W$

$$\mathcal{A}(\beta_1,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)A, \quad \mathcal{B}(\gamma_1,\cdots,\gamma_n)=(\beta_1,\cdots,\beta_n)B$$

$$\Longrightarrow (\mathcal{A}\circ\mathcal{B})(\gamma_1,\cdots,\gamma_n)=\mathcal{A}(\mathcal{B}(\gamma_1),\cdots\mathcal{B}(\gamma_n))=\mathcal{A}((\beta_1,\cdots,\beta_n)B)$$

$$\overset{?}{=} (\mathcal{A}(\beta_1,\cdots,\beta_n))B=((\alpha_1,\cdots,\alpha_m)A)B=(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)(AB) \quad \#$$

注 固定 V 的一组基 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 由定理 1.4 知有 1-1 对应

$$\mathcal{L}(V) \xleftrightarrow{1-1} \mathbb{F}^{n\times n}.$$

$\mathcal{L}(V)$ 具有环结构 (加法为线性映射的和, 乘法为线性映射复合)
且上述对应给出环的同构

线性函数

定义 1.6 $V/\mathbb{F}$. $f: V\to\mathbb{F}$ 称为线性函数 記 $f\in\mathcal{L}(V,\mathbb{F})$
即满足 (LM1): $f(u+v)=f(u)+f(v)$ (LM2): $f(\lambda v)=\lambda f(v)$.
$\mathcal{L}(V,\mathbb{F})$ 为域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间. 称为 V 的对偶空间, 记作 V^*.

$\mathbb{B}=(v_1,\cdots,v_n)$ 为 V 一组基. $f\in V^*$. 令 $a_i=f(v_i)$. $\forall i$ 则

$$f(v_1,\cdots,v_n)=(f(v_1),\cdots,f(v_n))=(a_1,\cdots,a_n)$$

故 $$f\left((v_1,\cdots v_n)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\right)=(f(v_1),\cdots f(v_n))\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=(a_1\cdots a_n)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\sum a_i x_i$$

对任一 $1\le i\le n$，令 $v^i: V\to \mathbb{F}\in V^*$，$v^i(v_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}1 & j=i\\ 0 & j\neq i\end{cases}$

即 $v^i\left(\sum_{j=1}^n x_j v_j\right)=x_i$，$\forall \sum_{j=1}^n x_j v_j\in V$.

<u>定理1.7</u> 若 $\mathcal{B}=(v_1,\cdots,v_n)$ 为 V 一组基，则 $(v^1,\cdots,v^n)$ 为 V^* 一组基，称为 $\mathcal{B}$ 的<u>对偶基</u>

<u>PF</u>: · $\forall f\in V^*$ $f=\sum_{i=1}^n f(v_i)v^i$，事实上，

$\left(\sum_{i=1}^n f(v_i)v^i\right)(v_k)=f(v_k)$ $\forall k=1,\cdots,n$

$\Longrightarrow \left(\sum_{i=1}^n f(v_i)v^i\right)\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k v_k\right)=f\left(\sum_{k=1}^n\lambda_k v_k\right)$ 即 $f=\sum_{i=1}^n f(v_i)v^i$

故 $V^*=\mathbb{F}\langle v^1,\cdots,v^n\rangle$

· $v^1,\cdots,v^n$ 线性无关

设 $\sum_{i=1}^n \lambda_i v^i=0$ $\Rightarrow \left(\sum_{i=1}^n\lambda_i v^i\right)(v_k)=\lambda_k=0$ $\forall k=1,\cdots,n$

即 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$ ☐

<u>例</u> $V=\mathbb{F}[x]$，则 $(v_0, v_1=x, v_2=x^2,\cdots,v_n=x^n,\cdots)$ 为 V 的一组基。令 $v^i\in V^*$，满足 $v^i(v_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}0\\1\end{cases}$

则 $v^0,v^1,\cdots$ 线性无关，但不为 V^* 的一组基。

$f\in V^*$. $f\left(\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i v_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i$

（V中每个元素为有限和，故仅有有限个λ_i非0）

易知 $f\notin \mathbb{F}\langle v^0,v^1,\cdots,v^n,\cdots\rangle$

否则，存在有限的 n 以及 $\lambda_0,\cdots,\lambda_n$，使得 $f=\sum_{i=1}^n\lambda_i v^i$

而 $f(v_{n+1})=1\neq\left(\sum_{i=1}^n\lambda_i v^i\right)(v_{n+1})=0$.

像与核

例 $\mathscr{A}: \mathbb{F}^{4\times1} \longrightarrow \mathbb{F}^{3\times1}$, $X \longmapsto AX$ 其中 $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&5\\3&4&5&6\end{pmatrix}$

求 $\mathbb{F}^{4\times1}$, $\mathbb{F}^{3\times1}$ 的基 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 以及 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ 使得

$$\mathscr{A}\alpha_i = \begin{cases}\beta_i & 1\le i\le r\\ 0 & r\le i\le 4\end{cases}$$

解 首先 $r = \mathrm{rk}A = 2$. 则 α_3,α_4 为方程组 $AX=0$ 的一组线性无关解. 可取 $\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}$ $\alpha_4=\begin{pmatrix}0\\1\\-2\\1\end{pmatrix}$,

扩充为 $\mathbb{F}^{4\times1}$ 的基 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$, α_3, α_4

令 $\beta_1=\mathscr{A}\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\beta_2=\mathscr{A}\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$, 取 $\beta_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

则 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 以及 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ 即为所求.

定义1.8 $U,V/\mathbb{F}$. $\mathscr{A}: U\longrightarrow V$ 线性映射

$\mathrm{Im}\,\mathscr{A} \triangleq \mathscr{A}(U) = \{\mathscr{A}(u) \mid u\in U\}$ 称为 $\mathscr{A}$ 的像 (image)

$\mathrm{Ker}\,\mathscr{A} \triangleq \mathscr{A}^{-1}(0_V) = \{u\in U \mid \mathscr{A}(u)=0\}$ 称为 $\mathscr{A}$ 的核 (kernel)

引理1.9 设 $U,V/\mathbb{F}$. $\mathscr{A}\in\mathcal{L}(U,V)$. 则

(1) $\mathrm{Ker}\,\mathscr{A}\le U$, 且 $\mathscr{A}$ 为单射 $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Ker}\,\mathscr{A}=\{0\}$

(2) $\mathrm{Im}\,\mathscr{A}\le V$, 且 $\mathscr{A}$ 为满射 $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Im}\,\mathscr{A}=V$.

(3) $\mathscr{A}$ 为同构 $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Ker}\,\mathscr{A}=0$, $\mathrm{Im}\,\mathscr{A}=V$.

推论1.10 设 $U,V/\mathbb{F}$ 为有限维线性空间 $\mathscr{A}\in\mathcal{L}(U,V)$. 则 $\mathscr{A}$ 可逆 $\Longleftrightarrow$ 下述三者之二成立.

(1) $\dim U=\dim V$, (2) $\mathrm{Ker}\,\mathscr{A}=0$ (3) $\mathrm{Im}\,\mathscr{A}=V$.

定义1.11 $\dim(\mathrm{Im}\,\mathscr{A})$ 称为 $\mathscr{A}$ 的秩 记作 $\mathrm{rk}(\mathscr{A})$.

引理 1.12 设 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)$ 为 $\ker\mathcal{U}$ 一组基 $S=(u_1,\cdots,u_t)$ 为 $\mathcal{U}$ 中向量组

令 $\mathbb{B}=(\alpha_1,\cdots,\alpha_s,u_1,\cdots,u_t)$ 则

(1) $\mathbb{B}$ 线性无关 $\Longleftrightarrow$ $(\mathcal{A}u_1,\cdots,\mathcal{A}u_t)$ 线性无关.

(2) $\mathbb{B}$ 为 $\mathcal{U}$ 基 $\Longleftrightarrow$ $(\mathcal{A}u_1,\cdots,\mathcal{A}u_t)$ 为 $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ 一组基.

PF (1) "$\Longrightarrow$" 设 $\mathbb{B}$ 线性无关. 对 $\forall\mu_1,\cdots,\mu_t\in\mathbb{F}$ 若 $\sum_{i=1}^{t}\mu_i\mathcal{A}u_i=0$

则 $\sum_i\mu_iu_i\in\ker\mathcal{A}$ 故 $\mu_1u_1+\cdots+\mu_tu_t=\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_s\alpha_s$, $\exists\lambda_i\in\mathbb{F}$

而 $\mathbb{B}$ 线性无关 知 $\mu_1=\cdots=\mu_t$

"$\Longleftarrow$" 设 $\mathcal{A}u_1,\cdots,\mathcal{A}u_t$ 线性无关. 对 $\forall\lambda_1,\cdots,\lambda_s,\mu_1,\cdots,\mu_t\in\mathbb{F}$.

若 $\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_s\alpha_s+\mu_1u_1+\cdots+\mu_tu_t=0$

则有 $\mu_1\mathcal{A}u_1+\cdots+\mu_t\mathcal{A}u_t=0\Longrightarrow\mu_1=\cdots=\mu_t=0$

$\Longrightarrow\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_s\alpha_s=0\Longrightarrow\lambda_1=\cdots=\lambda_s=0$.

(2) 由 (1). 只须证明 $\mathcal{U}=\mathbb{F}\langle\mathbb{B}\rangle\Longleftrightarrow\operatorname{Im}\mathcal{A}=\mathbb{F}\langle\mathcal{A}u_1,\cdots,\mathcal{A}u_t\rangle$.

"$\Longrightarrow$" $\mathcal{U}=\mathbb{F}\langle\mathbb{B}\rangle\Longrightarrow\operatorname{Im}\mathcal{A}=\mathcal{A}(\mathbb{F}\langle\mathbb{B}\rangle)=\mathbb{F}\langle\mathcal{A}\mathbb{B}\rangle=\mathbb{F}\langle\mathcal{A}u_1,\cdots,\mathcal{A}u_t\rangle$.

"$\Longleftarrow$" 设 $\operatorname{Im}\mathcal{A}=\mathbb{F}\langle\mathcal{A}u_1,\cdots,\mathcal{A}u_t\rangle$ 则 $\forall u\in\mathcal{U}$ 知

$\mathcal{A}u=\mu_1\mathcal{A}u_1+\cdots+\mu_t\mathcal{A}u_t$ $\exists\mu_1,\cdots,\mu_t\in\mathbb{F}$

$\Longrightarrow u-\mu_1u_1-\cdots-\mu_tu_t\in\ker\mathcal{A}\Longrightarrow u\in\mathbb{F}\langle\mathbb{B}\rangle$ #

结合 $\operatorname{rk}(\mathcal{A})$ 定义. 有

定理 1.13 $\mathcal{U},\mathcal{V}/\mathbb{F}$. $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(\mathcal{U},\mathcal{V})$. 则 $\dim\mathcal{U}=\operatorname{rk}(\mathcal{A})+\dim\ker\mathcal{A}$.

命题 1.14 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(\mathcal{U},\mathcal{V})$. $\mathcal{A}$ 在 $\mathcal{U},\mathcal{V}$ 某组基下的方阵为 $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$. 令

$V_A=\ker A=\{X\in\mathbb{F}^{n\times 1}\mid AX=0\}$ 为方程组 $AX=0$ 的解空间. 则

$\operatorname{rk}(A)=\operatorname{rk}(\mathcal{A})$, $\dim V_A=\dim(\ker\mathcal{A})$

例 $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$. $\operatorname{rk}A^k=\operatorname{rk}A^{k+1}\Longrightarrow\operatorname{rk}A^{k+1}=\operatorname{rk}A^{k+2}=\operatorname{rk}A^{k+3}=\cdots$

PF: 令 $\mathcal{A}=\mathcal{L}_A:\mathbb{F}^{n\times 1}\longrightarrow\mathbb{F}^{n\times 1}$ $X\longmapsto AX$. $\forall X\in\mathbb{F}^{n\times 1}$

则 $\operatorname{rk}A^k=\operatorname{rk}\mathcal{A}^k$, $\operatorname{rk}\mathcal{A}^{k+1}=\operatorname{rk}A^{k+1}$

$$\operatorname{rk} A^k = \operatorname{rk} A^{k+1} \Longrightarrow \left.\begin{array}{r}\operatorname{rk} \mathscr{A}^k = \operatorname{rk} \mathscr{A}^{k+1} \\ \operatorname{Im} \mathscr{A}^k \supseteq \operatorname{Im} \mathscr{A}^{k+1}\end{array}\right\} \Longrightarrow \operatorname{Im} \mathscr{A}^k = \operatorname{Im} \mathscr{A}^{k+1}$$

$$\Longrightarrow \operatorname{Im} \mathscr{A}^{k+1} = \mathscr{A}(\operatorname{Im} \mathscr{A}^k) = \mathscr{A}(\operatorname{Im} \mathscr{A}^{k+1}) = \operatorname{Im} \mathscr{A}^{k+2}$$

$$\Longrightarrow \operatorname{rk} \mathscr{A}^{k+2} = \operatorname{rk} \mathscr{A}^{k+1} \Longrightarrow \operatorname{rk} A^{k+2} = \operatorname{rk} A^{k+1} = \cdots \quad \#$$

例 (Fitting) $\dim V < \infty$, $A \in \mathscr{L}(V)$ 若 $\operatorname{Im} \mathscr{A}^k = \operatorname{Im} \mathscr{A}^{k+1}$, 则

$$V = \operatorname{Im} \mathscr{A}^k \oplus \operatorname{Ker} \mathscr{A}^k$$

PF

$$\operatorname{Ker} \mathscr{A} \subseteq \operatorname{Ker} \mathscr{A}^2 \subseteq \cdots \subseteq \operatorname{Ker} \mathscr{A}^{k+1} \subseteq \cdots$$

$$\operatorname{Im} \mathscr{A} \supseteq \operatorname{Im} \mathscr{A}^2 \supseteq \cdots \supseteq \operatorname{Im} \mathscr{A}^{k+1} \supseteq \cdots$$

若 $\operatorname{rk} \mathscr{A}^k = \operatorname{rk} \mathscr{A}^{k+1}$, 由上例知 $\operatorname{Im} \mathscr{A}^k = \operatorname{Im} \mathscr{A}^{k+1} = \operatorname{Im} \mathscr{A}^{k+2} = \cdots$

比较维数 $\operatorname{Ker} \mathscr{A}^k = \operatorname{Ker} \mathscr{A}^{k+1} = \operatorname{Ker} \mathscr{A}^{k+2} = \cdots$

· $\forall v \in V$, $\mathscr{A}^k v \in \operatorname{Im} \mathscr{A}^k = \operatorname{Im} \mathscr{A}^{2k}$

$$\Longrightarrow \mathscr{A}^k v = \mathscr{A}^{2k} u \qquad \exists\, u \in V$$

$$\Longrightarrow v = \underbrace{(v - \mathscr{A}^k u)}_{\in \operatorname{Ker} \mathscr{A}^k} + \underbrace{\mathscr{A}^k u}_{\in \operatorname{Im} \mathscr{A}^k} \Longrightarrow V = \operatorname{Ker} \mathscr{A}^k + \operatorname{Im} \mathscr{A}^k$$

· 任取 $v \in \operatorname{Ker} \mathscr{A}^k \cap \operatorname{Im} \mathscr{A}^k$. 则 $v = \mathscr{A}^k u$, $\exists\, u \in V$.

从而 $0 = \mathscr{A}^k v = \mathscr{A}^{2k} u$. 即 $u \in \operatorname{Ker} \mathscr{A}^{2k} = \operatorname{Ker} \mathscr{A}^k$

$$\Longrightarrow v = \mathscr{A}^k u = 0 \quad \text{故} \quad \operatorname{Ker} \mathscr{A}^k \cap \operatorname{Im} \mathscr{A}^k = \{0\}. \quad \#$$

注 · 上述结论对无穷维空间不成立.

例如. 令 $V = \mathbb{R}[x]$ $\quad D: V \to V$, $f(x) \mapsto f'(x)$

则 $\operatorname{Im} D = \operatorname{Im} D^2 = \mathbb{R}[x]$ 而 $\mathbb{R}[x] \neq \operatorname{Im} D \oplus \operatorname{Ker} D$

· 设 $\dim V < \infty$, $\mathscr{A} \in \mathscr{L}(V)$. 考察子空间降链

$$V \geqslant \operatorname{Im} \mathscr{A} \geqslant \operatorname{Im} \mathscr{A}^2 \geqslant \operatorname{Im} \mathscr{A}^3 \geqslant \cdots$$

则有 $\dim V \geqslant \dim \operatorname{Im} \mathscr{A} \geqslant \dim \operatorname{Im} \mathscr{A}^2 \geqslant \cdots$ 则必存在 $1 \leq k \leq \dim V$

使得 $\dim \mathscr{A}^k = \dim \mathscr{A}^{k+1}$, 从而 $V = \operatorname{Im} \mathscr{A}^k \oplus \operatorname{Ker} \mathscr{A}^{k+1}$.

§5.2 线性映射在不同基下的矩阵

$V/\mathbb{F}$，$(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，$(\beta_1,\cdots,\beta_n)$ 为两组基

$(\beta_1,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)P \quad P\in GL_n(\mathbb{F})$.

设 v 在 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 下的坐标为 $\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$，在 $(\beta_1,\cdots,\beta_n)$ 下坐标为 $\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$

则 $v=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)X=(\beta_1,\cdots,\beta_n)Y \Longrightarrow Y=P^{-1}X$

例 $\mathbb{F}_n[x]\overset{=\{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n \mid a_i\in\mathbb{F}\}}{\leqslant}\mathbb{F}[x]$，$\mathbb{B}=(1,x,\cdots,x^n)$ 为一组基，$a_1,\cdots,a_{n+1}$ 两两不同

令 $f_i(x)=\prod_{j\neq i}(x-x_j)=(x-a_1)\cdots(x-a_{i-1})(x-a_{i+1})\cdots(x-a_{n+1})$

(1) 证明 $\mathbb{B}_1=(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_{n+1}(x))$ 为 $\mathbb{F}_n[x]$ 一组基

(2) 求 $\mathbb{B}_1$ 到 $\mathbb{B}$ 的过渡阵.

解 (1) 考察映射 $\mathcal{A}:\ \mathbb{F}_n(x)\longrightarrow\mathbb{F}^{(n+1)\times1}$，则 $\mathcal{A}$ 为线性映射.

$$f(x)\longmapsto\begin{pmatrix}f(a_0)\\ \vdots\\ f(a_n)\end{pmatrix}$$

<u>则</u> $\mathcal{A}(f_1(x)),\mathcal{A}(f_2(x)),\cdots,\mathcal{A}(f_{n+1}(x))$ 线性无关

$(\mathcal{A}(f_i(x))=f_i(a_i)e_i,\quad i=1,\cdots,n+1)$

(2) $(1,x,x^2,\cdots,x^n)=(f_1,\cdots,f_{n+1})P$

$\Rightarrow \mathcal{A}(1,x,\cdots,x^n)=\mathcal{A}((f_1,\cdots,f_{n+1})P)=(\mathcal{A}(f_1,\cdots,f_{n+1}))P$

即
$$\begin{pmatrix}1&a_1&\cdots&a_1^n\\1&a_2&\cdots&a_2^n\\ &\cdots&&\\1&a_{n+1}&\cdots&a_{n+1}^n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_1(a_1)&&\\&\ddots&\\&&f_{n+1}(a_{n+1})\end{pmatrix}P$$

$$\Longrightarrow P=\begin{pmatrix}\frac{1}{f_1(a_1)}&\frac{a_1}{f_1(a_1)}&\cdots&\frac{a_1^n}{f_1(a_1)}\\ \frac{1}{f_2(a_2)}&\frac{a_2}{f_2(a_2)}&\cdots&\frac{a_2^n}{f_2(a_2)}\\ \vdots&&&\\ \frac{1}{f_{n+1}(a_{n+1})}&\frac{a_{n+1}}{f_{n+1}(a_{n+1})}&\cdots&\frac{a_{n+1}^n}{f_{n+1}(a_{n+1})}\end{pmatrix}$$

设 $\mathbb{B}_1=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，$\mathbb{B}_1'=(\alpha_1',\cdots,\alpha_n')$ 为 U 两组基 $\quad\mathbb{B}_1'=\mathbb{B}_1P$

$\mathbb{B}_2=(\beta_1,\cdots,\beta_m)$，$\mathbb{B}_2'=(\beta_1',\cdots,\beta_m')$ 为 V 两组基 $\quad\mathbb{B}_2'=\mathbb{B}_2Q$

$\mathcal{A}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(\beta_1,\cdots,\beta_m)P$. 则有

$$\mathcal{A}(\alpha_1',\cdots,\alpha_n') = \mathcal{A}((\alpha_1,\cdots,\alpha_n)P) = (\mathcal{A}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n))P$$

$$= ((\beta_1,\cdots,\beta_m)A)P = (\beta_1,\cdots,\beta_m)(AP) = ((\beta_1',\cdots,\beta_m')Q^{-1})(AP)$$

$$= (\beta_1',\cdots,\beta_m')(Q^{-1}AP)$$

即 $\mathcal{A}$ 在 $\mathbb{B}_1'$ 以及 $\mathbb{B}_2'$ 下的矩阵为 $Q^{-1}AP$.

定理 2.1 $A,B\in\mathbb{F}^{m\times n}$ 相抵 $\Longleftrightarrow$ A,B 为某个线性映射在不同基下矩阵.

PF "$\Longleftarrow$" 证明如上.

"$\Longrightarrow$" 设 A,B 相抵. 则存在可逆阵 P,Q 使得 $B=Q^{-1}AP$.

考察 $\mathcal{L}_A: \mathbb{F}^{n\times 1}\longrightarrow \mathbb{F}^{m\times 1}$, $X\longmapsto AX$

则 $\mathcal{L}_A$ 在标准基 $(e_1,\cdots,e_n)$ 以及 $(e_1,\cdots,e_m)$ 下矩阵为 A

令 $Q=(Q_1\cdots Q_m)$ $\quad P=(P_1\cdots P_n)$ $\quad Q_i\in\mathbb{F}^{m\times 1}$, $P_j\in\mathbb{F}^{n\times 1}$

则 $(P_1,\cdots,P_n)$ 以及 $(Q_1,\cdots,Q_m)$ 分别为 $\mathbb{F}^{n\times 1}$ 以及 $\mathbb{F}^{m\times 1}$ 的基. 从

$\mathcal{L}_A$ 在上述基下的矩阵为 B.

推论 2.2 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(U,V)$. 则存在 U 的一组基 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 以及 V 的一组基 $(\beta_1,\cdots,\beta_m)$, 使得 $\mathcal{A}$ 在上述基下矩阵为 $\begin{pmatrix} I_r & \\ & 0\end{pmatrix}$, 即

$$\mathcal{A}\alpha_i = \begin{cases} \beta_i & 1\le i\le r \\ 0 & r< i< n\end{cases}$$

注: 上述 r 由 $\mathcal{A}$ 唯一确定, 即 $\mathcal{A}$ 的秩.

§5.3 线性变换

Recall $V/\mathbb{F}$, $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$, $(\beta_1,\cdots,\beta_n)$ 为两组基.

$\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$, $\mathcal{A}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1\cdots\alpha_n)A$.

$\mathcal{A}(\beta_1,\cdots,\beta_n)=(\beta_1\cdots\beta_n)B$

设 $(\beta_1,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)P$, P 为可逆阵. 则 $B=P^{-1}AP$.

定义 3.1 $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$. 若存在可逆阵 P, 使得 $B=P^{-1}AP$, 则称 B 相似(similar)于 A, 或 B 与 A 相似, 记作 $A\overset{s}{\sim}B$

引理 3.2 相似为等价关系,

(即 $\cdot\ A\overset{s}{\sim}A$ $\quad\cdot\ A\overset{s}{\sim}B\Rightarrow B\overset{s}{\sim}A$ $\quad\cdot\ A\overset{s}{\sim}B,\ B\overset{s}{\sim}C\Rightarrow A\overset{s}{\sim}C$

命题 3.3 A,B 相似 $\Longleftrightarrow$ A,B 为同一线性变换在不同基下的矩阵.

基本问题: 给定线性变换 $\mathcal{A}$, 如何找到一组合适的基, 使得 $\mathcal{A}$ 的矩阵尽量简单? 或等价地, 给定矩阵 A, 找到 A 的相似等价类中的某种最简形式.

例 (1) $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ 是否相似?

(2) $A=\begin{pmatrix}1&1&&\\&1&1&\\&&1&1\\&&&1\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}1&1&&\\&1&&\\&&1&1\\&&&1\end{pmatrix}$ 是否相似?

解: $A\overset{s}{\sim}B \Longleftrightarrow \exists P \quad B=P^{-1}AP$

$$\Rightarrow\begin{cases}P^{-1}A^2P=P^{-1}AP\cdot P^{-1}AP=B^2\\ P^{-1}(I-A)P=I-P^{-1}AP=I-B\end{cases}$$

(1) $A^2=A$ $\quad B^2=0$ $\Rightarrow$ $A^2\overset{s}{\not\sim}B^2\Rightarrow A\overset{s}{\not\sim}B$

(2) $rk(I_4-A)=3$ $\quad rk(I_4-B)=2$. $\Rightarrow I_4-A\overset{s}{\not\sim}I_4-B\Rightarrow A\overset{s}{\not\sim}B$

一般地，我们有

命题3.4　A 与 B 相似，则对 $\forall f(x)\in F[x]$，$f(A)$ 与 $f(B)$ 相似

命题3.5　令 $J_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}_{k\times k}$，则有

(1) $\mathrm{diag}(J_{k_1}, J_{k_2}) \overset{s}{\sim} \mathrm{diag}(J_{k_2}, J_{k_1})$

(2) $m_1 \geq m_2 \geq \cdots \geq m_s \geq 1$，$n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_t \geq 1$，$\sum_{i=1}^{s} m_i = \sum_{j=1}^{t} n_j = n$

则 $\mathrm{diag}(J_{m_1}, \cdots, J_{m_s}) \overset{s}{\sim} \mathrm{diag}(J_{n_1}, \cdots, J_{n_t})$

$\iff s=t,\quad m_i = n_i \quad \forall i=1,\cdots,s$

PF (1) $\begin{pmatrix} & I_{k_2} \\ I_{k_1} & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} J_{k_1} & \\ & J_{k_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & I_{k_1} \\ I_{k_2} & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{k_2} & \\ & J_{k_1} \end{pmatrix}$

(2) 首先，右边 $\iff \#\{i \mid m_i = u\} = \#\{i \mid n_i = u\}$，对 $\forall u \geq 1$.

"$\Leftarrow$" 显然成立，只须证明

"$\Rightarrow$" 令 $\alpha_u = \#\{i \mid m_i \geq u\}$，$\beta_u = \#\{j \mid m_j \geq u\}$，$\forall u \geq 1$

即有 $m_1 \geq \cdots \geq m_{\alpha_u} \geq u > m_{\alpha_u+1} \geq \cdots \geq m_s$，$n_1 \geq \cdots \geq n_{\beta_u} \geq u > n_{\beta_u+1} \geq \cdots \geq n_t$.

显然 $\alpha_1 = s$，$\beta_1 = t$，且 $\#\{i \mid m_i = u\} = \alpha_u - \alpha_{u+1}$，$\#\{j \mid n_j = v\} = \beta_v - \beta_{v+1}$

另一方面，$rk(J_m^k) = \begin{cases} m-k & k \leq m \\ 0 & k > m \end{cases} = m - \min(m,k)$

从而 $rk\left(\mathrm{diag}(J_{m_1},\cdots,J_{m_s})^k\right) = n - \min\{k, m_1\} - \min(k, m_2) - \cdots - \min(k, m_s)$

$= n - u\cdot\alpha_u - (m_{\alpha_u+1} + \cdots + m_s) = n - \sum_{i=1}^{u-1} i(\alpha_i - \alpha_{i+1}) - u\alpha_u$

$= n - \alpha_1 - \alpha_2 - \cdots - \alpha_u$

同理 $rk(\mathrm{diag}(J_{n_1}, \cdots, J_{n_s})^u) = n - \beta_1 - \beta_2 - \cdots - \beta_u$

$\mathrm{diag}(J_{m_1}, \cdots, J_{m_s}) \overset{s}{\sim} \mathrm{diag}(J_{n_1}, \cdots, J_{n_t})$

$\Rightarrow \mathrm{diag}(J_{m_1}, \cdots, J_{m_s})^u \overset{s}{\sim} \mathrm{diag}(J_{n_1}, \cdots, J_{n_t})^u \quad \forall u$

$\Rightarrow n - \alpha_1 - \cdots - \alpha_u = n - \beta_1 - \beta_2 - \cdots - \beta_u \quad \forall u$

$\Rightarrow \alpha_1 = \beta_1 \Rightarrow s = t$

$\alpha_1 + \alpha_2 = \beta_1 + \beta_2$，$\cdots$，$\alpha_1 + \cdots + \alpha_u = \beta_1 + \cdots + \beta_u$，$\cdots$

$\Rightarrow \alpha_u = \beta_u \quad \forall u \quad \Rightarrow m_1 = n_1,\ m_2 = n_2,\ \cdots,\ m_s = n_s$ #

定义3.6 · $V/\mathbb{F}$. $\mathscr{A}\in\mathscr{L}(V)$. 若存在V的一组基 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 使得 $\mathscr{A}$ 在其下的矩阵为对角阵 则称 $\mathscr{A}$ 可对角化

· $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$、 A 相似于对角阵. 则称 A 可对角化.

$$\mathscr{A}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix} \quad 则 \quad \mathscr{A}\alpha_i=\lambda\alpha_i$$

定义3.7 · $\mathscr{A}\in\mathscr{L}(V)$ $0\neq\beta\in V$, $\lambda_0\in\mathbb{F}$. 若 $\mathscr{A}(\beta)=\lambda_0\beta$. 则称 λ_0 为 $\mathscr{A}$ 的一个特征值 β 称为属于特征值 λ_0 的一个特征向量.

· $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$, $0\neq X\in\mathbb{F}^{n\times 1}$, $\lambda_0\in\mathbb{F}$. $AX=\lambda_0X$, 则称 λ_0 为 A 的一个特征值 X 为属于特征值 λ_0 的一个特征向量.

注 $\mathscr{A}$ 可对角化 $\Longleftrightarrow$ 存在 V 的一组基由 $\mathscr{A}$ 的特征向量组成.

例 (1) 求 $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量.

(2) 问 A 是否可对角化?

解: (1) 设 λ_0 为 A 的特征值 则方程 $AX=\lambda_0X$ 有非0解, 即 $(A-\lambda_0I)X=0$ 有非0解 从而 $\det(A-\lambda_0I)=(4-\lambda_0)(1-\lambda_0)^2=0$

即 λ_0 为方程 $(4-\lambda)(1-\lambda)^2=0$ 的根. 故 $\lambda_0=4$ 或 1.

$\lambda_0=4$ $\begin{pmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{pmatrix}X=0$ 的解集为 $c\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $c\in\mathbb{F}$.

$\lambda_0=1$ $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}X=0$ 的解集为 $a\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ $a,b\in\mathbb{F}$.

故属于 4 的特征向量为 $c\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ $c\neq0$

1 $a\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$, $a.b$ 不全为0

(2) 取 $P=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&-1&1\\1&0&-1\end{pmatrix}$ 则 $P^{-1}AP=\mathrm{diag}(4\ 1\ 1)$ #

定义3.8 $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$. $\varphi_A(\lambda)=\det(\lambda I-A)\in\mathbb{F}[\lambda]$ 为 n 次首一多项式. 称为 A 的特征多项式.

特征值、特征向量求法

- 求 $\varphi_A(\lambda)$；
- 求方程 $\varphi_A(\lambda)=0$ 的所有解 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$；
- 求 $(A-\lambda_i I)x=0$ 非0解，$\forall i$.

注 · 一般域上的特征值不一定存在. 例如

$$A=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt2}{2} & -\frac{\sqrt2}{2}\\ \frac{\sqrt2}{2} & \frac{\sqrt2}{2}\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times2}\qquad \varphi_A(\lambda)=\left(\lambda-\frac{\sqrt2}{2}\right)^2+\frac12$$

$\varphi_A(\lambda)$ 无实根.

· 根据代数学基本定理，任一复方阵均有复特征值.

· $A\overset{s}{\sim}B \implies \varphi_A(\lambda)=\varphi_B(\lambda)$.

$B=P^{-1}AP \implies \varphi_B(\lambda)=\det(\lambda I-B)=\det(\lambda I-P^{-1}AP)=\det P(\lambda I-A)P^{-1}=\varphi_A(\lambda)$.

<u>定义3.8'</u> $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$. $\mathcal{A}$ 在 V 的任一组基下的特征多项式称为 $\mathcal{A}$ 的<u>特征多项式</u>.

<u>命题3.9</u> 设 $A_1,\cdots,A_r$ 为方阵，$A=\begin{pmatrix}A_1 & & *\\ & \ddots & \\ & & A_r\end{pmatrix}$，则 $\varphi_A(\lambda)=\varphi_{A_1}(\lambda)\cdots\varphi_{A_r}(\lambda)$.

<u>命题3.10</u> $A\in F^{n\times n}$. $\varphi_A(\lambda)=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0$ 则

(1) $\operatorname{tr}A=-a_{n-1}$，$\det A=(-1)^n a_0$

(2) 若 $\varphi_A(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)\cdots(\lambda-\lambda_n)$. 则

$\operatorname{tr}A=\lambda_1+\cdots+\lambda_n$，$\det A=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$.

<u>证</u> (1) $$\varphi_A(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \cdots & & \ddots & \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{vmatrix}=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0$$

考察完全展开式知 λ^{n-1} 仅出现于 $(\lambda-a_{11})\cdots(\lambda-a_{nn})$ 一项中，故

$a_{n-1}=-a_{11}-\cdots-a_{nn}=-\operatorname{tr}A$.

$a_0=\varphi_A(0)=\det(-A)=(-1)^n\det A$

(2) 即 Viète 定理.

命题 3.11 若 $\varphi_A(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)\cdots(\lambda-\lambda_n)$，$\lambda_i\in\mathbb{F}$. 则 A 可相似到上三角阵 $\begin{pmatrix}\lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$. 进一步. 对 $\forall f(x)\in\mathbb{F}[x]$，$f(A)$ 相似于 $\begin{pmatrix}f(\lambda_1) & & * \\ & \ddots & \\ & & f(\lambda_n)\end{pmatrix}$，故 $\varphi_{f(A)}(\lambda)=(\lambda-f(\lambda_1))\cdots(\lambda-f(\lambda_n))$.

PF 对 n 进行归纳. $n=1$ 显然成立.

设结论对 $n-1$ 阶方阵成立. 现设 $\varphi_A(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)\cdots(\lambda-\lambda_n)$

由于 λ_1 为 A 特征值. 任取属于 λ_1 的特征向量 $X_1\in\mathbb{F}^{n\times1}$，扩充为 $\mathbb{F}^{n\times1}$ 的一组基 $X_1,\cdots,X_n$，令 $P=(X_1,X_2\cdots X_n)\in\mathbb{F}^{n\times n}$ 则

$$AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & B_{12}\\ & B_{22}\end{pmatrix}P\text{，即有 } P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & B_{12}\\ & B_{22}\end{pmatrix},$$

故 $\varphi_A(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)\cdots(\lambda-\lambda_n)=(\lambda-\lambda_1)\cdot\varphi_{B_{22}}(\lambda)$，$\Longrightarrow\varphi_{B_{22}}(\lambda)=(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)$

由归纳假设. 存在 $n-1$ 阶可逆阵 P_1，使得 $P_1^{-1}B_{22}P_1=\begin{pmatrix}\lambda_2 & & * \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$.

从而 $\begin{pmatrix}1 & \\ & P_1\end{pmatrix}^{-1}P^{-1}AP\begin{pmatrix}1 & \\ & P_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & * \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$ #

例 $A=\begin{pmatrix}a & c\\ & b\end{pmatrix}\in\mathbb{F}^{2\times2}$，$c\neq0$. 问 A 是否可对角化？

解：· $a\neq b$，任取 $P=\begin{pmatrix}a_1 & \frac{ca_4}{b-a}\\ & a_4\end{pmatrix}$，则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}a & \\ & b\end{pmatrix}$.

· $a=b$. 若 A 可相似到对角阵 $\begin{pmatrix}\lambda_1 & \\ & \lambda_2\end{pmatrix}$. 则 $\lambda_1=\lambda_2=a$

即 $\exists P$ 可逆，$\begin{pmatrix}a & c\\ & a\end{pmatrix}=P^{-1}\begin{pmatrix}a & \\ & a\end{pmatrix}P=\begin{pmatrix}a & \\ & a\end{pmatrix}$ 与 $c\neq0$ 矛盾.

故此时，A 不可对角化

例 $A=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ a_n & a_1 & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & a_2\\ a_2 & \cdots & a_n & a_1\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 是否可对角化？

解：令 $N=\begin{pmatrix}0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1\\ 1 & & & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} & I_{n-1}\\ 1 & \end{pmatrix}$. $f(x)=a_1+a_2x+\cdots+a_nx^{n-1}$. 则 $A=f(N)$.

取 $X_i=(1,\omega^i,\cdots,\omega^{(n-1)i})^T$，$i=0,1,\cdots,n-1$. 易知 $NX_i=\omega^iX_i$

令 $P=(X_1,X_2\cdots X_n)\in\mathbb{C}^{n\times n}$，则 $P^{-1}NP=\operatorname{diag}(1,\omega,\cdots,\omega^{n-1})$

从而 $P^{-1}AP=\operatorname{diag}(f(1),f(\omega),\cdots,f(\omega^{n-1}))$.

§5.4 特征子空间

定义4.1. 设 $\lambda_0 \in \mathbb{F}$ 为 $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ 的一个特征值. 记

$$V_{\lambda_0}(A) = \{x \in \mathbb{F}^{n\times 1} \mid Ax = \lambda_0 x\} = \{x \in \mathbb{F}^{n\times 1} \mid (\lambda_0 I - A)x = 0\},$$

称为 A 的属于特征值 λ_0 的特征子空间.

· $V/\mathbb{F}$. $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, λ_0 为 $\mathcal{A}$ 特征值

$$V_{\lambda_0}(\mathcal{A}) = \{v \in V \mid \mathcal{A}v = \lambda_0 v\} = \{v \in V \mid (\lambda_0 Id - \mathcal{A})v = 0\}$$

称为 $\mathcal{A}$ 的属于特征值 λ_0 的特征子空间.

注 $V_{\lambda_0}(A) = \{A$ 的属于特征值 λ_0 的特征向量$\} \cup \{0\}$.

定理4.2 设 $V/\mathbb{F}$, $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$ 为 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 互不相同的特征值. 则

$$V_{\lambda_1} + \cdots + V_{\lambda_s} = V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_s}$$

$$V_{\lambda_1} + \cdots + V_{\lambda_s} = V_{\lambda_0} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_s}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \forall\ v_1 \in V_{\lambda_1}, \cdots, v_s \in V_{\lambda_s}, \quad v_1 + \cdots + v_s = 0 \Longrightarrow v_1 = \cdots = v_s = 0$$

证一. $v_1 + \cdots + v_s = 0 \Longrightarrow A(v_1 + \cdots + v_s) = 0 \Longrightarrow A^i(v_1 + \cdots + v_s) = 0\ \forall i$.

$$\Longrightarrow \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_s v_s = 0, \quad \lambda_1^2 v_1 + \cdots + \lambda_s^2 v_s = 0, \cdots, \lambda_1^{s-1} v_1 + \cdots + \lambda_s^{s-1} v_s = 0.$$

$$\Longrightarrow (v_1, \cdots, v_s)\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{s-1} \\ 1 & \lambda_2 & & \lambda_2^{s-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_s & & \lambda_s^{s-1} \end{pmatrix}}_{A} = (0, 0, \cdots, 0)$$

$$\Longrightarrow (v_1, \cdots, v_s) = (0, \cdots, 0) A^{-1} = (0, \cdots, 0).$$

证二. 设 $v_1 + \cdots + v_s = 0$, $v_i \in V_{\lambda_i}$, $\forall\ 1 \le i \le s$.

取 $B_i = (A - \lambda_1 I_n) \cdots (A - \lambda_{i-1} I_n)(A - \lambda_{i+1} I_n) \cdots (A - \lambda_s I_n) \quad \forall\ 1 \le i \le s$

则 · $B_i(v_i) = \prod_{j \ne i} (\lambda_j - \lambda_i) v_i$

$$\left.\begin{array}{l} B_i(v_j) = 0 \quad \forall j \ne i \\ B_i(v_1 + \cdots + v_s) = B_i(0) = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow B_i(v_i) = 0$$

另一方面 $\prod_{j \ne i} (\lambda_j - \lambda_i) \ne 0$, $B_i(v_i) = \prod_{j \ne i} (\lambda_j - \lambda_i) v = 0 \Longrightarrow v = 0\ \forall i$.

推论4.3 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$, $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$ 为 $\mathcal{A}$ 所有互不相同特征值, 设 $\dim V_{\lambda_i}=m_i$, 且 $\alpha_{i1},\cdots,\alpha_{im_i}$ 为 V_{λ_i} 一组基, $i=1,\cdots,s$. 则

$$S=(\alpha_{11},\cdots,\alpha_{1m_1},\alpha_{21},\cdots,\alpha_{2m_2},\cdots,\alpha_{s1},\cdots,\alpha_{sm_s})$$

线性无关, 且 S 为特征向量集合的一个极大无关组. 特别地, $\mathcal{A}$ 可对角化 $\iff m_1+m_2+\cdots+m_s=\dim V$.

定义4.4 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$, λ_i 为 $\mathcal{A}$ 特征值.

(1) $\dim V_{\lambda_i}(\mathcal{A})$ 称为特征值 λ_i 的几何重数.

(2) 满足 $(\lambda-\lambda_i)^{n_i}\mid\varphi_{\mathcal{A}}(\lambda)$, $(\lambda-\lambda_i)^{n_i+1}\nmid\varphi_{\mathcal{A}}(\lambda)$ 的 n_i 称为 λ_i 代数重数.

定理4.5 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$, $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$ 为 $\mathcal{A}$ 所有互不相同特征值, 记 n_i 为 λ_i 代数重数, m_i 为 λ_i 几何重数.

则 (1) $m_i\le n_i$

(2) $\mathcal{A}$ 可对角化 $\iff V=V_{\lambda_1}\oplus\cdots\oplus V_{\lambda_s}$

$\iff \varphi_{\mathcal{A}}(\lambda)$ 为一次因子乘积, 且 $m_i=n_i\ \ \forall i$.

PF (1) 设 $\dim V_i=m_i$, 取 V_{λ_i} 一组基 $\beta_1,\cdots,\beta_{m_i}$, 扩充为 V 的一组基 $\mathbb{B}=(\beta_1,\cdots,\beta_{m_i},\cdots,\beta_n)$, 则 $\mathcal{A}$ 在 $\mathbb{B}$ 下的矩阵为

$$\begin{pmatrix}\lambda_i I_{m_i} & B_{12}\\ & B_{22}\end{pmatrix} \Rightarrow \varphi_{\mathcal{A}}(\lambda)=(\lambda-\lambda_i)^{m_i}\cdot\varphi_{B_{22}}(\lambda)$$

$$\Rightarrow (\lambda-\lambda_i)^{m_i}\mid\varphi_{\mathcal{A}}(\lambda)$$

$$\Rightarrow m_i\le n_i$$

(2) $\mathcal{A}$ 可对角化 $\iff m_1+\cdots+m_s=n=\dim V$

$\Updownarrow$ $m_i\le n_i$, $n_1+\cdots+n_s\le n$

$n_1+\cdots+n_s=n$, 且 $m_i=n_i\ \ \forall i$ #

($\varphi_{\mathcal{A}}(\lambda)$ 为一次因子乘积 $\iff n_1+\cdots+n_s=n$)

推论4.6 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$. 若 $\varphi_{\mathcal{A}}(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)\cdots(\lambda-\lambda_n)$, λ_i 两两不同.

则 $\mathcal{A}$ 可对角化.

例 $A\in \mathbb{F}^{n\times n}$ $A^2=A \Longrightarrow A\overset{s}{\sim}\begin{pmatrix} I_r & \\ & 0\end{pmatrix}$, $r=rk(A)$

PF 证一: $A=P\begin{pmatrix} I_r & \\ & 0\end{pmatrix}Q$, $P,Q\in GL_n$

设 $QP=\begin{pmatrix} R_1 & R_2\\ R_3 & R_4\end{pmatrix}$, 则 $P\begin{pmatrix} I_r & \\ & 0\end{pmatrix}QP\begin{pmatrix} I_r & \\ & 0\end{pmatrix}Q=P\begin{pmatrix} I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}Q$

$\Longrightarrow QP=\begin{pmatrix} I_r & R_2\\ R_3 & R_4\end{pmatrix} \Longrightarrow A=P\begin{pmatrix} I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}QP\,P^{-1}=P\begin{pmatrix} I_r & R\\ 0 & 0\end{pmatrix}P^{-1}$.

而 $\begin{pmatrix} I_r & -R\\ 0 & I_r\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r & \\ & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r & R\\ & I_r\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I_r & R\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

故 $A=P\begin{pmatrix} I_r & -R\\ & I_{n-r}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} I_r & \\ & 0\end{pmatrix}\cdot\left[P\begin{pmatrix} I_r & -R\\ & I_{n-r}\end{pmatrix}\right]^{-1}$

证二: $(A-I)A=0 \Longleftrightarrow Ker(A-I)\supseteq Im\,A$.

$\Longrightarrow \dim Ker(A-I)+\dim Ker\,A \geq \dim Im A+\dim Ker A=n$

$\Longrightarrow V=\underset{\|}{V_1}\oplus \underset{\|}{V_0} \Longrightarrow$ 可对角化 $\Longrightarrow A\overset{s}{\sim}\begin{pmatrix} I_r & \\ & 0\end{pmatrix}$.

例 $A\in \mathbb{F}^{n\times n}$ $A^2=I \Longrightarrow A\overset{s}{\sim}\begin{pmatrix} I_m & \\ & -I_{n-m}\end{pmatrix}$, $\exists m$.

PF 证一: $(A-I)(A+I)=0 \Leftrightarrow Ker(A-I)\supseteq Im(A+I)$

$\Longrightarrow \dim Ker(A-I)+\dim Ker(A+I)\geq \dim Im(A+I)+\dim Ker(A+I)=n$

$\Longrightarrow V=\underset{\|\,V_1}{Ker(A-I)}\oplus \underset{\|\,V_{-1}}{Ker(A+I)} \Longrightarrow$ 可对角化.

证二: $A^2=I \Longrightarrow$ 令 $A_1=\frac{1}{2}(A+I)$ $A_2=\frac{1}{2}(I-A)$.

知 $A_1^2=A_1$, $A_2^2=A_2$. 由上例知 $A_1\overset{s}{\sim}\begin{pmatrix} I_m & \\ & 0\end{pmatrix}$ $\exists m$

$\Longrightarrow A\overset{s}{\sim}\begin{pmatrix} I_m & \\ & -I_{n-m}\end{pmatrix}$. #

例 设 $A\in \mathbb{F}^{n\times n}$, $A^3=A$ 则 A 可对角化.

PF $A(A^2-I)=0 \Longrightarrow Ker\,A\supseteq Im(A^2-I)$

$\Longrightarrow \dim Ker\,A+\dim Im\,A^2 \geq \dim Ker(A^2-I)+\dim Im(A^2-I)=n$

$\Longrightarrow Ker\,A=Im(A^2-I)$, 同理, $Ker(A+I)=Im(A^2-A)$, $Ker(A-I)=Im(A^2+A)$

另一方面, $I=\frac{1}{2}(A^2-A)+\frac{1}{2}(A^2+A)+(I-A^2)$ 知

$V=Im(A^2-A)+Im(A^2+A)+Im(A^2-I)$

$=Ker(A+I)+Ker(A-I)+Ker\,A=V_{-1}\oplus V_1\oplus V_0$ #

§5.5 Jordan 标准形简介

定义5.1 $a\in F$，m 为正整数. 形如 $\begin{pmatrix} a & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & a \end{pmatrix}_{m\times m}$ 的矩阵称为一个 Jordan 块，记作 $J_m(a)$. 由 Jordan 块组成的准对角阵 $J=\mathrm{diag}(J_{m_1}(a_1),\cdots,J_{m_r}(a_r))$ 称为一个 Jordan 形矩阵，简称为一个 Jordan 阵.

注 (1) 对角阵 $\mathrm{diag}(a_1,\cdots,a_n)=\mathrm{diag}(J_1(a_1),\cdots,J_n(a_n))$ 为 Jordan 阵.

(2) $J_m(0)$ 一般记作 J_m，则 $J_m(a)=aI_m+J_m$.

例 设 $A=\begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}\in F^{4\times 4}$ 可相似到某个 Jordan 阵 J.

(1) 问 J 是否由 A 唯一确定，并求出 J.

(2) 求 P，使得 $P^{-1}AP=J$.

解 (1) $\varphi_A(\lambda)=\lambda(\lambda+1)^3$，由题设，$A$ 可相似到某个 Jordan 阵

$J=\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & -1 & * & \\ & & -1 & * \\ & & & -1 \end{pmatrix}$，$*=0$ 或 1.

计算 $\mathrm{rk}(A+I)=\mathrm{rk}(J+I)$ 知 $J=$

$\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & -1 & 1 & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & 1 \\ & & & -1 \end{pmatrix}$，而这两个矩阵仅 Jordan 块相差一个次序，故相似.

(2) $P=(P_1P_2P_3P_4)$ $\quad P^{-1}AP=\mathrm{diag}(0,J_2(-1),-1)$

则 $\begin{cases} AP_1=0 \\ AP_2=-P_2 \\ AP_3=-P_2-P_3 \\ AP_4=-P_4 \end{cases}\Longrightarrow\begin{cases} AP_1=0 \\ (A+I)P_2=0 \\ (A+I)P_3=P_2 \\ (A+I)P_4=0 \end{cases}$ $\left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\}\Longleftrightarrow\begin{cases} (A+I)^2P_3=0 \\ (A+I)P_3=P_2\neq 0 \end{cases}$

$\Longrightarrow$ $P_1 \in V_0(A) = \mathbb{F}\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \rangle$

$P_3 \in \operatorname{Ker}(A+I)^2 \setminus \ker(A+I)$

$\ker(A+I)^2 = \mathbb{F}\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$

$\ker(A+I) = \mathbb{F}\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$

取 $P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 则 $P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 可取 $P_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

则取 $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 即得 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & -1 & 1 & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$

Recall 设 $A = \operatorname{diag}(\underbrace{J_\ell, \cdots, J_\ell}_{n_\ell}, \underbrace{J_{\ell-1} \cdots J_{\ell-1}}_{n_{\ell-1}}, \cdots, \underbrace{J_1 \cdots J_1}_{n_1})$ 为 Jordan 阵

则
$$\operatorname{rk} A^0 = \ell n_\ell + (\ell-1) n_{\ell-1} + \cdots + 2 \cdot n_2 + 1 \cdot n_1$$
$$\operatorname{rk} A = (\ell-1) n_\ell + (\ell-2) n_{\ell-1} + \cdots + 1 \cdot n_2$$
$$\operatorname{rk} A^2 = (\ell-2) n_\ell + \cdots + 1 \cdot n_3$$
$$\vdots$$
$$\operatorname{rk} A^{k-1} = (\ell-k+1) n_\ell + \cdots + 2 \cdot n_{k+1} + 1 \cdot n_k$$
$$\operatorname{rk} A^{k} = (\ell-k) n_\ell + \cdots + 1 \cdot n_{k+1}$$
$$\vdots$$
$$\operatorname{rk} A^{\ell-1} = 1 \cdot n_\ell$$
$$\operatorname{rk} A^{\ell} = 0$$

$\Longrightarrow \operatorname{rk} A^{k-1} - rA^k = n_k + n_{k+1} + \cdots + n_\ell$

$\Longrightarrow n^k = \operatorname{rk} A^{k-1} - \operatorname{rk} A^k - (\operatorname{rk} A^k - \operatorname{rk} A^{k+1})$

$\Longrightarrow \operatorname{rk} A^{k-1} - rA^k = n_k + n_{k+1} + \cdots + n_\ell$

$\Longrightarrow n^k = \operatorname{rk} A^{k-1} - \operatorname{rk} A^k - (\operatorname{rk} A^k - \operatorname{rk} A^{k+1}) = \operatorname{rk} A^{k-1} + \operatorname{rk} A^{k+1} - 2 \operatorname{rk} A^k \quad \forall k$

从而 $n_1, \cdots, n_\ell$ 由 A 唯一确定.

<u>定理5.2</u> $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$. 设 $A = \operatorname{diag}(J_{m_1}(\lambda_1), \cdots, J_{m_s}(\lambda_s))$ 为 Jordan 阵 设 a 为 A 的特征值. m 为 a 的几何重数 则

(1) $m = \#\{1 \le j \le s \mid \lambda_j = a\}$

(2) $\#\{1 \le j \le s \mid \lambda_j = a,\ m_j = d\}$ ↙ (即 $J_d(a)$ 在 A 中出现的次数)

$= \operatorname{rk}(A - aI_n)^{d-1} + \operatorname{rk}(A - aI_n)^{d+1} - 2 \operatorname{rk}(A - aI_n)^d$.

推论5.3 设 A 相似到 Jordan 阵 J，则 J 的 Jordan 块在相差个次序意义下唯一确定

定理5.4 设 $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$，$\varphi_A(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{n_1}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{n_s}$，则 A 可相似到 Jordan 阵，且所有 Jordan 块在相差次序意义下唯一确定.