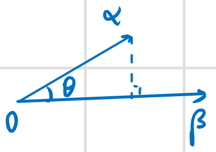
第六章 内积空间

Recall



$\alpha=(x_1,x_2,x_3)$ $\beta=(y_1,y_2,y_3)$

向量积 = 标准对称双线性型

$\alpha\cdot\beta \triangleq x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$

长度 $|\alpha|=\sqrt{\alpha\cdot\alpha}=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$

夹角 $\alpha\cdot\beta=|\alpha|\cdot|\beta|\cdot\cos\theta$

$$\cos\theta\triangleq\frac{\alpha\cdot\beta}{|\alpha||\beta|}=\frac{x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\sqrt{y_1^2+y_2^2+y_3^2}}$$

$\mathbb{R}^n$ 中我们可定义.

§6.1 Euclid 空间

$(v,v)>0,\ \forall v\neq 0$ $(u,v)=(v,u)$ $(a_1u_1+a_2u_2,v)=a_1(u_1,v)+a_2(u_2,v)$

定义1.1 实空间 V 上的一个正定对称双线性型 $(-,-):V\times V\to\mathbb{R}$ 称为 V 上的一个内积，$(V,(-,-))$（或 V）就称为一个(实)内积空间 或 Euclid空间

例 (1) $V=\mathbb{R}^{n\times1}$ $X=(x_1,\cdots,x_n)^T$, $Y=(y_1,\cdots,y_n)^T$

$(X,Y)\triangleq x_1y_1+\cdots+x_ny_n$ 为 V 上内积

(2) $V=\mathbb{R}^{n\times1}$, $S>0$ 为正定阵. 则定义

$(X,Y)\triangleq X^TSY$ 为 V 上内积.

(3) $V=C[a,b]$ 定义 V 上内积 $(f,g)\triangleq\int_a^b f(x)g(x)\,dx$

· 长度 $|\alpha|=\sqrt{(\alpha,\alpha)}$,

· 单位向量 $|\alpha|=1$. 单位化: $\frac{\alpha}{|\alpha|}$

· 夹角 $\arccos\frac{(\alpha,\beta)}{|\alpha||\beta|}$

定理1.2 (Cauchy-Schwarz 不等式) V 为 Euclid空间. 则对 $\forall\alpha,\beta\in V$,

$(\alpha,\beta)\leq|\alpha||\beta|$ $\forall\alpha,\beta\in V$

证一　若 $\alpha=0$，结论显然成立．下设 $\alpha\neq 0$

$$(x\alpha+\beta,\ x\alpha+\beta) = (\alpha,\alpha)x^2 + 2(\alpha,\beta)x + (\beta,\beta) \geq 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta = 4(\alpha,\beta)^2 - 4(\alpha,\alpha)(\beta,\beta) \leq 0$$

$$\Rightarrow \quad (\alpha,\beta)^2 \leq (\alpha,\alpha)(\beta,\beta)$$

证二　设 $\alpha\neq 0$．　$(-(\alpha,\beta)\alpha + (\alpha,\alpha)\beta,\ -(\alpha,\beta)\alpha+(\alpha,\alpha)\beta) \geq 0$

$$\Rightarrow \quad (\alpha,\alpha)(\alpha,\beta)^2 + (\alpha,\alpha)^2(\beta,\beta) - 2(\alpha,\alpha)(\alpha,\beta)^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad (\alpha,\beta)^2 \leq (\alpha,\alpha)(\beta,\beta)$$

例 (1)　Cauchy 不等式：$(x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n)^2 \leq (x_1^2+\cdots+x_n^2)(y_1^2+\cdots+y_n^2)$

(2)　$(X^TSY)^2 \leq X^TSX\cdot Y^TSY$，　$S>0$，$X, Y\in\mathbb{R}^{n\times 1}$．

(3)　Schwarz 不等式：$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)\,dx \int_a^b g^2(x)\,dx$．

推论 1.3　（三角不等式）　$|\alpha+\beta| \leq |\alpha| + |\beta|$

PF　$|\alpha+\beta|^2 = (\alpha+\beta,\ \alpha+\beta) = (\alpha,\alpha)+(\beta,\beta)+2(\alpha,\beta)$

$$\leq (\alpha,\alpha)+(\beta,\beta)+2|\alpha||\beta| = (|\alpha|+|\beta|)^2.$$

例　$W\subseteq V$．$v\in V$．$w_0\in W$ 满足 $(v-w_0,w)=0\ \forall w$．

则　$|v-w| \geq |v-w_0| \quad \forall w\in W$．

PF　$|v-w|^2 = |v-w_0+w-w_0|^2 = |v-w_0|^2 + |w-w_0|^2 \geq |v-w_0|^2$

例　（最小二乘法）　求尽可能接近已知点 (x_i,y_i)，$i=1,\cdots,n$ 的直线 $y=kx+b$，即求 k,b，使得 $\sum_{i=1}^n (kx_i+b-y_i)^2$ 达到最小值．

解．　$\varphi(k,b) = \sum_{i=1}^n (kx_i+b-y_i)^2$

$$= |k(x_1,\cdots,x_n) + b(1,\cdots,1) - (y_1,\cdots,y_n)|^2$$

$W = k(x_1,\cdots,x_n) + b(1,\cdots,1)$　为 2 维子空间

$\varphi(k,b)$ 最小 $\iff k(\underset{\overset{\shortparallel}{\alpha}}{x_1,\cdots,x_n}) + b(\underset{\overset{\shortparallel}{e}}{1,\cdots,1}) - (\underset{\overset{\shortparallel}{\beta}}{y_1,\cdots,y_n}) \perp W$

$\iff (k\alpha + be - \beta, \alpha) = 0, \quad (k\alpha + be - \beta, e) = 0$

$$\iff \begin{cases} (\alpha,\alpha)k + (\alpha,e)b = (\alpha,\beta) \\ (\alpha,e)k + (e,e)b = (e,\beta) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i^2 \, k + \sum_{i=1}^n x_i \, b = \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i \, k + n \, b = \sum_{i=1}^n y_i \end{cases}$$

$$\Longrightarrow (k_0, b_0) = \left(\frac{n\sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n\sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2}, \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n x_i y_i}{n\sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} \right)$$

令 $\delta = k_0\alpha + b_0 e - \beta \perp W$

$\Longrightarrow |k\alpha + be - \beta|^2 = |(k-k_0)\alpha + (b-b_0)e + \delta|^2$

$= |\delta|^2 + |(k-k_0)\alpha + (b-b_0)e|^2 \geq |\delta|^2$

等号成立 $\iff k = k_0, \ b = b_0$. #

<u>度量阵</u> (Gram 阵): $(-,-)$ 为 V 上内积, $\mathbb{B} = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$ 为 V 的基

$S = (s_{ij})_{n\times n}$. $s_{ij} = (\xi_i, \xi_j) \ \forall i,j$ 称为 $(-,-)$ 在 $\mathbb{B}$ 下的<u>度量阵</u>或 Gram 阵.

- S 为正定阵. $(S > 0 \iff X^T S X > 0 \ \forall 0 \neq X \in \mathbb{R}^{n\times 1})$
- 对 $\forall \alpha, \beta \in V$. 设 α, β 在 $\mathbb{B}$ 下坐标分别为 X, Y. 则 $(\alpha, \beta) = X^T S Y$.

<u>例</u> $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $S > 0$. $\mathbb{R}^{n\times 1}$ 上内积 $(X,Y) \triangleq X^T S Y$. 则 $(-,-)$ 在基 $(e_1, \cdots, e_n)$ 下的 Gram 阵恰为 S.

§6.2 标准正交基与 Schmidt 正交化

定义2.1 V 为欧氏空间 $\alpha,\beta\in V$ $(\alpha,\beta)=0$ 则称 α 与 β 正交，记作 $\alpha\perp\beta$. 两两正交的向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 称为正交向量组

若正交向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 为 V 一组基 则称为 正交基. 更进一步，若 α_i 均为单位向量，则称为 标准正交基

注 内积在正交基下矩阵为对角阵，在标正基下矩阵恰为单位阵.

引理2.2 $0\neq\alpha_1,\cdots,\alpha_n\in V$ 两两正交. 则 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性无关

PF $\sum_{i=1}^{n}a_i\alpha_i=0 \Rightarrow 0=(\alpha_k,\sum_{i=1}^{n}a_i\alpha_i)=a_k(\alpha_k,\alpha_k)\ \forall a_k$

$\Rightarrow a_k=0\quad\forall k$ #

例 $V=C[0,2\pi]$ 则 $1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,\cdots$ 线性无关.

PF 在 V 上定义内积 $(f(x),g(x))=\int_0^{2\pi}f(x)g(x)\,dx$ 则

$1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,\cdots$ 两两正交. 故线性无关.

Gram-Schmidt 正交化 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 为 V 一组基

令 $\beta_1=\alpha_1$,

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1$$

$$\vdots$$

$$\beta_n=\alpha_n-\frac{(\alpha_n,\beta_{n-1})}{(\beta_{n-1},\beta_{n-1})}\beta_{n-1}-\frac{(\alpha_n,\beta_{n-2})}{(\beta_{n-2},\beta_{n-2})}\beta_{n-2}-\cdots-\frac{(\alpha_n,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1$$

令 $\gamma_i=\frac{\beta_i}{|\beta_i|}$，则得到 V 的一组标正基 $\beta_1,\cdots,\beta_n$

定理2.3 设 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 为 V 的一组基，则有唯一的一组标正基 $(\gamma_1,\cdots,\gamma_n)$，使得 $(\gamma_1,\cdots,\gamma_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}b_{11}&&*\\&\ddots&\\&&b_{nn}\end{pmatrix}$

其中 $b_{ii}>0$, $i=1,\cdots,n$. 特别地，标正基存在.

推论2.4 V的任一组两两正交的单位向量可扩充为V的一组标准正交基.

例 $V=\mathbb{R}^{4\times 1}$. 求 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ 所生成子空间的一组标正基. 并扩充为 V 的一组标正基.

解

$\beta_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ $\quad\beta_2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\\-2\end{pmatrix}$ $\quad\beta_3=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-2\\1\\2\\1\end{pmatrix}$

$\gamma_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ $\quad\gamma_2=\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\\-2\end{pmatrix}$ $\quad\gamma_3=\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}-2\\1\\2\\1\end{pmatrix}$

γ_4 可取 $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}$.

$\boxed{\text{正交阵}}$ 考察 $V=\mathbb{R}^{n\times 1}$ 上的标准内积 $(X,Y)=X^TY$. $X_1,\cdots,X_n$ 为标正基. 令 $X=(X_1X_2\cdots X_n)\in\mathbb{R}^{n\times n}$. 则 $X^T\cdot X=I_n$

定义2.4 称 n 阶实方阵 P 为 n 阶<u>正交阵</u>, 若 $P^TP=I_n$
$(\Leftrightarrow P^{-1}=P^T)$

命题2.5 $P\in\mathbb{R}^{n\times n}$. 则 P 为正交阵

$\Longleftrightarrow$ P^T 为正交阵.

$\Longleftrightarrow$ P 的列向量组为 $\mathbb{R}^{n\times 1}$ 上标准内积下的标准正交基.

$\Longleftrightarrow$ P 的行 $\cdots\cdots$ $\mathbb{R}^{1\times n}$ $\cdots$ $\cdots\cdots$

命题2.6 V 为欧氏空间. $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 与 $(\beta_1,\cdots,\beta_n)$ 为两组标正基. $(\beta_1,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)P$. 则 P为正交阵.

PF 设 $(-,-)$ 在 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$, $(\beta_1,\cdots,\beta_n)$ 下 Gram 阵为 G,G'. 则 $G'=P^TGP$. 但 $G=G'=I_n$ 故 $P^TP=I_n$.

引理2.7 令 $O_n=\{P\in\mathbb{R}^{n\times n}\mid P^TP=I_n\}$, 则 $O_n\leq GL_n(\mathbb{R})$, 即正交阵的乘积为正交阵, 正交阵的逆为正交阵.

命题2.8 (QR分解，Schmidt正交化) 设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 可逆，则 $A = PT$，其中 P 为正交阵，T 为对角元恒正的上三角阵。且 P, T 由 A 唯一确定。

PF Schmidt正交化给出存在性。下证唯一性。

$$P_1T_1 = P_2T_2 \Longrightarrow \underbrace{P_1^{-1}P_2}_{\text{正交阵}} = \underbrace{T_1T_2^{-1}}_{\text{对角元恒正的上三角阵}} \Rightarrow P_1^{-1}P_2 = I_n = T_1T_2^{-1} \Rightarrow P_1 = P_2, T_1 = T_2.$$

注 更一般地，$A_{m\times n} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 为列满秩矩阵，则 $A_{m\times n} = Q_{m\times n}R_{n\times n}$，其中 Q 由标准正交列向量组成，R 为上三角阵。

正交补

Recall $S, T \subseteq V$，$S \perp T$ 若 $u \perp v$ $\forall u \in S, v \in T$.

定义2.9 V 为欧氏空间，$W \leq V$ 为子空间，则 $W^{\perp} = {}^{\perp}W = \{v \in V \mid v \perp W\}$ 称为 W 的正交补。

命题2.10 V 为有限维欧氏空间，$W \leq V$ 为子空间，则 $V = W \oplus W^{\perp}$.

PF 任取 W 的一组标正基 $\alpha_1 \cdots \alpha_k$，扩充为 V 的标正基 $\alpha_1 \cdots \alpha_k \cdots \alpha_n$，则 $W = \mathbb{R}\langle \alpha_{k+1}, \cdots, \alpha_n \rangle$.

定义2.11 设 U, V 为欧氏空间，若线性映射 $\sigma: U \xrightarrow{\sim} V$ 满足 $(\sigma(u_1), \sigma(u_2)) = (u_1, u_2)$ $\forall u_1, u_2 \in U$，则称 σ 为欧氏空间 U 到 V 的一个同构映射，称 U 与 V 同构。

定理2.12 设 U, V 为有限维欧氏空间，则

$$U \simeq V \Longleftrightarrow \dim U = \dim V$$

§6.3 正交变换

正交变换

定义3.1 V 为欧氏空间，$\mathscr{A}\in\mathcal{L}(V)$，若 $(\mathscr{A}u,\mathscr{A}v)=(u,v)$，对 $\forall\ u,v\in V$，则称 $\mathscr{A}$ 为正交变换.

注 正交变换 $\Longrightarrow$ 保长度，保夹角，反之亦成立，即

命题3.2 $\mathscr{A}\in\mathcal{L}(V)$ 则 $\mathscr{A}$ 为正交变换 $\Longleftrightarrow$ $|\mathscr{A}(v)|=|v|\quad\forall v$.

PF $(u,v)=\frac{1}{2}\left[(u+v,u+v)-(u,u)-(v,v)\right]=\frac{1}{2}(|u+v|^2-|u|^2-|v|^2)$

而 $(\mathscr{A}u,\mathscr{A}v)=\frac{1}{2}(|\mathscr{A}(u+v)|^2-|\mathscr{A}u|^2-|\mathscr{A}v|^2)$ #

定理3.3 $\mathscr{A}\in\mathcal{L}(V)$ 则下述等价

(1) $\mathscr{A}$ 正交

(2) $\mathscr{A}$ 将标正基映到标正基

(3) $\mathscr{A}$ 在任一标正基下的矩阵为正交阵.

(4) $\mathscr{A}$ 在某组标正基下的矩阵为正交阵

PF (1) $\Longrightarrow$ (2)，(3) $\Longrightarrow$ (4) 显然

(2) $\Longrightarrow$ (3) 设 $\mathcal{B}=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 为 V 的一组标正基. 由(2)知

$(\mathscr{A}\alpha_i,\mathscr{A}\alpha_j)=(\alpha_i,\alpha_j)=\delta_{ij}\ \forall i,j$ 设 $\mathscr{A}$ 在 $\mathcal{B}$ 下的矩阵为 $A=(a_{ij})$，则

$$(\mathscr{A}\alpha_i,\mathscr{A}\alpha_j)=\sum_{u,v=1}^{n}a_{ui}a_{vj}(\alpha_u,\alpha_v)=\sum_{u=1}^{n}a_{ui}a_{uj}=\delta_{ij}$$

$\Rightarrow A^TA=I_n$ 即 A 为正交阵.

(4) $\Rightarrow$ (1) 设 $\mathcal{B}=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 为 V 一组标正基. $\mathscr{A}$ 在 $\mathcal{B}$ 下的矩阵

为正交阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 则

$$(\mathscr{A}\alpha_i,\mathscr{A}\alpha_j)=\sum_{u,v=1}^{n}a_{ui}a_{vj}(\alpha_u,\alpha_v)=\sum_{u,v=1}^{n}a_{ui}a_{vj}\delta_{uv}=\sum_{u=1}^{n}a_{ui}a_{uj}=\delta_{ij}=(\alpha_i,\alpha_j)$$

故 $\forall\ u=\sum_{i=1}^{n}x_i\alpha_i,\ v=\sum_{j=1}^{n}y_j\alpha_j$，有

$$(\mathscr{A}u,\mathscr{A}v)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_iy_j(\mathscr{A}\alpha_i,\mathscr{A}\alpha_j)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_iy_j(\alpha_i,\alpha_j)=(u,v)$$ #

命题3.4 (1) 正交变换的乘积为正交变换.

(2) 正交变换为可逆变换, 且其逆变换为正交变换.

例 令 $V=\mathbb{R}^{2\times1}$ 为 2 维欧氏空间. 则 V 上的正交变换为

- 旋转: 行列式为 1; 或
- 翻转: 行列式为 -1.

命题3.5 (1) 正交变换/方阵行列式为 ±1

(2) 正交变换/方阵特征值模长为 1.

PF (1) $P^TP=I_n \Rightarrow \det P^TP=1 \Rightarrow (\det P)^2=1$.

(2) 设 $PX=\lambda_0 X$. $P^TP=I_n$, $0\neq X\in\mathbb{R}^{n\times1}$

$\Rightarrow \overline{PX}^T=\bar{X}^T\bar{P}^T=\bar{\lambda}_0\bar{X}^T \Rightarrow \overline{PX}^T(PX)=\bar{\lambda}_0\lambda_0\cdot\bar{X}^TX=\bar{X}^TX \Rightarrow |\lambda_0|=1$.

命题3.6 $\mathcal{A}$ 为 V 上正交变换, 则 $V_1\perp V_{-1}$.

PF 设 $0\neq\alpha\in V_1$, $0\neq\beta\in V_{-1}$ 即 $\mathcal{A}\alpha=\alpha$, $\mathcal{A}\beta=-\beta$

则 $(\alpha,\beta)=(\mathcal{A}\alpha,\mathcal{A}\beta)=(\alpha,-\beta)=-(\alpha,\beta) \Rightarrow (\alpha,\beta)=0$

例 $P\in O_2$ $\det P=1 \Longrightarrow P=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$

$\det P=-1 \Longrightarrow P=\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ \sin\alpha & -\cos\alpha\end{pmatrix}$

$\Longrightarrow$ 在基 $\begin{pmatrix}\cos\frac{\alpha}{2}\\ \sin\frac{\alpha}{2}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\sin\frac{\alpha}{2}\\ \cos\frac{\alpha}{2}\end{pmatrix}$ 下方阵为 $\begin{pmatrix}1 & \\ & -1\end{pmatrix}$

$P\in O_3$ $\det P=1 \Longrightarrow$ P 为绕某条过原点直线的旋转.

$\boxed{\text{正交相似}}$

定义3.7 设 $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 若存在 $P\in O_n$, 使得 $B=P^{-1}AP$. 则称 A 与 B 正交相似

引理3.8　$\mathscr{A}\in\mathscr{L}(V)$ 为正交变换，W 为 $\mathscr{A}$-不变子空间，则 $W^{\perp}$ 也为 $\mathscr{A}$-不变子空间。

PF　首先 $\mathscr{A}$ 为可逆变换，$\mathscr{A}^{-1}$ 可表达成 $\mathscr{A}$ 多项式形式，故 W 为 $\mathscr{A}^{-1}$-不变子空间。$\forall\alpha\in W$，$\beta\in W^{\perp}$，$(\alpha,\mathscr{A}\beta)=(\mathscr{A}^{-1}\alpha,\beta)=0$

$\Rightarrow \mathscr{A}\beta\in W^{\perp}$ 　　∎

注意到 $\begin{pmatrix}A&B\\&C\end{pmatrix}$ 为正交阵 $\Longleftrightarrow B=0$，A, C 为正交阵，即有

推论3.9　设 W 为 V 上正交变换 $\mathscr{A}$ 的不变子空间，$\mathscr{A}|_W$ 在 W 的某组标正基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 下的矩阵为 A_1，将 M_1 扩充为 V 的一组标正基 $\mathbb{B}=(\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n)$，则 $\mathscr{A}$ 在 $\mathbb{B}$ 下矩阵具有形式 $\begin{pmatrix}A_1&\\&A_2\end{pmatrix}$。

定理3.10　设正交阵 A 的所有特征值为 $\cos\alpha_k\pm i\sin\alpha_k$　$1\le k\le s$，1（t 重），-1（$n-2s-t$ 重），则 A 正交相似于

$$\mathrm{diag}\left(\begin{pmatrix}\cos\alpha_1&\sin\alpha_1\\-\sin\alpha_1&\cos\alpha_1\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}\cos\alpha_k&\sin\alpha_k\\-\sin\alpha_k&\cos\alpha_k\end{pmatrix},I_t,-I_{n-2s-t}\right).$$

PF　对 A 的阶归纳。

- 阶为1显然成立
- 设结论对阶 $\le n-1$ 的正交方阵成立。设 A 为 n 阶正交阵。

(1)　1 为 A 特征值。则 $\exists\, 0\ne X_1\in V_1$，即 $AX_1=X_1$，将 X_1 扩充为 $\mathbb{R}^n$ 的一组标正基 $X_1,X_2,\cdots,X_n$，则 $P=(X_1\cdots X_n)$ 为正交阵。由推论3.9，$AP=P\begin{pmatrix}1&\\&A_1\end{pmatrix}$，即 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&\\&A_1\end{pmatrix}$，其中 A_1 为 $n-1$ 阶正交阵。对 A_1 应用归纳假设即可。

(2)　-1 为 A 特征值。类似(1)可证。

(3)　设 $\cos\alpha_1\pm i\sin\alpha_1$ 为 A 特征值，其中 $\sin\alpha_1\ne0$。则 $\exists\, X_1,X_2\in\mathbb{R}^{n\times1}$，使得 $|X_1|=1$，且有

$$A(X_1+iX_2)=(\cos\alpha_1+i\sin\alpha_1)(X_1+iX_2)$$

$$\Rightarrow\quad A(X_1\,X_2)=(X_1\,X_2)\begin{pmatrix}\cos\alpha_1&\sin\alpha_1\\-\sin\alpha_1&\cos\alpha_1\end{pmatrix}.$$

A 为正交阵，即有 $(AX_i)^T(AX_j) = X_i^TX_j \quad \forall i,j$ 则有

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 \\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1^T \\ X_2^T \end{pmatrix} \cdot (X_1 X_2) \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & \sin\alpha_1 \\ -\sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1^T \\ X_2^T \end{pmatrix} (X_1 X_2) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & \sin\alpha_1 \\ -\sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & \sin\alpha_1 \\ -\sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a\cos\alpha_1 - b\sin\alpha_1 = a\cos\alpha_1 + b\sin\alpha_1 \\ a\sin\alpha_1 + b\cos\alpha_1 = b\cos\alpha_1 + d\sin\alpha_1 \\ b\sin\alpha_1 + d\cos\alpha_1 = d\cos\alpha_1 - b\sin\alpha_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad b = 0, \qquad d = a = 1.$$

故 X_1, X_2 为标准正交向量，扩充为 V 的标正基 $\mathbb{B} = (X_1, \cdots, X_n)$，

令 $P = (X_1 \cdots X_n)$ 为 n 阶正交阵，则由推论3.9，

$$AP = P \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha_1 & \\ -\sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 & \\ & & A_1 \end{pmatrix}$$，其中 A_1 为 $n-2$ 阶正交阵

对 A_1 应用归纳假设即可。 #

例 $P \in O_n$，$rk(P - I_n) = 1$，则 P 正交相似于 $diag(-1, 1, \cdots, 1)$.

例 $P \in O_n$ 则存在 $P_1, P_2 \in O_n$，使得 $P_1^T = P_1$，$P_2^T = P_2$，$P = P_1P_2$.

证 应用定理3.10 即可，注意到 $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin\alpha & \cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{pmatrix}$.

§6.4 实对称阵、对称变换及其对角化

$\boxed{\text{实对称阵}}$ 记 $S(n,\mathbb{R}) = \{ S \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid S^T = S \}$

命题4.1 实对称阵的特征值为实数.

PF 设 λ_0 为实对称阵 S 的(复)特征值, $0 \neq X_0 \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ 为相应特征向量, 即 $SX = \lambda_0 X_0$

$$\lambda_0 \bar{X}_0^T X_0 = \bar{X}_0^T (SX_0) = (\bar{X}_0^T S) X_0 = \overline{\lambda_0 X_0}^T X_0 = \bar{\lambda}_0 \bar{X}_0^T X_0$$

$$\Rightarrow (\lambda_0 - \bar{\lambda}_0) \bar{X}_0^T X_0 = 0 \Rightarrow \lambda_0 = \bar{\lambda}_0$$

即 $\lambda_0 \in \mathbb{R}$.

引理4.2 $S \in S(n,\mathbb{R})$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 为 S 特征值. 则 $V_{\lambda_1}(S) \perp V_{\lambda_2}(S)$.

PF 设 $\alpha \in V_{\lambda_1}(S)$, $\beta \in V_{\lambda_2}(S)$ 则 $S\alpha = \lambda_1 \alpha$, $S\beta = \lambda_2 \beta$.

$$\Rightarrow \alpha^T S^T = \lambda_1 \alpha^T, \quad \beta^T S^T = \lambda_2 \beta^T$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \beta^T (S\alpha) = (\beta^T S)\alpha = \lambda_1 \beta^T \alpha = \lambda_2 \beta^T \alpha \\ \lambda_1 \neq \lambda_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \beta^T \alpha = 0. \quad \#$$

定理4.3 实对称阵 S 正交相似于对角阵 $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$, $\lambda_1 \cdots \lambda_n$ 为 S 的所有特征值.

证一 引理4.2 + Schmidt 正交化.

证二 对 S 的阶进行归纳.

· $S=1$ 时结论显然成立.

· 设 $n-1$ 阶对称阵均可正交相似对角化. 设 $S \in S(n,\mathbb{R})$

取 S 的一个特征值 λ_1 以及 $X_1 \in V_{\lambda_1}(S)$, 且 $|X_1| = 1$. 将 X_1 扩充为 $\mathbb{R}^{n\times 1}$ 的一组标正基 $X_1, X_2, \cdots, X_n$, 令 $P_1 = (X_1 X_2 \cdots X_n)$

则 $P_1 \in O_n$. 且 $P_1^T S P_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ & S_1 \end{pmatrix}$, 由 $P_1^T S P_1$ 为对称阵

知 $P_1^T S P_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & S_1 \end{pmatrix}$. 由归纳假设, 存在 $n-1$ 阶正交阵 P_2, 使得 $P_2^T S_1 P_2 = \mathrm{diag}(\lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ 则

$$\begin{pmatrix} 1 & \\ & P_2 \end{pmatrix}^T P_1^T S P_1 \begin{pmatrix} 1 & \\ & P_2 \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$$

注意到 $P_1 \begin{pmatrix} 1 & \\ & P_2 \end{pmatrix}$ 为正交阵 #

<u>推论 4.4</u> $S \in S(n, \mathbb{R})$. 则下述等价:

(1) $S > 0$

(2) S 特征值 > 0

(3) 存在 $S_1 > 0$, 使得 $S = S_1^2$.

<u>PF</u> 存在 $P \in O_n$, 使得 $P^T S P = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$. 则 $S > 0 \Leftrightarrow \lambda_1, \cdots, \lambda_n > 0$.

(3) $\Rightarrow$ (1) 显然. (2) $\Rightarrow$ (3). 取 $S_1 = P\,\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \cdots, \sqrt{\lambda_n}) P^T$ 即可.

<u>注</u> 上述 S_1 唯一确定. 事实上, $S_1 \geq 0$, $S_2 \geq 0$, $S_1^2 = S_2^2 \Longrightarrow S_1 = S_2$.

设 S_1^2 特征值为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$. 则有 $P_1, P_2 \in O_n$, 使得 $P_1^T S_1 P_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} = P_2^T S_2 P_2$.

故 $P_1 \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} P_1^T = S_1^2 = S_2^2 = P_2 \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} P_2^T$

$\Rightarrow P_1 \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} P_1^T = P_2 \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} P_2^T \Longrightarrow S_1 = S_2$.

<u>推论 4.5</u> $S \in S(n, \mathbb{R})$. 则下述等价

(1) $S \geq 0$

(2) S 特征值 ≥ 0

(3) 存在 $S_1 \geq 0$. 使得 $S = S_1^2$, 此时 S_1 由 S 唯一确定.

<u>例</u> $A, B \in S(n, \mathbb{R})$, $A > 0$. 则 A, B 可同时相合对角化.

<u>PF</u> $A > 0 \Longrightarrow \exists\, P_1$ 可逆, 使得 $P_1^T A P_1 = I_n$

而 $B_1 = P_1^T B P_1 \in S(n, \mathbb{R})$, 故存在 $P_2 \in O_n$, 使得 $P_2^T B_1 P_2$ 为对角阵

$\Longrightarrow (P_1P_2)^T A P_1 P_2 = I_n$ $(P_1P_2)^T B P_1 P_2$ 为对角阵.

对称变换

定义4.6 V为欧氏空间，$\mathscr{A}\in\mathcal{L}(V)$ 若 $(\mathscr{A}u,v)=(u,\mathscr{A}v)$ $\forall u,v\in V$，
则称 $\mathscr{A}$ 为对称变换（或自伴变换）

定理4.7 V为欧氏空间，$\mathscr{A}\in\mathcal{L}(V)$ 则下述等价：

(1) $\mathscr{A}$ 为对称变换

(2) $\mathscr{A}$ 在任一标正基下矩阵为对称阵

(3) $\mathscr{A}$ 在某组标正基下的矩阵为对称阵

PF (1) $\Longrightarrow$ (2) 设 $\mathscr{A}$ 为对称变换，$\mathbb{B}=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 为标正基，
$\mathscr{A}$ 在 $\mathbb{B}$ 下的矩阵为 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 则

$$a_{ji}=\sum_u a_{ui}(\alpha_u,\alpha_j)=(\mathscr{A}\alpha_i,\alpha_j)=(\alpha_i,\mathscr{A}\alpha_j)=a_{ij}\quad\forall i,j.$$

(2) $\Rightarrow$ (3) 显然.

(3) $\Longrightarrow$ (1) 设 $\mathscr{A}$ 在标正基 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 下对称阵为 $A=(a_{ij})_{n\times n}$
则 $(\mathscr{A}\alpha_i,\alpha_j)=(\alpha_i,\mathscr{A}\alpha_j)$，$\forall i,j$. 从而对 $\forall u=\sum_i x_i\alpha_i$，$v=\sum_j y_j\alpha_j$

$$(\mathscr{A}u,v)=\sum_{i,j=1}^{n}x_iy_j(\mathscr{A}\alpha_i,\alpha_j)=\sum_{i,j=1}^{n}x_iy_j(\alpha_i,\mathscr{A}\alpha_j)=(u,\mathscr{A}v)\ \#$$

引理4.8 $\mathscr{A}$为欧氏空间V上的对称变换，λ_1,λ_2 为 $\mathscr{A}$ 不同特征值，则 $V_{\lambda_1}(\mathscr{A})\perp V_{\lambda_2}(\mathscr{A})$

定理4.9 欧氏空间V上的对称变换 $\mathscr{A}$ 在适当的标正基下矩阵为对角阵.

定理 4.10（奇异值分解） $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$，设 $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ 为 A^TA 的所有非 0 特征值，$\mu_1 = \sqrt{\lambda_1}, \cdots, \mu_r = \sqrt{\lambda_r}$。则存在正交阵 $P_1 \in O_m$，$P_2 \in O_n$，使得 $P_1 A P_2 = \begin{pmatrix} \mu_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \mu_r & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$。

证 存在 $P_2 \in O_n$，使得 $P_2^T A^T A P_2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_r & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$，即有

$$(AP_2)^T(AP_2) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_r & \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

设 $AP_2 = (X_1 \cdots X_r \cdots X_n) \Longrightarrow X_{r+1} = \cdots = X_n = 0$.

令 $\alpha_1 = \frac{1}{\mu_1}X_1, \cdots, \alpha_r = \frac{1}{\mu_r}X_r$，则 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 为标准正交向量组，扩充为 $\mathbb{R}^{m\times 1}$ 的标准正交基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \cdots, \alpha_m$。则

$$AP_2 = (X_1, \cdots, X_r, 0 \cdots 0) = (\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \cdots \alpha_m)\begin{pmatrix} \mu_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \mu_r & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

取 $P_1 = (\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m)^T \in O_m$，则有 $P_1 A P_2 = \mathrm{diag}(\mu_1, \cdots, \mu_r, 0)$ #

定理 4.11（极分解） $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$，则存在 $P \in O_n$，$S \geq 0$ 使得 $A = PS$。若 A 可逆，则 P、S 由 A 唯一确定。

证 由奇异值分解知存在 $P_1, P_2 \in O_n$ 使得 $P_1 A P_2 = \begin{pmatrix} \mu_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \mu_r & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$，其中 $\mu_1, \cdots, \mu_r$ 为 A 的奇异值，则

$$A = P_1^T \begin{pmatrix} \mu_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \mu_r & \\ & & & 0 \end{pmatrix} P_2^T = P_1^T P_2 P_2^T \begin{pmatrix} \mu_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \mu_r & \\ & & & 0 \end{pmatrix} P_2^T$$

令 $P = P_1^T P_2$，$S = P_2^T \begin{pmatrix} \mu_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \mu_r & \\ & & & 0 \end{pmatrix} P_2^T$ 即可.

下证唯一性 $A = P_1 S_1 = P_2 S_2$，$S_1, S_2 > 0$，P_1, P_2 正交

则 $A^TA = S_1^2 = S_2^2 \Longrightarrow S_1 = S_2 \Longrightarrow P_1 = P_2$

唯一性得证. #

§6.5* 规范方阵与规范变换

伴随变换

命题5.1 V 为欧氏空间，$\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V)$ 则存在唯一线性变换 $\mathscr{A}^*$，使得 $(\mathscr{A}u, v) = (u, \mathscr{A}^* v) \quad \forall u, v \in V$.

设 $\mathscr{A}$ 在 V 的标正基 $\mathbb{B} = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ 下的矩阵为 A，则 $\mathscr{A}^*$ 在 $\mathbb{B}$ 下的矩阵为 A^T.

PF 取定 $\mathbb{B}$，设 u, v 在 $\mathbb{B}$ 下坐标为 $X, Y \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ 则

$$(\mathscr{A}u, v) = (AX)^T Y = X^T A^T Y.$$

令 $\mathscr{A}^*$ 为对应于 A^T 的线性变换，则有

$$(\mathscr{A}u, v) = (u, \mathscr{A}^* v), \quad \forall u, v.$$

唯一性：设 $(\mathscr{A}u, v) = (u, \mathscr{A}' v) = (u, \mathscr{A}^* v) \quad \forall u, v$

则 $(u, (\mathscr{A}' - \mathscr{A}^*)v) = 0 \quad \forall u, v \Longrightarrow \mathscr{A}' v = \mathscr{A}^* v, \ \forall u$.

即 $\mathscr{A}' = \mathscr{A}^*$.

定义5.2 上述 $\mathscr{A}^*$ 称为 $\mathscr{A}$ 的伴随变换.

引理5.3
(1) $(\mathscr{A}^*)^* = \mathscr{A}$
(2) $(\mathscr{A} \pm \mathscr{B})^* = \mathscr{A}^* \pm \mathscr{B}^*$
(3) $(\lambda \mathscr{A})^* = \lambda \mathscr{A}^*$
(4) $(\mathscr{A}\mathscr{B})^* = \mathscr{B}^* \mathscr{A}^*$

例
- 正交变换：$\mathscr{A}^*\mathscr{A} = \mathscr{A}\mathscr{A}^* = \mathbb{1} \iff A^T A = A A^T = I_n$
- 对称变换：$\mathscr{A}^* = \mathscr{A} \iff A^T = A$

规范变换与规范阵

定义5.4 若 $\mathscr{A}^*\mathscr{A} = \mathscr{A}\mathscr{A}^*$，则称 $\mathscr{A}$ 为规范变换

规范方阵：$A^TA = AA^T$

例：对称变换，正交变换均为规范变换

$\mathcal{A}^* = -\mathcal{A}$：反对称变换（斜自伴变换） 反对称阵 $A^T = -A$

引理5.5　$\mathcal{A}$ 为规范变换 $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{A}$ 在标正基下方阵为规范阵.

引理5.6　与规范方阵正交相似的方阵为规范阵.

例　找出所有2阶规范阵.

解　$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. 则 A 规范

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2 = a^2+c^2 & ① \\ ab+cd = ac+bd & ② \\ b^2+d^2 = c^2+d^2 & ③ \end{cases}$$

①, ③ $\Longleftrightarrow$ $b = \pm c$

· $b = c$　A 为对称阵，为规范阵

· $b = -c \neq 0$ $\Longrightarrow$ $a = d$ $\Longrightarrow$ $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$

A 为正交阵倍元，为规范阵

即所求为 $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \middle| a,b,d \in \mathbb{R}\right\} \cup \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| a,b \in \mathbb{R}\right\}$.

命题5.7　$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ & A_4 \end{pmatrix}$ 或 $A = \begin{pmatrix} A_1 & \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$，$A_1, A_4$ 为方阵.

则 A 正规 $\Longleftrightarrow$ A_1, A_4 为规范阵，A_2（或 A_3）为 0.

PF　"$\Longleftarrow$" 显然

"$\Longrightarrow$" 设 $\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ & A_4 \end{pmatrix}$ 正规 即 $\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ & A_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1^T & \\ A_2^T & A_4^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1^T & \\ A_2^T & A_4^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ & A_4 \end{pmatrix}$

$\Longrightarrow$ $A_1A_1^T + A_2A_2^T = A_1^TA_1$　　$A_2A_4^T = A_1^TA_2$

$A_4A_2^T = A_2^TA_1$　　$A_4A_4^T = A_2^TA_2 + A_4^TA_4$.

比较迹知 $\operatorname{tr} A_2A_2^T = 0$ $\Longrightarrow$ $A_2 = 0$

$\Longrightarrow$ $A_1A_1^T = A_1^TA_1$，$A_4A_4^T = A_4^TA_4$.　※

推论5.8 W为欧氏空间V上规范变换$\mathcal{A}$的不变子空间，则

(1) W为$\mathcal{A}^*$-不变子空间.

(2) $W^\perp$为$\mathcal{A}$-不变子空间.

PF 取W的一组标正基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$，扩充为V的标正基 $\mathcal{B}=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$.

则 $\mathcal{A}$在$\mathcal{B}$下矩阵形如 $\begin{pmatrix} A_1 & \\ & A_2 \end{pmatrix}$，从而$\mathcal{A}^*$在$\mathcal{B}$下矩阵为 $\begin{pmatrix} A_1^T & \\ & A_2^T \end{pmatrix}$.

故 $W=\mathbb{R}\langle\alpha_1,\cdots,\alpha_r\rangle$ 为$\mathcal{A}^*$-不变子空间

$W^\perp=\mathbb{R}\langle\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n\rangle$ 为$\mathcal{A}$-不变子空间. #

定理5.9 设 $a_1\pm ib_1,\cdots,a_s\pm ib_s$, $b_i\neq 0$ $i=1,\cdots,s$, $\lambda_{2s+1},\cdots,\lambda_n$, $\lambda_j\in\mathbb{R}$, $\forall j$ 为n阶规范阵A全部特征值. 则A正交相似于

$$\mathrm{diag}\left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} a_s & b_s \\ -b_s & a_s \end{pmatrix}, \lambda_{2s+1},\cdots,\lambda_n\right)$$

PF 对A的阶归纳. 阶$=1$ 显然成立.

设命题对阶$\le n-1$的规范阵成立. 现设A为n阶规范阵.

- 若A有实特征值λ_n，则A有1维不变子空间，A正交相似于 $\begin{pmatrix} A_1 & \\ & \lambda_n \end{pmatrix}$, A_1为$n-1$阶规范阵
- 若A有复特征值 $a_1\pm ib_1$，则A有2维不变子空间. A正交相似于 $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & \\ -b_1 & a_1 & \\ & & A_2 \end{pmatrix}$. A_2为$n-2$阶规范阵. #

例
- 正交阵 $\sim \mathrm{diag}\left(\begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & \sin\alpha_1 \\ -\sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix} \cos\alpha_s & \sin\alpha_s \\ -\sin\alpha_s & \cos\alpha_s \end{pmatrix}, I_r, -I_{n-r-2s}\right)$
- 对称阵 $\sim \mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$.
- 反对称阵 $\sim \mathrm{diag}\left(\begin{pmatrix} & b_1 \\ -b_1 & \end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix} & b_s \\ -b_s & \end{pmatrix}, O_{n-2s}\right)$.

例 设 $S, \overset{\neq 0}{K}\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $S>0$, $K^T=-K$ 则 $\det(S+K)>\det S$

PF $S>0 \Rightarrow \exists P_1$可逆，使得 $P_1^T S P_1 = I_n$. $(P_1^T K P_1)^T=-P_1^T K P_1$

$\Rightarrow \exists P_2\in O_n$, 使得 $P_2^T P_1^T K P_1 P_2 = \mathrm{diag}\left(\begin{pmatrix} & b_1 \\ -b_1 & \end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix} & b_s \\ -b_s & \end{pmatrix}, O\right)$

$\Rightarrow \det P_2^T P_1^T (K+S) P_1 P_2 = (1+b_1^2)\cdots(1+b_s^2) > 1 = \det P_2^T P_1^T K P_1 P_2$ #