第七章 二次型

§7.1 双线性函数

<u>定义1.1</u> 称 $f: V\times V \to \mathbb{F}$ 为<u>双线性函数</u>，若

· $f(\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2, w) = \lambda_1 f(v_1,w) + \lambda_2 f(v_2,w)$ $\forall \lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{F}$

· $f(v, \lambda_1 w_1+\lambda_2 w_2) = \lambda_1 f(v,w_1) + \lambda_2 f(v,w_2)$ $v,v_1,v_2,w,w_1,w_2\in V$

进一步，若 $f(v,w)=f(w,v)$，$\forall v,w\in V$ 则称 f 为<u>对称双线性函数</u>（或对称双线性型）

记 $S(V^2,\mathbb{F})$ 为 V 上的对称双线性函数全体

$L(V^2,\mathbb{F})$ ······ 双线性函数全体

<u>注</u> · $f\in L(V^2,\mathbb{F}) \Rightarrow f(0,v)=f(v,0)=0$ $\forall v\in V$

· 令 $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$，定义 $\mathbb{F}^n$ 上的二元函数

$$f_A: \mathbb{F}^{n\times 1}\times\mathbb{F}^{n\times 1}\longrightarrow\mathbb{F} \qquad f_A(X,Y)=X^TAY$$

易知 f_A 为 $\mathbb{F}^{n\times 1}$ 上的双线性函数

反之，$\mathbb{F}^{n\times 1}$ 上的任一双线性函数 f 均可通过上述方式得到。事实上，令 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，其中 $a_{ij}=f(e_i,e_j)$，$\forall 1\le i,j\le n$

则 $f=f_A$.

· $L(V^2,\mathbb{F})$ 具有自然的 $\mathbb{F}$-线性空间结构：

$$(f+g)(u,v) \triangleq f(u,v)+g(u,v) \qquad \forall f,g\in L(V^2,\mathbb{F})$$

$$(\lambda f)(u,v) \triangleq \lambda f(u,v) \qquad \forall u,v\in V,\ \lambda\in\mathbb{F}$$

<u>命题1.2</u> 设 $\mathcal{B}=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$ 为 V 的一组基，定义映射

$$\varphi_{\mathcal{B}}: L(V^2,\mathbb{F}) \longrightarrow \mathbb{F}^{n\times n}$$
$$f \longmapsto (f_{ij})_{n\times n} \qquad f_{ij}=f(\xi_i,\xi_j)$$

且 $\varphi_{\mathcal{B}}$ 为线性空间同构，且 $\varphi_{\mathcal{B}}$ 诱导线性子空间同构

$S(V^2,\mathbb{F}) \xrightarrow{\sim} S(n,\mathbb{F})$，其中 $S(n,\mathbb{F})$ 为 n 阶对称阵形成的子空间.

注. 矩阵 $(f_{ij})_{n\times n}$ 称为 f 在基 $(\xi_1,\cdots,\xi_n)$ 下的度量矩阵

· $f(x_1\xi_1+\cdots+x_n\xi_n,\ y_1\xi_1+\cdots+y_n\xi_n) = (x_1\cdots x_n)(f_{ij})_{n\times n}(y_1,\cdots,y_n)^T$. 即

$$\begin{tikzcd} V \arrow[d, "\xi"] & v=x_1\xi_1+\cdots+x_n\xi_n \arrow[d, mapsto] \\ \mathbb{F}^{n\times 1} & \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} V\times V \arrow[r, "f"] \arrow[d, dashed] & \mathbb{F} \arrow[d, equal] \\ \mathbb{F}^{n\times 1}\times\mathbb{F}^{n\times 1} \arrow[r, "f_A"] & \mathbb{F} \end{tikzcd} \qquad A=(f_{ij})_{n\times n}$$

命题1.3 设 f 为 V 上的双线性型函数. $B=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$, $B'=(\xi_1',\cdots,\xi_n')$ 为 V 的两组基, $(\xi_1',\cdots,\xi_n')=(\xi_1,\cdots,\xi_n)P$. f 在 B 以及 B' 下的度量阵分别为 A 和 A'. 则 $A'=P^TAP$.

定义1.4 设 $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$. 称 A 与 B 相合, 若存在可逆阵 P, 使得 $B=P^TGP$.

注 · 相合关系为 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 上的等价关系. $f\in\mathcal{L}(V^2,\mathbb{F})$ 在不同基下的矩阵相合.

定义1.5 f 在某组基下的矩阵的秩称为 f 的秩. 若 f 在某组基下矩阵非退化, 则称 f 非退化, 否则称 f 退化.

定义1.6 设 $f\in\mathcal{L}(V^2,\mathbb{F})$. u,v. 若 $f(u,v)=0$ 则称 u (关于 f) 左正交于 v, 并称 v 右正交于 u, 记作 $u\perp_f v$, 或 $u\perp v$.

对集合 S, 记 $S^\perp=\{v\in V \mid f(u,v)=0\ \forall u\in S\}$

$${}^\perp S=\{v\in V \mid f(v,u)=0\ \forall u\in S\}$$

称 u 左正交于 S, 若 $u\in{}^\perp S$, 记作 $u\perp S$;

称 u 右正交于 S, 若 $u\in S^\perp$, 记作 $S\perp u$.

注 · 显然 $\forall S\subseteq V$, $S^\perp$, ${}^\perp S$ 均为 V 的线性子空间

· $W\subseteq{}^\perp(W^\perp)$; $\quad\forall\ W, W_1, W_2$ 子空间.

$W_1\subseteq W_2 \Longrightarrow W_1^\perp\supseteq W_2^\perp$, ${}^\perp W_1\supseteq{}^\perp W_2$

· $({}^{\perp}(W^{\perp}))^{\perp} = W^{\perp}$, ${}^{\perp}(({}^{\perp}W)^{\perp}) = {}^{\perp}W$.

$$\left(\left.\begin{cases} {}^{\perp}(W^{\perp}) \supseteq W \implies ({}^{\perp}(W^{\perp}))^{\perp} \subseteq W^{\perp} \\ ({}^{\perp}(W^{\perp}))^{\perp} \supseteq W^{\perp} \end{cases}\right\} \implies ({}^{\perp}(W^{\perp}))^{\perp} = W^{\perp}\right)$$

设 $f \in \mathcal{L}(V^2, F)$，任取 $u \in V$ 则有映射 $f(u,-): V \longrightarrow F$，$(f(u,-))(v) \triangleq f(u,v)$. 易知 $f(u,-) \in V^*$，故有映射

$$L_f: V \longrightarrow V^*, \quad u \longmapsto f(u,-)$$

可验证 $L_f \in \mathcal{L}(V, V^*)$，同理，可定义 $R_f: V \longrightarrow V^*$，$v \longmapsto f(-,v)$.

<u>命题 1.7</u> 设 $\mathcal{B} = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$ 为 V 一组基，$\mathcal{B}^* = (\xi^1, \cdots, \xi^n)$ 为 $\mathcal{B}$ 的对偶基. 设 V 上双线性型 f 在 $\mathcal{B}$ 下的度量阵为 A 则 R_f (L_f) 在基 $\mathcal{B}$ 以及 $\mathcal{B}^*$ 下的矩阵为 A (A^T).

<u>PF</u> $(R_f(\xi_j))(\xi_i) = f(\xi_i, \xi_j) = a_{ij} \implies R_f(\xi_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \xi^i$.

即 $R_f(\xi_1, \cdots, \xi_n) = (\xi^1, \cdots, \xi^n) A$

同理，$L_f(\xi_1, \cdots, \xi_n) = (\xi^1, \cdots, \xi^n) A^T$.

<u>注</u> · $\operatorname{Ker} L_f = {}^{\perp}V$，$\operatorname{Ker} R_f = V^{\perp}$

· f 非退化 $\iff$ L_f (R_f) 为同构 $\iff$ ${}^{\perp}V = V^{\perp} = 0$

· $\dim {}^{\perp}V = \dim V^{\perp} = \dim V - \operatorname{rk}(f)$.

<u>推论 1.8</u> 有限维线性空间 V 上的双线性函数 f 非退化 $\iff$ $\forall g \in V^*$，$\exists\, u \in V$，使得 $g(v) = f(u,v)$ $\forall v \in V$.

<u>PF</u> f 非退化 $\iff$ L_f 满射

$\iff$ $\forall g \in V^*$，$\exists\, u$，使得 $g = L_f(u)$

即 $g(v) = f(u,v)$ $\forall v \in V$.

§7.2 二次型

定义2.1 设 $f\in \mathcal{L}(V^2,\mathbb{F})$，则 $Q(\alpha)\triangleq f(\alpha,\alpha)$ 称为 V 上的一个<u>二次型</u>.

取 V 的一组基 $B=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$. 设 f 在 B 下矩阵为 $A=(f_{ij})_{n\times n}$，则 相应的二次型可定义函数

$$Q:\quad \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F},$$

$$Q(x_1,\cdots,x_n)=Q(x_1\xi_1+\cdots+x_n\xi_n)$$

$$=(x_1,\cdots,x_n)A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\sum_{i,j=1}^{n} f_{ij}x_ix_j$$

定义2.1' 域 $\mathbb{F}$ 上的 n 元二次多项式函数 $Q(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{i\le j} a_{ij}x_ix_j$ 称为域 $\mathbb{F}$ 上的一个（关于变元 $x_1,\cdots,x_n$ 的）n 元<u>二次型</u>.

显然，$f^{op}: V\times V\longrightarrow \mathbb{F}$，$f(u,v)=f(v,u)\in \mathcal{L}^2(V)$，且 f^{op} 与 f 在同一组基下的矩阵互为转置，由定义，f 与 f^{op} 定义的二次型相同. 若 $\operatorname{char}\mathbb{F}\neq 2$（即 2 在 $\mathbb{F}$ 中可逆），则 $f+f^{op}\in S(V^2,\mathbb{F})$，且 $\frac{1}{2}(f+f^{op})$ 与 f，f^{op} 定义的二次型相同

命题2.2 设 $\operatorname{char}\mathbb{F}\neq 2$ 则有双射

$$\Phi:\quad S(V^2,\mathbb{F})\longrightarrow\{V\text{上的二次型}\}$$

$$f\longmapsto Q_f(v)=f(v,v)\quad \forall v\in V.$$

<u>PF</u> · Φ 为满射：设 $Q(v)$ 为双线性函数 f 对应的二次型

则 $\frac{1}{2}(f+f^{op})\in S(V^2,\mathbb{F})$. 且 $\Phi(f)=\Phi(\frac{1}{2}(f+f^{op}))$.

· Φ 为单射：即 $\forall f,f'\in S(V^2,\mathbb{F})$，$\Phi(f)=\Phi(f')\Rightarrow f=f'$.

$$f(w,w)=f'(w,w)\qquad \forall w\in V$$

$$\Rightarrow f(u+v,u+v)=f'(u+v,u+v)$$

$$\Rightarrow f(u,u)+f(v,v)+2f(u,v)=f'(u,u)+f'(v,v)+2f'(u,v)$$

$$\Rightarrow 2f(u,v)=2f'(u,v)\Longrightarrow f(u,v)=f'(u,v).$$

注：若 $\mathbb{F}=\mathbb{F}_2$（2元域）则 Ξ 非单非满. 令 $V=\mathbb{F}^2$，$Q(\binom{x_1}{x_2})=x_1x_2$，$f(\binom{x_1}{x_2},\binom{y_1}{y_2})=x_1y_2+x_2y_1$，则 $Q\notin \mathrm{Im}\,\Xi$，$\Xi(f)=0$.

若 $\mathbb{F}=\mathbb{R}$，则称 $Q(v)$ 为实二次型.

基本问题：求实二次型极值/值域.（配方化为平方和形式）

例 求下列实二次型的值域和极值

(1) $Q(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+4xy-6xz-4yz$

(2) $Q(x,y,z)=2x^2+3y^2+5z^2+4xy-6xz-7yz$

解：(1) $Q(x,y,z)=(x+2y-3z)^2-3(y-\frac{4}{3}z)^2-\frac{8}{3}z^2$

令 $x'=x+2y-3z$，$y'=y-\frac{4}{3}z$，$z'=z$

$Q(x',y',z')=x'^2-3y'^2-\frac{8}{3}z'^2$ 值域为 $\mathbb{R}$.

(2) $Q(x,y,z)=2(x+y-\frac{3}{2}z)^2+(y-\frac{1}{2}z)^2+\frac{1}{4}z^2$

令 $x'=x+y-\frac{3}{2}z$　$y'=y-\frac{1}{2}z$　$z'=z$.

$Q(x',y',z')=2x'^2+y'^2+\frac{1}{4}z'^2$　值域为 $[0,\infty)$

注 形如 $\lambda_1x_1^2+\cdots+\lambda_nx_n^2$ 的二次型称为标准形（或对角形）.

定理2.3 $\mathbb{F}$ 上的二次型均可化为标准形式. 特别地，实二次型均可化为 $Q(x_1,\cdots,x_n)=x_1^2+\cdots+x_r^2-x_{r+1}^2-\cdots-x_{r+s}^2$ 形式.

规范形

例 利用配方法将下述二次型化为标准形

(1) $Q(x,y,z)=(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2$

(2) $Q(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3$

解：(1) $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=2(x-\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}z)^2+\frac{3}{2}(y-z)^2$

(2) $x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=(\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2+x_3)^2-\frac{1}{2}(x_1-x_2)^2$

以下若无特别说明，$\mathrm{char}\,\mathbb{F}\neq 2$，$\dim V<\infty$

<u>定义2.4</u> 设 $Q(v)$ 为 V 上二次型，$f\in\mathcal{L}(V^2,\mathbb{F})$ 为 $Q(v)$ 对应的对称双线性型 $\mathbb{B}=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$ 为 V 一组基. 则 f 在 V 下的度量阵称作 $Q(v)$ 在基 $\mathbb{B}$ 下的<u>矩阵</u>.

<u>注</u> · $Q(v)$ 在任一组基下方阵为对称阵

· $Q(v)$ 在不同基下的方阵相合

· $A^T=A \Rightarrow (P^TAP)^T=P^TAP$，$A^T=-A\Rightarrow(P^TAP)^T=-P^TAP$

· 设 $Q(v)$ 基 $\mathbb{B}$ 下的矩阵为 A，则 $Q(v)=X^TAX$，其中 X 为 v 在 $\mathbb{B}$ 下的坐标.

<u>定义2.4'</u> 域 $\mathbb{F}$ 上的 n 元二次型 $Q(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i\le j} b_{ij}x_ix_j$ 的矩阵为 $A=(a_{ij})_{n\times n}$. $a_{ii}=b_{ii}$，$a_{ij}=\frac{1}{2}b_{ij}\ \forall i\neq j$

<u>例</u>
$$Q(x,y,z)=2x^2-3y^2+5z^2+2xy-3xz+5yz$$
$$=(x\ y\ z)\begin{pmatrix}2&1&-\frac{3}{2}\\1&-3&\frac{5}{2}\\-\frac{3}{2}&\frac{5}{2}&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

则定理2.3可重新表述为下述等价命题

<u>定理2.5</u> (1) 设 $Q(v)$ 为 V 上二次型. 则存在 V 的一组基 $\mathbb{B}$，使得 $Q(v)$ 在 $\mathbb{B}$ 下的矩阵为对角阵

(2) $\mathbb{F}$ 上任一对称方阵相合到对角阵.

<u>PF</u> (1)、(2) 为定理2.3的不同表述形式，下面给出矩阵证法. 对对称阵 A 的阶进行归纳：

· A 的阶为 1. 则显然成立.

· 设 $n-1$ 阶对称阵可相合对角化. 任取 n 阶对称阵 A,

CASE 1 $a_{11} \neq 0$. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \alpha \\ \beta & A_{22} \end{pmatrix} \in S(n, \mathbb{F})$，则 $\beta = \alpha^T$，$A_{22}^T = A_{22}$

令 $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\alpha}{a_{11}} \\ & I_n \end{pmatrix}$，则 $P_1^T A P_1 = \begin{pmatrix} 1 & \\ -\frac{\alpha^T}{a_{11}} & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \alpha \\ \beta & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\alpha}{a_{11}} \\ & I_n \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & \\ & A_{22} - \frac{1}{a_{11}} \alpha^T \alpha \end{pmatrix}$

由归纳假设，$\exists$ $n-1$ 阶可逆阵 Q，使得 $Q^T (A_{22} - \frac{1}{a_{11}} \alpha^T \alpha) Q$ 为对角阵。令 $P = P_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & \\ & Q \end{pmatrix}$，则 $P^T A P$ 为对角阵.

CASE 2 $a_{11} = 0$，$a_{1i} \neq 0$ $\exists$ $i \neq 1$

$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & & \\ a_{i1} & & \cdots & & & a_{in} \\ \vdots & & & & & \\ a_{n1} & & \cdots & & & a_{nn} \end{pmatrix}$ 令 $P = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ 1 & & 1 & \end{pmatrix} \leftarrow i$

令 $A' = P^T A P = (a'_{ij})_{n \times n}$ 则 $a'_{11} = 2a_{1i} \neq 0$

由 CASE 1 知 A' 可相合到对角形，故 A 可相合到对角形.

CASE 3 $a_{1i} = 0$，$\forall i$. 此时 $A = \begin{pmatrix} 0 & \\ & A_{22} \end{pmatrix}$

由归纳假设 A_{22} 相合到对角形，故 A 可相合到对角形. *

例 化 $2x_1x_2 + 2x_1x_3 + \cdots + 2x_1x_n + \cdots + 2x_{n-1}x_n$ 为对角形

解. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & & 1 \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix}$ 令 $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & -2 & & \vdots \\ & & & \ddots & \\ 1 & & & & -(n-1) \end{pmatrix}$，$P^{-1} A P = \begin{pmatrix} n-1 & & & \\ & -1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$

$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & & & \\ & \frac{1}{1\cdot 2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{(n-1)\cdot n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -1 & & & \\ 1 & 1 & -2 & & \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -(n-1) \end{pmatrix} \Longrightarrow P^T A P = \begin{pmatrix} n(n-1) & & & \\ & -2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -(n-1)n \end{pmatrix}$

$\Longrightarrow Q(x_1, \cdots, x_n) = \frac{n-1}{n}(x_1 + \cdots + x_n)^2 - \frac{1}{1\cdot 2}(x_1 - x_2)^2 - \frac{1}{2\cdot 3}(x_1 + x_2 - 2x_3)^2$

$- \cdots - \frac{1}{(n-1)n}(x_1 + \cdots + x_{n-1} - (n-1)x_n)^2$

例 $Q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 4xy - 6xz - 4yz$

解: $S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & & \\ 2 & 1 & -2 & & 1 & \\ -3 & -2 & 1 & & & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[(3)+3\cdot(1)]{(2)+-2\cdot(1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & 1 & & \\ & -3 & 4 & -2 & 1 & \\ & 4 & 8 & 3 & & 1 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{(3)+\frac{4}{3}\cdot(2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & 1 & & \\ & -3 & & -2 & 1 & \\ & & \frac{8}{3} & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & 1 \end{array}\right)$ $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & \frac{1}{3} \\ & 1 & 4/3 \\ & & 1 \end{pmatrix}$.

§ 7.3 正定二次型与正定方阵

<u>定义 3.1</u> $Q(v)$ 为实线性空间 V 上的二次型，称 Q

<u>正定</u> (positive definite) 若 $Q(v) \geq 0$ 且 $Q(v)=0 \Leftrightarrow v=0$.

<u>半正定</u> (positive semi-definite) 若 $Q(v) \geq 0$

<u>负定</u> (negative definite) 若 $Q(v) \leq 0$，且 $Q(v)=0 \Leftrightarrow v=0$

<u>半负定</u> (negative semi-definite) 若 $Q(v) \leq 0$

分别记作 $Q>0$，$Q \geq 0$，$Q<0$，$Q \leq 0$.

<u>注</u>. $Q>0 \Longleftrightarrow -Q<0$，　$Q \geq 0 \Longleftrightarrow -Q \leq 0$.

<u>引理 3.2</u> Q 为 V 上二次型，$W \leq V$，则

$$Q>0 \ (\geq 0,\ <0,\ \leq 0) \Longrightarrow Q|_W > 0 \ (\geq 0,\ <0,\ \leq 0)$$

<u>定义 3.1'</u> 称 n 阶实对称阵 A <u>正定</u>，记作 $A>0$，若 $X^TAX \geq 0$ $\forall X \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ 且等号成立 $\Longleftrightarrow X=0$. 类似地，可定义半正定、负定、半负定阵，分别记作 $A \geq 0$，$A<0$，$A \leq 0$.

<u>引理 3.2'</u> $S=\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22}\end{pmatrix} > 0 \ (\geq, <, \leq) \Longrightarrow S_{11}, S_{22} > 0 \ (\geq, <, \leq)$

<u>Recall</u> 实对称阵特征值均为实数.

<u>命题 3.3</u> $S>0$，λ_0 为 S 的特征值，则 $\lambda_0 > 0$.

<u>PF</u> 设 $0 \neq X \in \mathbb{R}^{n\times 1}$，$AX=\lambda_0 X$，则 $\left.\begin{array}{l}\lambda_0 X^TX = X^TAX > 0 \\ X^TX > 0\end{array}\right\} \Rightarrow \lambda_0 > 0$.

<u>命题 3.4</u> $S>0 \Longleftrightarrow S=P^TP$，$\exists$ 可逆实方阵 P.

PF $\Leftarrow$ 设 $S=P^TP$. 则 对 $\forall 0\neq X\in\mathbb{R}^{n\times 1}$ 有 $PX\neq 0$

故 $X^T(P^TP)X=(PX)^TPX>0$. 即 $P^TP>0$.

$\Rightarrow$ 由定理2.5, 存在可逆方阵 P_1, 使得 $P_1^TSP=\begin{pmatrix}a_1&&\\&\ddots&\\&&a_n\end{pmatrix}$

为对角阵 由 $S>0$ 知 $P_1^TSP_1>0$ (同"$\Leftarrow$"部分证明)

从而 $a_1,\cdots,a_n>0$ 则 $S=P_1^{-1T}\begin{pmatrix}a_1&&\\&\ddots&\\&&a_n\end{pmatrix}P_1^{-1}=P_1^{-1T}\begin{pmatrix}\sqrt{a_1}&&\\&\ddots&\\&&\sqrt{a_n}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\sqrt{a_1}&&\\&\ddots&\\&&\sqrt{a_n}\end{pmatrix}P_1^{-1}$

令 $P=\begin{pmatrix}\sqrt{a_1}&&\\&\ddots&\\&&\sqrt{a_n}\end{pmatrix}P_1^{-1}$ 即可.

推论3.5 $S>0 \Rightarrow \det S>0$

Recall $S=\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}\in S(n,\mathbb{R})$ ✓ 对称阵

$1\le i_1<i_2<\cdots<i_r\le n$ $\begin{vmatrix}a_{i_1i_1}&a_{i_1i_2}&\cdots&a_{i_1i_r}\\a_{i_2i_1}&a_{i_2i_2}&\cdots&a_{i_2i_r}\\\vdots&&&\vdots\\a_{i_ri_1}&a_{i_ri_2}&\cdots&a_{i_ri_r}\end{vmatrix}$ 主子式

$1\le r\le n$ $\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1r}\\a_{21}&\cdots&a_{2r}\\\vdots&&\vdots\\a_{r1}&\cdots&a_{rr}\end{vmatrix}$ 顺序主子式

推论3.6 $S>0 \Longrightarrow$ S 的任一主子式 >0

定理3.7 $S\in S(n,\mathbb{R})$ 则下述等价

(1) $S>0$

(2) $S=P^TP$ $\exists P\in GL_n(\mathbb{R})$

(3) S 的所有主子式 >0

(4) S 的顺序主子式 >0

注 $S>0$

$\Longleftrightarrow$ S 所有特征值 >0

$\Longleftrightarrow$ $S=S_1^2$, 存在(唯一) $S_1>0$ (后证)

PF $(1) \Longleftrightarrow (2)$ 命题3.4.

$(2) \Longrightarrow (3)$ Cauchy-Binet 公式. $S = P^TP$ 则对 $\forall\ 1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n$

$$S\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_k \\ i_1 & \cdots & i_k \end{pmatrix} = \sum_{1\le j_1 < \cdots < j_k \le n} P\begin{pmatrix} j_1 & \cdots & j_k \\ i_1 & \cdots & i_k \end{pmatrix}^2$$

由于P可逆，存在 $1 \le j_1 < \cdots < j_k \le n$ 使得 $P\begin{pmatrix} j_1 & \cdots & j_k \\ i_1 & \cdots & i_k \end{pmatrix} \ne 0$ (否则利用Laplace展开，将 $\det P$ 按 $i_1, \ldots, i_k$ 列展开知 $\det P = 0$ 与P可逆矛盾) 从而 $S\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_k \\ i_1 & \cdots & i_k \end{pmatrix} > 0$.

$(3) \Longrightarrow (4)$ 显然.

$(4) \Longrightarrow (2)$ 对 S 的阶进行归纳.

S 为1阶方阵，显然成立.

设结论对 $n-1$ 阶实对称阵成立

设 $S = \begin{pmatrix} S_1 & \alpha \\ \alpha^T & s_{nn} \end{pmatrix}$ 满足所有主子式 >0 则 $S_1 > 0$，故可逆.

$$D = \begin{pmatrix} I_{n-1} & \\ -\alpha^T S_1^{-1} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} S_1 & \alpha \\ \alpha^T & s_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_{n-1} & -S_1^{-1}\alpha \\ & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1 & \\ & \underset{d_n}{\underset{\parallel}{s_{nn} - \alpha^T S_1 \alpha}} \end{pmatrix}$$

由于 $\det S > 0$, $\det S_1 > 0 \Longrightarrow d_n = s_{nn} - \alpha^T S_1 \alpha > 0$

由归纳假设 $S_1 = P_1^T P_1$ $P_1 \in GL_{n-1}(\mathbb{R})$

$$D = \begin{pmatrix} P_1 & \\ & \sqrt{d} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} P_1 & \\ & \sqrt{d} \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow S = P^T P$, 其中 $P = \begin{pmatrix} P_1 & \\ & \sqrt{d} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_{n-1} & S^{-1}\alpha \\ & 1 \end{pmatrix}$. #

例 $Q(x,y,z) = \lambda(x^2+y^2+z^2) - 2xy + 2yz - 2xz$ 问何时

(1) $Q > 0$ (2) $Q < 0$

(3) Q 为某个一次多项式的平方.

解 令 $S = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & 1 \\ -1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$ 则 $Q > 0 \Longleftrightarrow S > 0$

$Q < 0 \Longleftrightarrow S < 0$

Q 为一个多项式平方 $\Longleftrightarrow \mathrm{rk} S = 1$

- $S > 0 \Longleftrightarrow \lambda > 0,\ \lambda^2 - 1 > 0,\ (\lambda-1)^2(\lambda+2) > 0 \Longleftrightarrow \lambda > 1$
- $S < 0 \Longleftrightarrow \lambda < 0,\ \lambda^2 - 1 > 0,\ (\lambda-1)^2(\lambda+2) < 0 \Longleftrightarrow \lambda < -2$
- $\mathrm{rk} S = 1 \Longleftrightarrow \lambda = 1$

*

定理3.7 (3) 有一个条件减弱的版本.

<u>命题3.8</u> 设 $S\in\mathcal{S}(n,\mathbb{R})$ 可逆. 则 $S>0 \Longleftrightarrow S$ 所有主子式非负.

<u>PF</u> 只须证明 "$\Longleftarrow$" 部分. 对 S 的阶进行归纳.

$S=1$ 结论显然成立. 设结论对 $\le n-1$ 阶可逆实对称阵成立.

下设 $S=(s_{ij})_{n\times n}$ 为 n 阶可逆对称阵. 且 S 的所有主子式非负.

首先 $s_{11}>0$. 否则, 对 $\forall j>1$, $\begin{vmatrix} s_{11} & s_{1j} \\ s_{j1} & s_{jj}\end{vmatrix} = -s_{1j}^2 \ge 0$

$\Rightarrow s_{1j}=0\ \ \forall j \ \ \Rightarrow \det S=0$, 矛盾.

令 $x_i=-\frac{s_{1i}}{s_{11}}$ $\quad i=2,\cdots,n$.

考察 S 的分块 $S=\begin{pmatrix} s_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22}\end{pmatrix}$, $S_{12}=S_{21}^T\in\mathbb{R}^{1\times(n-1)}$, $S_{22}\in\mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$

则 $S'=\begin{pmatrix} 1 & \\ -x_2 & \\ \vdots & I_{n-1} \\ -x_n & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -x_2 \cdots -x_n \\ & I_{n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} s_{11} & \\ & S_{22}'\end{pmatrix}$

计算可知 $S'\begin{pmatrix} 1 & i_2 \cdots i_k \\ 1 & i_2 \cdots i_k\end{pmatrix}=S\begin{pmatrix} 1 & i_2 \cdots i_k \\ 1 & i_2 \cdots i_k\end{pmatrix}$ $\quad\forall\ 1<i_2<\cdots<i_k\le n$

$\Longrightarrow \det S_{22}'>0$ 且 S_{22}' 所有主子式非负

由归纳假设知 $S_{22}'>0 \Longrightarrow S'>0 \Longrightarrow S>0$ #

设 $\sigma=(\sigma_1,\cdots,\sigma_n)$ 为 $(1,\cdots,n)$ 的一个排列. 令 $P_\sigma=E_{\sigma_1,1}+\cdots+E_{\sigma_n,n}$

为 σ 相对应的<u>置换方阵</u>. 称 A 与 B <u>置换相合</u>, 若存在排列

$\sigma=(\sigma_1,\cdots,\sigma_n)$, 使得 $B=P_\sigma^TAP_\sigma$. 此时有 $B\begin{pmatrix} i_1 \cdots i_k \\ j_1 \cdots j_k\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} \sigma_{i_1} \cdots \sigma_{i_k} \\ \sigma_{j_1} \cdots \sigma_{j_k}\end{pmatrix}$.

特别地, 若 A, B 置换相合, 且 A 的主子式非负 $\Longrightarrow$ B 的主子式非负.

类似于正定型, 半正定方阵有如下刻画.

<u>定理3.9</u> $S\in\mathcal{S}(n,\mathbb{R})$, 则下述等价:

(1) $S\ge 0$

(2) $S=P^TP$, 其中 P 为某个行满秩矩阵.

(3) $S=P^TP$, 其中 P 为某个实矩阵

(4) S 的所有主子式非负.

PF (1) $\Longrightarrow$ (2) 由定理 2.2 存在 $X\in GL_n(\mathbb{R})$, $a_1,\cdots a_r\in\mathbb{R}^{\times}$,

使得 $S=X^T\begin{pmatrix}a_1&&&\\&\ddots&&\\&&a_r&\\&&&0\end{pmatrix}X$, 其中 $r=\mathrm{rk}S$,

设 $X=\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix}$, $X_1\in\mathbb{R}^{r\times n}$, $X_2\in\mathbb{R}^{(n-r)\times n}$

则 $S=X_1^T\begin{pmatrix}a_1&&\\&\ddots&\\&&a_r\end{pmatrix}X_1$, $\mathrm{rk}X_1=r$

$S\geqslant 0 \Longrightarrow \begin{pmatrix}a_1&&&\\&\ddots&&\\&&a_r&\\&&&0\end{pmatrix}\geqslant 0 \Longrightarrow a_i>0\ \forall i$.

令 $P=\begin{pmatrix}\sqrt{a_1}&&\\&\ddots&\\&&\sqrt{a_r}\end{pmatrix}X_1$ 则 $S=P^TP$

且 $\mathrm{rk}P=r$ 即 P 行满秩.

(2) $\Longrightarrow$ (3) 显然

(3) $\Longrightarrow$ (1) 设 $S=P^TP$, $P\in\mathbb{R}^{m\times n}$ 则 $\forall\ X\in\mathbb{R}^{n\times 1}$,

$X^T(P^TP)X=(PX)^T(PX)\geqslant 0$ 故 $S\geqslant 0$.

(2) $\Longrightarrow$ (4) 设 $S=P^TP$, $P\in\mathbb{R}^{r\times n}$ 为行满秩方阵.

故有 $S\begin{pmatrix}i_1&\cdots&i_k\\i_1&\cdots&i_k\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}1&2&\cdots&r\\i_1&i_2&\cdots&i_k\end{pmatrix}^2\geqslant 0\quad\forall\ 1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n$

(4) $\Longrightarrow$ (1) 设 S 所有主子式非负. 令 $r=\mathrm{rk}S$.

若 $r=n$, 则由命题 3.8 可证. 下设 $1\leq r\leq n-1$.

利用置换相合, 不妨设 $S=\begin{pmatrix}S_1&S_2\\S_3&S_4\end{pmatrix}$, $S_1\in\mathbb{R}^{r\times r}$, $\mathrm{rk}S_1=r$

令 $S_2=S_1X$. 则 $\begin{pmatrix}I_r&\\-X^T&I_{n-r}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}S_1&S_2\\S_3&S_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_r&-X\\&I_{n-r}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}S_1&\\&S_4-X^TS_1X\end{pmatrix}$

由 $\mathrm{rk}S=\mathrm{rk}S_1=r$ 知 $S_4-X^TS_1X=0$, 故 S 相合于 $\begin{pmatrix}S_1&\\&0\end{pmatrix}$,

由命题 3.8 知 $S_1>0$, 故 $S\geqslant 0$. #

§7.4 相合不变量

Recall $\mathbb{F}$ 为域，$\mathrm{char}\,\mathbb{F}\neq 2$，$S\in S(n,\mathbb{F})$

则 S 相合 $\mathrm{diag}(a_1,\cdots,a_r,0\cdots 0)$

命题4.1 $S\in S(n,\mathbb{C})$，则 S 相合于唯一的规范形 $\Lambda=\begin{pmatrix} I_r & \\ & 0\end{pmatrix}$，其中 $r=\mathrm{rk}\,S$.

定理4.2 $S\in S(n,\mathbb{R})$，则 S 相合于规范形 $\Lambda=\mathrm{diag}(I_p,-I_q,0)$，其中 p,q 由 S 唯一确定.

证一 只须证明 p,q 唯一性. 显然，$p+q=\mathrm{rk}\,S$ 唯一确定.

设 $\begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & 0\end{pmatrix}=P^T\begin{pmatrix} I_s & & \\ & -I_{r-s} & \\ & & 0\end{pmatrix}P$，要证 $p=s$. 用反证法，不妨设 $p>s$.

令 $P=\begin{pmatrix} \overset{p}{P_1} & P_2 \\ P_3 & P_4\end{pmatrix}\}s$ 则 $\exists\, p$ 阶可逆阵 X，使得 $P_1X_1=(P_1',0)$，$P_1'\in\mathbb{R}^{s\times s}$.

设 $P_3X=(P_3',P_3'')$ $P_3'\in\mathbb{R}^{(n-s)\times s}$，$P_3''\in\mathbb{R}^{(n-s)\times(p-s)}$

$$\text{则}\quad P\begin{pmatrix} X & \\ & I_{n-p}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} P_1 & P_2 \\ P_3 & P_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix} X & \\ & I_{n-p}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} P_1' & 0 & P_2 \\ P_3' & P_3'' & P_4\end{pmatrix}$$

$$\text{故}\quad \begin{pmatrix} X^T & \\ & I_{n-p}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} X & \\ & I_{n-p}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} X^TX & & \\ & -I_{n-r} & \\ & & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} P_1'^T & P_3'^T \\ 0 & P_3''^T \\ P_2^T & P_4^T\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_s & & \\ & -I_{r-s} & \\ & & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} P_1' & 0 & P_2 \\ P_3' & P_3'' & P_4\end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$ $P_3''^T\begin{pmatrix} -I_{r-s} & \\ & 0\end{pmatrix}P_3''$ 为 X^TX 的主子方阵

显然，$P_3''^T\begin{pmatrix} -I_{r-s} & \\ & 0\end{pmatrix}P_3''\leq 0$ 而 X^TX 的任一主子阵 >0，矛盾.

证二 令 Q 为 S 相对应的二次型. S 相合于 $\mathrm{diag}(I_p,-I_q,0)$ 等价于存在线性子空间直和分解 $\mathbb{R}^{n\times 1}=V_+\oplus V_-\oplus V_0$，使得 $Q|_{V_+}>0$，$Q|_{V_-}<0$，$Q|_{V_0}=0$，且 $\dim V_+=p$，$\dim V_-=q$.

设有另一分解 $\mathbb{R}^{n\times 1}=W_+\oplus W_-\oplus W_0$，使得 $Q|_{W_+}>0$，$Q|_{W_-}<0$，$Q|_{W_0}=0$. 要证 $\dim W_+=\dim V_+$，$\dim W_-=\dim V_-$.

若 $\dim V_+ \neq \dim W_+$. 不妨设 $\dim W_+ > \dim V_+$. 则

$$\dim W_+ + \dim V_- + \dim V_0 > \dim V_+ + \dim V_- + \dim V_0 = n$$

$\Longrightarrow W_+ \cap (V_- \oplus V_0) \neq \{0\}$

任取 $0 \neq v \in W_+ \cap (V_- \oplus V_0)$

$$\left.\begin{aligned} v\in W_+ &\Rightarrow Q(v) > 0 \\ v \in V_-\oplus V_0 &\Rightarrow Q(v) \le 0 \end{aligned}\right\} \text{矛盾.}$$

\#

定义 4.3　$S \in S(n, \mathbb{R})$ 可惟一相合到 $\mathrm{diag}(I_p, -I_q, 0)$, 其中 p, q 分别称为 S 的正、负 惯性指数

例　求 $Q(x_1, \cdots, x_n) = (x_1-x_2)^2 + (x_2-x_3)^2 + \cdots (x_{n-1}-x_n)^2 + (x_n - x_1)^2$ 的规范形与正负惯性指数.

解　$Q(X) \ge 0$. 且 $Q(X) = 0 \Longleftrightarrow x_1 = x_2 = \cdots = x_n$

故 $Q(X) = 0$ 的解集为 1 维子空间 $\mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{pmatrix}$

故 $Q(X) = X_1^2 + \cdots + X_{n-1}^2$, 正负惯性指数为 $n-1$, 0.

注 · $Q \ge 0$ (或 $Q \le 0$) $\Rightarrow \{v\in V \mid Q(v) = 0\}$ 为线性子空间.

· 反之, 若 $\{v \in V \mid Q(v) = 0\}$ 为线性子空间, 则 $Q \ge 0$ 或 $Q \le 0$.

事实上, 若存在 $0 \neq u, v$ 使得 $Q(u) > 0$, $Q(v) < 0$

令 $f(x) = Q(u + xv)$ 为 $\mathbb{R}^+$ 上连续函数. 且

· $f(0) = 0$

· $f(x) = x^2 Q(v + \frac{u}{x})$, 而 $\lim\limits_{x\to+\infty} Q(v+\frac{u}{x}) < 0$

由中值定理知: $\exists\ a > 0$ 使得 $Q(u + av) = 0$.

同理, $\exists\ b > 0$, 使得 $Q(u + b(-v)) = 0$

显然 $Q(u + av - (u + b(-v))) = (a+b)^2 Q(v) < 0$

故不为线性子空间.

\#

§7.5 例子

例 1 在平面区域 $x\geq 0,\ y\geq 0,\ x+y\leq 2\pi$ 内求函数

$U(x,y) = \sin x + \sin y - \sin(x+y)$ 的极值点

解 · 极值点偏导数 $=0$

· 极大值点 二阶偏导数 <0

小 >0

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \cos x - \cos(x+y) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \cos y - \cos(x+y) = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = \frac{2}{3}\pi$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\sin x + \sin(x+y)\Big|_{x=y=\frac{2}{3}\pi} = -\sqrt{3} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = \sin(x+y)\Big|_{x=y=\frac{2}{3}\pi} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\sin y + \sin(x+y)\Big|_{x=y=\frac{2}{3}\pi} = -\sqrt{3} \end{cases}$$

令 $x = \frac{2}{3}\pi + \xi,\quad y = \frac{2}{3}\pi + \eta$

高次项

$$\Rightarrow U(x,y) = U(\xi,\eta) = \frac{3}{2}\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}(\xi^2 + \xi\eta + \eta^2) + R(\xi,\eta)$$

故 $(\frac{2}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi)$ 为极大值点. ※

注 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 在区域内的点 $c=(c_1,\cdots,c_n)$ 为极大值点

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_i}(c_1,\cdots,c_n) = 0 & \forall\ i=1,\cdots,n \\ \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j < 0 & a_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(c_1,\cdots,c_n) \end{cases}$$

c 为极小值点

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_i}(c_1,\cdots,c_n) = 0 \\ \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j > 0 & a_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(c_1,\cdots,c_n) \end{cases}$$

例 2 $S\in S(n,\mathbb{R}).\ S>0.$ 则 $X^TSX + Y^TS^{-1}Y \geq 2X^TY,$

对 $\forall\ X, Y\in\mathbb{R}^{n\times 1}$ 并求等号成立的条件.

PF $0\leq (X-S^{-1}Y)^TS(X-S^{-1}Y) \leq X^TSX - X^TY - Y^TX + Y^TS^{-1}Y$

$\Rightarrow X^TSY + Y^TS^{-1}Y \geq 2X^TY$. 等号成立 $\Leftrightarrow X = S^{-1}Y$ 或 $Y = SX$.

例3 设 $f(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\sum_{i=1}^{n-1}x_ix_{i+1}$ 在 $x_n=1$ 下最小值

解: $f(x_1,\cdots,x_n)=(x_1-\frac{1}{2}x_2)^2+\frac{3}{4}(x_2-\frac{2}{3}x_3)^2+\cdots+\frac{n}{2(n-1)}(x_{n-1}-\frac{n-1}{n}x_n)^2+\frac{n+1}{2n}x_n^2$

故 $x_k=\frac{k}{k+1}x_{k+1}$, $\forall k=1,\cdots,k-1$

即 $(x_1,\cdots,x_n)=(\frac{1}{n},\frac{2}{n},\cdots,\frac{n-1}{n},\frac{n}{n})$

注. $f(x)=\frac{1}{2}x_1^2+\frac{1}{2}(x_1-x_2)^2+\cdots+\frac{1}{2}(x_{n-1}-x_n)^2+\frac{1}{2}x_n^2$, 但不能给出同次的解.

· 用条件极值可解出同样结果.

例4 $S\in S(n,\mathbb{R})$. 则 S 可逆 $\iff$ $\exists A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 使得 $SA+A^TS>0$.

PF "$\Rightarrow$" S 可逆, 可取 $A=S^{-1}$, 则 $SA+A^TS=2I_n>0$

"$\Leftarrow$" 令 $r=rkS$. 若 $r<n$, 则 $\exists$ $0\neq X$, 使得 $SX=0$

则 $X^T(SA+A^TS)X=0$, 矛盾.

例5 $A\in GL_n(\mathbb{R})$, $K\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $K^T=-K$ 则 $\det(A^TA+K)>0$

PF 首先, $\det(A^TA+\lambda K)\neq0$ $\forall\lambda\in\mathbb{R}$, 否则, 存在 $\lambda_0\in\mathbb{R}$

以及 $0\neq X\in\mathbb{R}^{n\times1}$ 使得 $(A^TA+\lambda_0K)X=0$

$\Rightarrow X^T(A^TA+\lambda_0KX)=0 \Rightarrow X^TA^TAX+\lambda_0X^TKX=0$

而 $(X^TKX)^T=X^TK^TX=-X^TKX \Rightarrow X^TKX=0$

$\Rightarrow X^TA^TAX=0$ 矛盾.

另一方面, $\det A^TA>0$, 由中值定理知 $\det(A^TA+K)>0$.

例6 $P,Q,R\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $P>0$, $Q>0$. 则

$P-R^TQR>0 \iff Q-RP^{-1}R^T>0$

PF 令 $A=\begin{pmatrix}P&R^T\\R&Q\end{pmatrix}$. 则 $\begin{pmatrix}I&-R^TQ^{-1}\\&I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P&R^T\\R&Q\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I&\\-(R^TQ^{-1})^T&I\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P-R^TQ^{-1}R&\\&Q\end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix}I&\\-RP^{-1}&I\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}I&-(RP^{-1})^T\\&I\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P&\\&Q-RQ^{-1}R^T\end{pmatrix}$, 左右均 $\iff A>0$.

例7 (Hadamard 不等式) $A=(a_{ij})_{n\times n}\in GL_n(\mathbb{R})$

则 $|\det A| \le \prod_{i=1}^{n}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2}$，其中"="成立

$\iff \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk}=0 \quad \forall i\ne j$.

PF 令 $S=(S_{ij})_{n\times n}=A^TA$，则问题转化为证明

$S>0 \Rightarrow \det S \le s_{11}s_{22}\cdots s_{nn}$，等号成立 $\iff$ S 为对角阵.

对 n 归纳.

$n=1$ 显然.

$n\ge 2$ 且结论对阶 $\le n-1$ 阶方阵成立.

设 $S=\begin{pmatrix} S_{11} & \alpha \\ \alpha^T & s_{nn}\end{pmatrix}$ $\alpha\in\mathbb{R}^{(n-1)\times 1}$.

则 $\begin{pmatrix} I_{n-1} & \\ -\alpha^T S^{-1} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} S_{11} & \alpha \\ \alpha^T & s_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_{n-1} & -S^{-1}\alpha \\ & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} S_{n-1} & \\ & s_{nn}-\alpha^T S_{n-1}\alpha\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \det S = \det S_{n-1}\cdot(s_{nn}-\alpha^T S_{n-1}\alpha)$$
$$\ge s_{11}\cdots s_{n-1,n-1}\cdot s_{nn}$$

等号成立 $\iff \begin{cases}\det S_{n-1}=s_{11}\cdots s_{n-1,n-1}\\ \alpha^T S_{n-1}\alpha=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S_{n-1} \text{ 为对角阵}\\ \alpha=0\end{cases}$

$\Rightarrow$ S 为对角阵.

注. $|\det A|$ 可以理解为平行多面体的面积，而 $\sqrt{a_{k1}^2+\cdots+a_{kn}^2}$ 可理解为平行多面体边长，等号成立 $\iff$ 平行多面体的边两两垂直.