第 1 章 作业答案

1.1 第二周作业

习题 1.1 (第二章第 2 题)

当 a 为何值时，下列线性方程组有解？有解时求出它的通解.

$$(1)\quad \begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3=2 \\ x_1-x_2-2x_3=-3 \\ ax_1-2x_2+2x_3=6 \end{cases} \qquad (2)\quad \begin{cases} x_1-4x_2+2x_3=-1 \\ -x_1+11x_2-x_3=3 \\ 3x_1-5x_2+7x_3=a \end{cases}$$

解 (1). $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & -3 \\ a & -2 & 2 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[-3r_1\to r_2,-ar_1\to r_3]{r_1\leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 5 & 7 & 11 \\ 0 & a-2 & 2a+2 & 3a+6 \end{pmatrix} \xrightarrow[(2-a)r_2\to r_3]{\frac{1}{5}r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & \frac{7}{5} & \frac{11}{5} \\ 0 & 0 & \frac{3a+24}{5} & \frac{4a+52}{5} \end{pmatrix}.$

故当 $\dfrac{3a+24}{5}=0$且$\dfrac{4a+52}{5}=0$, 或 $\dfrac{3a+24}{5}\neq 0$时, 方程组有解, 易知前者不成立. 故 $\dfrac{3a+24}{5}\neq 0$, 即$a\neq -8$, 此时:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & \frac{7}{5} & \frac{11}{5} \\ 0 & 0 & \frac{3a+24}{5} & \frac{4a+52}{5} \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{7}{5}r_3\to r_2,2r_3\to r_1]{\frac{5}{3a+24}r_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \frac{-a+32}{3a+24} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{a-20}{3a+24} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4a+52}{3a+24} \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2\to r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{a+8} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{a-20}{3a+24} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4a+52}{3a+24} \end{pmatrix}.$$

故方程组的解为 $X=(x_1,x_2,x_3)^T=(\frac{4}{a+8},\frac{a-20}{3a+24},\frac{4a+52}{3a+24})^T$ $(a\neq -8)$.

(2). $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ -1 & 11 & -1 & 3 \\ 3 & -5 & 7 & a \end{pmatrix} \xrightarrow[-3r_1\to r_3]{r_1\to r_2} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 7 & 1 & 2 \\ 0 & 7 & 1 & a+3 \end{pmatrix} \xrightarrow{-r_2\to r_3} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 7 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & a+1 \end{pmatrix}.$

故只有 $a+1=0$ 即 $a=-1$ 时，方程组有解，此时原方程组等价于:

$$\begin{cases} x_1-4x_2+2x_3=-1 \\ 7x_2+x_3=2 \end{cases} \qquad \text{令}x_2=t\text{，解得:} \quad \begin{cases} x_1=18t-5 \\ x_2=t \\ x_3=-7t+2 \end{cases}$$

故方程组的解为 $X=(x_1,x_2,x_3)^T=(18t-5,t,-7t+2)^T$ $(t\in\mathbb{F})$.

习题 1.2 (第二章第 4 题)

求三次多项式 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, 使 $y=f(x)$ 的图象经过以下 4 个点:

$$A(1,2),B(-1,3),C(3,0),D(0,2).$$

解 将四个点代入 $y=f(x)$，可得:

$$\begin{cases} a+b+c+d=2 \\ -a+b-c+d=3 \\ 27a+9b+3c+d=0 \\ d=2 \end{cases} \qquad \text{即} \qquad \begin{cases} a+b+c=0 \\ -a+b-c=1 \\ 27a+9b+3c=-2 \\ d=2 \end{cases}$$

故解以 a,b,c 为未知数的方程组即可

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 27 & 9 & 3 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[-27r_1\to r_3]{r_1\to r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -18 & -24 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{2}r_2,-\frac{1}{24}r_3]{9r_2\to r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{24} \end{pmatrix} \xrightarrow[-r_3\to r_1]{-r_2\to r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{24} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{24} \end{pmatrix}$$

故 $f(x) = -\dfrac{5}{24}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{7}{24}x + 2.$

习题 1.3 (第二章第 5 题)

求三次多项式 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 满足

$$f(0) = 1, f(1) = 2, f'(0) = 1, f'(1) = -1.$$

解 由 $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$，将四个点代入可得:

$$\begin{cases} a+b+c+d=2 \\ 3a+2b+c=-1 \end{cases} \text{及 } c=d=1 \quad \text{即} \quad \begin{cases} a+b=0 \\ 3a+2b=-2 \end{cases} \quad \text{及 } c=d=1$$

故解以 a,b 为未知数的方程组即可，易见 $a=-2, b=2$，故 $f(x) = -2x^3 + 2x^2 + x + 1.$

习题 1.4 (第二章第 7 题)

兽医建议某宠物的食谱每天要包含 100 单位的蛋白质，200 单位的糖，50 单位的脂肪. 某宠物商店出售四种食品 A, B, C, D. 这四种食物每千克含蛋白质、糖、脂肪的含量（单位）如下:

食物	蛋白质	糖	脂肪
A	5	20	2
B	4	25	2
C	7	10	10
D	10	5	6

问是否可以适量配备上述四种食品, 满足兽医的建议.

解 根据题意设配置四种食物 A, B, C, D 的份量分别为 x_1, x_2, x_3, x_4 千克，则考虑如下方程组:

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 10x_4 = 100 \\ 20x_1 + 25x_2 + 10x_3 + 5x_4 = 200 \\ 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 + 6x_4 = 50 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 7 & 10 & 100 \\ 20 & 25 & 10 & 5 & 200 \\ 2 & 2 & 10 & 6 & 50 \end{pmatrix} \xrightarrow[-20r_1\to r_2,-5r_1\to r_3]{r_1\leftrightarrow r_3,\frac{1}{2}r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 3 & 25 \\ 0 & 5 & -90 & -55 & -300 \\ 0 & -1 & -18 & -5 & -25 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2\to r_3]{\frac{1}{5}r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 3 & 25 \\ 0 & 1 & -18 & -11 & -60 \\ 0 & 0 & -36 & -16 & -85 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[18r_3\to r_2,-5r_3\to r_1]{-\frac{1}{36}r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \frac{7}{9} & \frac{475}{36} \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -\frac{35}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{9} & \frac{85}{36} \end{pmatrix} \xrightarrow{-r_2\to r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{34}{9} & \frac{1105}{36} \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -\frac{35}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{9} & \frac{85}{36} \end{pmatrix}.$$

令 $x_4 = t$，代入原方程可解得: $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-\dfrac{34}{9}t + \dfrac{1105}{36}, 3t - \dfrac{35}{2}, -\dfrac{4}{9}t + \dfrac{85}{36}, t)$

而由题意可知 $x_i \geqslant 0, (i = 1, 2, 3, 4)$，故 $t \leqslant \dfrac{1105}{136}, t \geqslant \dfrac{35}{6}, t \leqslant \dfrac{85}{16}, t \geqslant 0$，矛盾，故满足问题的解不存在。