1.5 第七周作业

习题 1.23 (第四章第 7 题 (2)(3)(4)(5))

计算下列方阵的 k 次方幂，k 为正整数.

$$(2)\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \qquad (3)\begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(4)\begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}_{n\times n} \qquad (5)\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix}$$

解 (2) 法一：$a=b=0$ 时，$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}^k = O^k = O$

a,b 不同时为 0 时，$\sqrt{a^2+b^2}\neq 0$，则有

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}^k &= \left(\sqrt{a^2+b^2}\begin{pmatrix} cos\theta & sin\theta \\ -sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}\right)^k \\ &= (a^2+b^2)^{k/2}\begin{pmatrix} cos\theta & sin\theta \\ -sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}^k \\ &= (a^2+b^2)^{k/2}\begin{pmatrix} cosk\theta & sink\theta \\ -sink\theta & cosk\theta \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{1.42}$$

其中 $cos\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, sin\theta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，最后一步用到了旋转矩阵的 k 次幂 (转 k 次 θ 角相当于转一次 $k\theta$ 角)，即习题 7.(1).注意：我们上述的讨论是在 a,b 取实数的情况下进行的，当 a,b 取复数时需要对结果进行解析延拓，扩展到复数域，在此不做赘述。

法二：将矩阵进行拆分：$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = aI + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

则有

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}^k &= (aI+b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix})^k = \sum_{i=0}^{k} C_k^i a^{k-i}b^i\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^i \\ &= \sum_{i=2m}^{0\le i\le k} C_k^i a^{k-i}b^i\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^m + \sum_{i=2n+1}^{1\le i\le k} C_k^i a^{k-i}b^i\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^n \\ &= \begin{pmatrix} \sum\limits_{m=0}^{[\frac{k}{2}]}(-1)^m C_k^{2m}a^{k-2m}b^{2m} & \sum\limits_{n=0}^{[\frac{k-1}{2}]}(-1)^n C_k^{2n+1}a^{k-2n-1}b^{2n+1} \\ -\sum\limits_{n=0}^{[\frac{k-1}{2}]}(-1)^n C_k^{2n+1}a^{k-2n-1}b^{2n+1} & \sum\limits_{m=0}^{[\frac{k}{2}]}(-1)^m C_k^{2m}a^{k-2m}b^{2m} \end{pmatrix}\end{aligned} \tag{1.43}$$

注 将矩阵拆分再按二项式展开计算矩阵幂次需满足拆成的两个矩阵可交换：即令 $A=B+C$，需 $BC=CB$

法三：一般的，求矩阵 k 次幂的通法是进行相似对角化 (不要问我怎么化的，后面会学)：

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a+bi & 0 \\ 0 & a-bi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & -i/2 \\ 1/2 & i/2 \end{pmatrix} \overset{def}{=} A^{-1}BA \tag{1.44}$$

则有

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}^k &= (A^{-1}BA)^k = A^{-1}B^kA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (a+bi)^k & 0 \\ 0 & (a-bi)^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & -i/2 \\ 1/2 & i/2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{(a+bi)^k+(a-bi)^k}{2} & \frac{i(a-bi)^k-i(a+bi)^k}{2} \\ \frac{i(a+bi)^k-i(a-bi)^k}{2} & \frac{(a+bi)^k+(a-bi)^k}{2} \end{pmatrix}\end{aligned} \tag{1.45}$$

(3) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，有 $A^k = \begin{pmatrix} 1 & ka \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，故

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^k &= \begin{pmatrix} A & I \\ O & A \end{pmatrix}^k \\ &= \begin{pmatrix} A^k & kA^{k-1} \\ O & A^k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & ka & k & k(k-1)a \\ 0 & 1 & 0 & k \\ 0 & 0 & 1 & ka \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{1.46}$$

(4) 将矩阵拆为两部分：$\begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}_{n\times n} = I_{n\times n} + J_{n\times n}$，其中 $J_{n\times n} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}_{n\times n}$，满足 $J^k = \begin{cases} \begin{pmatrix} O & I_{n-k} \\ O & O \end{pmatrix} & k < n \\ O & k \geq n \end{cases}$，则由二项式定理：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}^k = (I+J)^k = \sum_{i=0}^{k} C_k^i J^i = \begin{pmatrix} 1 & C_k^1 & C_k^2 & \cdots & C_k^{n-1} \\ & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & C_k^2 \\ & & & \ddots & C_k^1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \tag{1.47}$$

在上式中，我们并没有讨论 k 和 n 的大小关系，而是使用了更广泛的组合数定义 $C_p^q = 0, \forall q > p$ 来使结果简洁.

(5)

$$\text{注意到} \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T(b_1, b_2, \cdots, b_n) \overset{def}{=} AB,$$

且 $BA = (b_1, b_2, \cdots, b_n)(a_1, a_2, \cdots, a_n)^T = \sum\limits_{i=1}^{n} a_ib_i$，有

$$\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix}^k = (AB)^k = ABAB\cdots AB = A(BA)(BA)\cdots(BA)B$$

$$= A(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i)^{k-1}B = (\sum_{i=1}^{n} a_ib_i)^{k-1} \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix}$$

习题 1.24 (第四章第 8 题)

8. 设 A, B 都是 n 阶对称方阵，且 $AB = BA$. 证明 AB 也是对称方阵.

证明 $(AB)^T = B^TA^T = BA = AB$，即 AB 为对称方阵.

习题 1.25 (第四章第 9 题)

证明：两个 n 阶上 (下) 三角方阵的乘积仍是上 (下) 三角.

证明 我们只证上三角阵，下三角阵同理.

设 A, B 为任意两个 n 阶上三角方阵，则 $\forall 1 \leq j < i \leq n$ 有 $A_{ij} = B_{ij} = 0$，令 $C = AB$，则 $\forall 1 \leq j < i \leq n$，有

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=i}^{n} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{i-1} 0 \cdot b_{kj} + \sum_{k=i}^{n} a_{ik} \cdot 0 = 0 \tag{1.48}$$

即 C 为上三角阵.

注 上三角阵的等价表述是其行标大于列标的元素均为 0.

习题 1.26 (第四章第 10 题)

证明：与任意 n 阶方阵都乘法可交换的方阵一定是数量阵.

证明 设 A 为与任意 n 阶方阵均乘法可交换的 n 阶方阵，考虑 A 与矩阵 E_{ij}(表示第 i 行第 j 列元素为 1，其余元素均为 0 的 n 阶方阵) 的乘法，有：

$$AE_{ij} = E_{ij}A \implies a_{ii} = a_{jj}, \quad a_{pi} = a_{jq} = 0 \quad (\forall p \neq i, q \neq j) \tag{1.49}$$

其中 a_{st} 表示矩阵 A 的第 s 行第 t 列元素. 在式 (1.49) 中取 $i = 1$, 令 j 遍历 1 到 n 可得: $a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn}$ 且 $a_{st} = 0 \quad \forall s \neq t$. 即 A 为数量阵.

习题 1.27 (第四章第 17 题)

求所有满足 $A^2 = O, B^2 = I, \overline{C}^T C = I$ 的 2 阶复方阵 A、B、C.

解

(1) 设 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，则由题得到方程组：$a^2 + bc = b(a + d) = c(a + d) = bc + d^2 = 0$， 下面分类讨论：

当 $b=0$ 时 $a=d=0$，c 可取任意复数，此时 $A=\begin{pmatrix}0&0\\c&0\end{pmatrix}$；

当 $b\neq 0$ 时 $a+d=0, bc=-a^2$，此时 $A=\begin{pmatrix}a&b\\-a^2/b&-a\end{pmatrix}$.

(2) 设 $B=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$，则由题得到方程组：$a^2+bc=bc+d^2=1$，$b(a+d)=c(a+d)=0$，　　下面分类讨论：

当 $b=0$ 时，$a=\pm1, d=\pm1$，有 $B=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix}1&0\\c&-1\end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix}-1&0\\c&1\end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$；

当 $b\neq 0$ 时，$a+d=0, c=\frac{1-a^2}{b}$，即 $B=\begin{pmatrix}a&b\\\frac{1-a^2}{b}&-a\end{pmatrix}$.

(3) 由 $\overline{C}^TC=I$ 易知 $C\overline{C}^T=I$. 设 $C=\begin{pmatrix}ae^{i\alpha_1}&be^{i\alpha_2}\\ce^{i\alpha_3}&de^{i\alpha_4}\end{pmatrix}$ 其中 $a,b,c,d\geq 0$ 为模长. 由 $\overline{C}^TC=I$ 及 $C\overline{C}^T=I$ 可得 $a^2+b^2=a^2+c^2=c^2+d^2=b^2+d^2=1$，设 $a=cos\theta\quad(\theta\in[0,\frac{\pi}{2}])$，有 $b=c=sin\theta, d=cos\theta$. 下面分类讨论：

$\theta=0$ 时 $C=\begin{pmatrix}e^{i\alpha_1}&0\\0&e^{i\alpha_4}\end{pmatrix}$，$\theta=\frac{\pi}{2}$ 时 $C=\begin{pmatrix}0&e^{i\alpha_2}\\e^{i\alpha_3}&0\end{pmatrix}$(这两种情况可以合并到第三种的结果里)

$\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时进一步由题有 $e^{i(\alpha_2-\alpha_1)}+e^{i(\alpha_4-\alpha_3)}=0$，得 $\alpha_2=\alpha_1+\alpha_4-\alpha_3-\pi+2k\pi$，故有 $C=\begin{pmatrix}cos\theta e^{i\alpha_1}&-sin\theta e^{i(\alpha_1+\alpha_4-\alpha_3)}\\sin\theta e^{i\alpha_3}&cos\theta e^{i\alpha_4}\end{pmatrix}$，这里将第一行第二列元素的辐角用其他三个角度表示是为了与二阶旋转矩阵形式统一，特别地，当四个辐角均取 0 时 C 即为旋转矩阵.

下面给出丘维声《高等代数》下册对本题的做法：

例 11　求出所有 2 级酉矩阵。

解　设

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$$

是酉矩阵，则 $A^{-1}=A^*$。于是有

$$\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix}a_{22}&-a_{12}\\-a_{21}&a_{11}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\overline{a_{11}}&\overline{a_{21}}\\\overline{a_{12}}&\overline{a_{22}}\end{pmatrix}.$$

由此得出，$a_{22}=|A|\overline{a_{11}}$，　$a_{12}=-|A|\overline{a_{21}}$。

由于 A 的列向量组是 $\mathbf{C}^2$ 的一个标准正交基，因此 $|a_{11}|^2+|a_{21}|^2=1$。从而 $(|a_{11}|,|a_{21}|)$ 是单位圆上的一个点且在第 1 象限或在 x 轴、y 轴的正半轴上，于是存在 $\theta(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2})$，使得 $|a_{11}|=\cos\theta$，$|a_{21}|=\sin\theta$。因此 $a_{11}=\cos\theta\,e^{i\theta_1}$，$a_{21}=\sin\theta\,e^{i\theta_2}$，其中 $0\leqslant\theta_j<2\pi$，$j=1,2$。

据本套教材上册习题 4.6 第 18 题，酉矩阵 A 的行列式的模为 1，因此 $|A|=e^{i\theta_3}$，其中 $0\leqslant\theta_3<2\pi$，于是 $a_{22}=e^{i\theta_3}\cos\theta\,e^{-i\theta_1}$，$a_{12}=-e^{i\theta_3}\sin\theta\,e^{-i\theta_2}$。从而

$$A=\begin{pmatrix}\cos\theta\,e^{i\theta_1}&-\sin\theta\,e^{i\theta_3}e^{-i\theta_2}\\\sin\theta\,e^{i\theta_2}&\cos\theta\,e^{i\theta_3}e^{-i\theta_1}\end{pmatrix}.\tag{71}$$

直接验证知道，形如(71)的矩阵都是酉矩阵。于是(71)式给出了所有的 2 级酉矩阵，其中 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$，$0\leqslant\theta_j<2\pi$，$j=1,2,3$。

可以把(71)式的 A 写成下述形式：

$$A=\begin{pmatrix}e^{-i\theta_2}&0\\0&e^{-i\theta_1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{i(\theta_1+\theta_2)}&0\\0&e^{i\theta_3}\end{pmatrix}.\tag{72}$$

习题 1.28 (第四章第 30 题)

设 A 为 n 阶方阵，且满足 $A^3 = I_n$. 计算 $\begin{pmatrix} O & I_n \\ A & O \end{pmatrix}^{2024}$.

解

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} O & I_n \\ A & O \end{pmatrix}^{2024} &= \left(\begin{pmatrix} O & I_n \\ A & O \end{pmatrix}^2\right)^{1012} \\
&= \begin{pmatrix} A & O \\ O & A \end{pmatrix}^{1012} \\
&= \begin{pmatrix} A & O \\ O & A \end{pmatrix}^{1011} \begin{pmatrix} A & O \\ O & A \end{pmatrix} \\
&= \left(\begin{pmatrix} A & O \\ O & A \end{pmatrix}^3\right)^{337} \begin{pmatrix} A & O \\ O & A \end{pmatrix} \\
&= I_{2n} \begin{pmatrix} A & O \\ O & A \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} A & O \\ O & A \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{1.50}$$