1.6 第八周作业

习题 1.29 (补充题)

设 $A \in \mathbb{F}^{n\times n}, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$

(1) 求：

$$\begin{pmatrix} O & A \\ B & I_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_n & O \\ -B & I_n \end{pmatrix}$$

(2) 试用 (1) 及 Laplace 展开证明 $\det AB = \det A \cdot \det B$.

解 (1) 利用分块矩阵乘法可得：

$$\begin{pmatrix} O & A \\ B & I_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_n & O \\ -B & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -AB & A \\ O & I_n \end{pmatrix}.$$

(2) 对 (1) 中的右式做初等行变换可得（第二列右乘 B 加到第一列）：

$$\begin{vmatrix} -AB & A \\ O & I_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} O & A \\ B & I_n \end{vmatrix}.$$

对前 n 行做 Laplace 展开：$\det(-AB) \cdot \det(I_n) = (-1)^n \cdot \det(A) \cdot \det(B)$，即 $\det AB = \det A \cdot \det B$.

习题 1.30 (补充题)

举例说明存在矩阵 A, B，使得 $\det AB \neq \det BA$. 问：A, B 是否可取为方阵？

解 取 $A = (1,1,1), B = A^T$，则 $AB = 3, BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\det AB = 3 \neq 0 = \det BA$.

A, B 不能取为方阵，否则 A, B 必同阶，则由上题结论，$\det AB = \det A \cdot \det B = \det BA$.

笔记 显然这里的例子是不唯一的，在学习到矩阵的秩后大家就会对这个命题有新的认识了。

习题 1.31 (补充题)

设 $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, 其中 $b_i \neq 0, i = 1, \cdots, n$ $\quad A = \begin{pmatrix} b_1 & & \\ & \ddots & \\ & & b_n \end{pmatrix}$, 求 $\det\left(A - BB^T\right)$.

解 由题，$(BB^T)_{ij} = b_i b_j$，则：

$$\det\left(A - BB^T\right) = \begin{vmatrix} b_1 - b_1^2 & -b_1b_2 & \cdots & -b_1b_n \\ -b_2b_1 & b_2 - b_2^2 & \cdots & -b_2b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -b_nb_1 & -b_nb_2 & \cdots & b_n - b_n^2 \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n}(-b_i) \cdot \begin{vmatrix} b_1 - 1 & b_2 & \cdots & b_n \\ b_1 & b_2 - 1 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n - 1 \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{i=1}^{n}(-b_i) \cdot (-1)^n(1 - \sum_{k=1}^{n} b_k) = (1 - \sum_{k=1}^{n} b_k)\prod_{i=1}^{n} b_i$$

其中第二行的等号用到了习题2.3的结论（再次表明这个类型的行列式很重要）。

或者也可以利用下一题结论，有 $\det\left(A - BB^T\right) = \det(A) \cdot \det\left(I_n - A^{-1}BB^T\right) = \det(A) \cdot \det\left(1 - B^TA^{-1}B\right)$.

习题 1.32 (补充题)

设 $A \in \mathbb{F}^{n\times m}, B \in \mathbb{F}^{m\times n}$，证明：$\lambda^m \det\{(\lambda I_n - AB)\} = \lambda^n \det\{(\lambda I_m - BA)\}$.

证明 $\lambda = 0$ 时，两边均为 0，等式成立，仅考虑 $\lambda \neq 0$ 情形即可。

先证明 $\lambda = 1$ 时等式成立，我们有：

$$\begin{pmatrix} I_m - BA & B \\ O & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m & O \\ A & I_n - AB \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & B \\ O & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & O \\ -A & I_n \end{pmatrix}$$

其实这个拆分就是对分块矩阵做初等变换，两边取行列式可得 $\det\{(I_m - BA)\} = \det\{(I_n - AB)\}$.

则 $\lambda^m|\lambda I_n - AB| = \lambda^m\lambda^n|I_n - \lambda^{-1}AB| = \lambda^n|\lambda I_m||I_m - B\lambda^{-1}A| = \lambda^n|\lambda Im(I_m - \lambda^{-1}BA)| = \lambda^n|\lambda I_m - BA|$.

这就得到了我们要证明的结论。

笔记 这个结论十分重要，并且这个证明的过程使用的技巧是很常用的，所以建议大家记住证明过程。并且这个结论告诉我们 AB 与 BA 有相同的非零特征值。

习题 1.33 (第四章第 13 题)

设方阵 A 满足 $A^k = O$，k 为正整数，证明：$I + A$ 可逆，并求 $(I + A)^{-1}$.

证明 注意这里 k 是一个给定的数，而不是对任意自然数都成立。

取 $B = I + \sum_{i=1}^{k-1}(-A)^i$，则 $(I + A)B = B(I + A) = I + \sum_{i=1}^{k-1}(-A)^i + A - \sum_{i=2}^{k}(-A)^i = I - A + A - (-A)^k = I$.

故 $I + A$ 可逆，且 $(I + A)^{-1} = B = I + \sum_{i=1}^{k-1}(-A)^i$.

那为什么这么取呢？我们可以像几何级数一样对 $(I + A)^{-1}$ 做展开，我们知道 $|x| < 1$ 时，$\frac{1}{1-x} = \sum_{i=0}^{\infty} x^i$.

由此我们猜测 $(I + A)^{-1} = I + \sum_{i=1}^{\infty}(-A)^i$，代入验证会发现这确实是正确的，再结合 $A^k = O$，便得到了 B.

习题 1.34 (第四章第 14 题)

设方阵 A 满足 $I - 2A - 3A^2 + 4A^3 + 5A^4 - 6A^5 = O$，证明：$I - A$ 可逆，并求 $(I - A)^{-1}$.

证明 这其实是个因式分解，由 $2I - 2A - 3A^2 + 4A^3 + 5A^4 - 6A^5 = I$，则 $(I - A)(2I - 3A^2 + A^3 + 6A^4) = I$.

从而 $I - A$ 可逆，且 $(I - A)^{-1} = 2I - 3A^2 + A^3 + 6A^4$.

习题 1.35 (第四章第 18 题)

证明：不存在 n 阶复方阵 A, B 满足 $AB - BA = I_n$.

证明 假设存在，那么 $tr(AB - BA) = tr(I_n) = n$，但是 $tr(AB - BA) = tr(AB) - tr(BA) = 0$，矛盾！

习题 1.36 (第四章第 19 题)

证明：可逆上 (下) 三角、准对角、对称、反对称方阵的逆矩阵仍然分别是上 (下) 三角、准对角、对称、反对称的。

证明 以下均设原可逆方阵为 A，A_{ij} 为 A 的代数余子式，A^* 为 A 的伴随方阵。

(1) 上 (下) 三角：仅考虑上三角，下三角同理。由 $(A^*)_{ij} = A_{ji}$，则 $i > j$ 时，我们证明 $A_{ji} = 0$，利用数学归纳

法，$n=2$ 时显然，假设 $n=k$ 时命题成立，那么 $n=k+1$ 时，取 $(k+1)$ 阶可逆方阵 $A'=\begin{pmatrix} A & \boldsymbol{\alpha} \\ & a \end{pmatrix}, a\neq 0$ 由归纳假设，$j<i\leqslant k$ 时，A'_{ji} 左上角的 $(k-1)$ 阶子式为 A_{ji}，最后一个对角元为 a，最后一行除对角元外为 0，则将 A'_{ji} 按最后一行展开可得 $A'_{ji}=(-1)^{k+1}aA_{ji}=0$，故只需证 $A'_{j,k+1}=0, j=1,2,\cdots,k$，而这是显然的，因为 $A'_{j,k+1}$ 的最后一行全为 0。至此我们得到了 A^* 为上三角阵，故 A^{-1} 也为上三角阵。

(2) 准对角：易知准对角阵每个对角块都是可逆方阵，设 $A=diag(A_1,\cdots,A_k)$，则取 $B=diag(A_1^{-1},\cdots,A_k^{-1})$，代入验证可知 B 即为 A 的逆矩阵，从而也是准对角方阵。

(3) 对称：由 $A=A^T, AA^{-1}=I$，两边取转置得 $(A^{-1})^TA^T=(A^{-1})^TA=I, A^{-1}=(A^{-1})^T$，即 A^{-1} 对称。

(4) 反对称：由 $-A=A^T, AA^{-1}=I$，同 (3) 有 $(A^{-1})^TA^T=-(A^{-1})^TA=I, A^{-1}=-(A^{-1})^T$，即 A^{-1} 反对称。

习题 1.37 (第四章第 22 题)

设 A,B 是 n 阶方阵，λ 是数。证明：

$$(1)\ (\lambda A)^*=\lambda^{n-1}A^*;\quad (2)\ (AB)^*=B^*A^*;\quad (3)\ \det(A^*)=(\det(A))^{n-1}.$$

证明 (1) $(\lambda A)^*$ 的 (i,j) 位置元素为 λA 的 (j,i) 位置元素对应的代数余子式，为一个 $(n-1)$ 阶行列式，故其值为 A_{ji} 的 λ^{n-1} 倍，故有 $(\lambda A)^*=\lambda^{n-1}A^*$.

(2) 若 A,B 均可逆，则 $A^*=|A|A^{-1}, B^*=|B|B^{-1}$，且 AB 也可逆，则 $(AB)^*=|AB|(AB)^{-1}=|A||B|(B^{-1}A^{-1})$ $=(|B|B^{-1})(|A|A^{-1})=B^*A^*$. 而 A,B 中某个方阵不可逆时，考虑方阵 $tI+A, tI+B$，这两个方阵的行列式都是关于 t 的多项式，只有有限个根，那么必存在原点的去心邻域 $M=(-\delta,0)\cup(0,\delta)$ 满足 $\forall t\in M, tI+A, tI+B$ 均可逆，则由可逆情形时结论 $((tI+A)(tI+B))^*=(tI+B)^*(tI+A)^*$，而该式两边均为 n 阶方阵，且其元素都是关于 t 的多项式，从而关于 t 连续，则令 $t\to 0$，得到 $(AB)^*=B^*A^*$.

(3) 若 A 可逆，则 $A^*=|A|A^{-1}$，两边取行列式可得 $|A^*|=|A|^n|A^{-1}|=|A|^{n-1}$. 而 A 不可逆时，同 (2) 理，存在原点的去心邻域 $M=(-\delta,0)\cup(0,\delta)$ 满足 $\forall t\in M, tI+A$ 可逆，则由可逆情形时结论 $|(tI+A)^*|=|tI+A|^{n-1}$. 而上式两边均为关于 t 的多项式，故连续，则令 $t\to 0$，得到 $|A^*|=|A|^{n-1}$，即 $\det(A^*)=(\det(A))^{n-1}$.

笔记 这道题后两问用到的方法称为“微扰法”，当某个命题在矩阵可逆情形下比较容易证明时，往往采用这种办法来推广至一般矩阵，是很多矩阵证明问题里的常用方法。

习题 1.38 (第四章第 25 题)

设 n 阶方阵 A 的每行、每列元素之和都是 0，证明：A^* 的所有元素都相等。

证明 这等价于证明 A 的所有代数余子式 A_{ij} 相等，我们先证明 A 每行对应的代数余子式相等，不妨取第一行。由于 A 的每行元素之和都是 0，我们把 A_{11} 中其余列均加到列指标为 k 的列 $(k=2,\cdots,n)$，可得：

$$A_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2,k-1} & -a_{21} & a_{2,k+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & \cdots & a_{3,k-1} & -a_{31} & a_{3,k+1} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{n,k-1} & -a_{n1} & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{k-2+1}\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,k-1} & a_{2,k+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3,k-1} & a_{3,k+1} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,k-1} & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^{k-1}M_{1k}=A_{1k}.$$

故 A 第一行对应的代数余子式均相等，同理可知对其他行也成立，再由 A 每列元素之和也都是 0，同理可知 A

每列对应的代数余子式也均相等，那么 A 每个元素对应的代数余子式均相等，从而 A^* 的所有元素相等。

习题 1.39 (第四章第 34 题 (1)(4)(5))

计算下列矩阵的逆矩阵

$$(1)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -4 \\ -1 & -3 & -4 & -2 \\ 2 & -1 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & -3 & 2 \end{pmatrix} \quad (4)\begin{pmatrix} & & & A_1 \\ & & A_2 & \\ & \iddots & & \\ A_k & & & \end{pmatrix}, A_i\text{可逆} \quad (5)\begin{pmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1+a_n \end{pmatrix}$$

解 (1) 逆天计算题，但不排除考试考这种题的可能性，只能小心点别算错了。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & -4 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -6 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 12 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 10 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -6 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 14 & -7/3 & -1/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 4 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1/3 & -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 14/3 & -7/9 & -1/9 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 124/3 & -65/9 & 1/9 & 8/3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1/3 & -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 14/3 & -7/9 & -1/9 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -65/372 & 1/372 & 24/372 & 9/372 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 28/93 & 1/93 & 8/31 & 3/31 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1/62 & -21/62 & -4/31 & -3/62 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 7/186 & -23/186 & 1/31 & -7/62 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -65/372 & 1/372 & 24/372 & 9/372 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 49/186 & 25/186 & 7/31 & 13/62 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2/93 & -20/93 & -5/31 & 2/31 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 7/186 & -23/186 & 1/31 & -7/62 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -65/372 & 1/372 & 2/31 & 3/124 \end{pmatrix}.$$

(4) 观察原矩阵形式，直接取 $B = \begin{pmatrix} & & & A_k^{-1} \\ & & A_{k-1}^{-1} & \\ & \iddots & & \\ A_1^{-1} & & & \end{pmatrix}$，代入验证知 B 即为原矩阵的逆矩阵。

(5) 先证明这样一个引理：

引理 1.1 (Sherman-Morrison 公式)

设 A 是 n 阶可逆阵，$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 是 n 维列向量，且 $1+\boldsymbol{\beta}^TA^{-1}\boldsymbol{\alpha}\neq 0$，则有：

$$(A+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{1}{1+\boldsymbol{\beta}^TA^{-1}\boldsymbol{\alpha}}A^{-1}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^TA^{-1}.$$

证明 直接计算可得：

$$\begin{aligned}
&(A+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T)\left(A^{-1}-\frac{1}{1+\boldsymbol{\beta}^TA^{-1}\boldsymbol{\alpha}}A^{-1}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^TA^{-1}\right)\\
=&I+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^TA^{-1}-\frac{1}{1+\boldsymbol{\beta}^TA^{-1}\boldsymbol{\alpha}}AA^{-1}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^TA^{-1}-\frac{1}{1+\boldsymbol{\beta}^TA^{-1}\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^TA^{-1}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^TA^{-1}\\
=&I+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^TA^{-1}-\frac{1}{1+\boldsymbol{\beta}^TA^{-1}\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^TA^{-1}-\frac{\boldsymbol{\beta}^TA^{-1}\boldsymbol{\alpha}}{1+\boldsymbol{\beta}^TA^{-1}\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^TA^{-1}\\
=&I+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^TA^{-1}-\frac{1+\boldsymbol{\beta}^TA^{-1}\boldsymbol{\alpha}}{1+\boldsymbol{\beta}^TA^{-1}\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^TA^{-1}=I.\quad \text{从而引理得证。}
\end{aligned}$$

接下来回到原题，利用习题2.3的结论先计算该矩阵行列式：

$$\begin{vmatrix}1+a_1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1+a_2 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 1\\ 1 & \cdots & 1 & 1+a_n\end{vmatrix}=\prod_{i=1}^n a_i+\sum_{k=1}^n\left(\prod_{i\neq k}a_i\right)\neq 0\ \text{时}$$

原矩阵可逆，以下我们均假设此条件成立，容易看出此时 a_i 中至多有一个为 0。

(I) $a_i\neq 0\ (i=1,2,\cdots,n)$ 时：

$$\text{令 } A=\begin{pmatrix}a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\1\\ \vdots\\1\end{pmatrix},\ \text{则}\begin{pmatrix}1+a_1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1+a_2 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 1\\ 1 & \cdots & 1 & 1+a_n\end{pmatrix}=A+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T$$

此时 A 是 n 阶可逆方阵，且容易算得：

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}a_1^{-1} & & & \\ & a_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n^{-1}\end{pmatrix},1+\boldsymbol{\beta}^TA^{-1}\boldsymbol{\alpha}=1+\sum_{i=1}^n a_i^{-1}$$

$$A^{-1}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^TA^{-1}=\begin{pmatrix}a_1^{-2} & a_1^{-1}a_2^{-1} & \cdots & a_1^{-1}a_n^{-1}\\ a_2^{-1}a_1^{-1} & a_2^{-2} & \cdots & a_2^{-1}a_n^{-1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_n^{-1}a_1^{-1} & a_n^{-1}a_2^{-1} & \cdots & a_n^{-2}\end{pmatrix}$$

那么由引理1.1，原矩阵的逆矩阵为：

$$(A+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T)^{-1}=A^{-1}-\frac{1}{1+\boldsymbol{\beta}^TA^{-1}\alpha}A^{-1}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^TA^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}a_1^{-1} & & & \\ & a_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n^{-1}\end{pmatrix}-\frac{1}{1+\sum\limits_{i=1}^n a_i^{-1}}\begin{pmatrix}a_1^{-2} & a_1^{-1}a_2^{-1} & \cdots & a_1^{-1}a_n^{-1}\\ a_2^{-1}a_1^{-1} & a_2^{-2} & \cdots & a_2^{-1}a_n^{-1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_n^{-1}a_1^{-1} & a_n^{-1}a_2^{-1} & \cdots & a_n^{-2}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a_1^{-1}-sa_1^{-2} & -sa_1^{-1}a_2^{-1} & \cdots & -sa_1^{-1}a_n^{-1}\\ -sa_2^{-1}a_1^{-1} & a_2^{-1}-sa_2^{-2} & \cdots & -sa_2^{-1}a_n^{-1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -sa_n^{-1}a_1^{-1} & -sa_n^{-1}a_2^{-1} & \cdots & a_n^{-1}-sa_n^{-2}\end{pmatrix},\text{其中 } s=\frac{1}{1+\sum\limits_{i=1}^n a_i^{-1}}.$$

(II) $\exists j, a_j = 0, a_i \neq 0\ (i \neq j)$ 时：

$$\text{取} a_j = \varepsilon \to 0\text{，则} \lim_{\varepsilon\to 0} s = 0,\ \lim_{\varepsilon\to 0}(a_i^{-1} - sa_i^{-2}) = a_i^{-1}\ (i \neq j),\ \lim_{\varepsilon\to 0}(-sa_i^{-1}a_k^{-1}) = 0\ (i, k \neq j)$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{s}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{s}{a_j} = 1,\ \Longrightarrow\ \lim_{\varepsilon\to 0}(-sa_i^{-1}a_j^{-1}) = -\frac{1}{a_i}\ (i \neq j)$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(a_j^{-1} - sa_j^{-2}) \xrightarrow{t=s-\frac{1}{a_j}}= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{a_j} - \frac{1}{\left(t+\frac{1}{a_j}\right)a_j^2}\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{ta_j}{a_j(ta_j+1)} = t = 1 + \sum_{i\neq j} a_i^{-1}.$$

$$\text{综上}\ (A + \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T)^{-1} = \begin{pmatrix} a_1^{-1} & & & -a_1^{-1} & & & \\ & \ddots & & \vdots & & & \\ & & a_{j-1}^{-1} & -a_{j-1}^{-1} & & & \\ -a_1^{-1} & \cdots & -a_{j-1}^{-1} & t & -a_{j+1}^{-1} & \cdots & -a_n^{-1} \\ & & & -a_{j+1}^{-1} & a_{j+1}^{-1} & & \\ & & & \vdots & & \ddots & \\ & & & -a_n^{-1} & & & a_n^{-1} \end{pmatrix}\text{，其中} t = 1 + \sum_{i\neq j} a_i^{-1}.$$