1.7 第九周作业

习题 1.40 (第四章第 37 题)

设 A 是 n 阶可逆方阵，a,b 为 n 维列向量. 证明：$A+ab^T$ 可逆当且仅当 $1+b^TA^{-1}a\neq 0$. 且 $A+ab^T$ 可逆时，$(A+ab^T)^{-1}=A^{-1}-\dfrac{A^{-1}ab^TA^{-1}}{1+b^TA^{-1}a}$.

证明 (1) 先证 $A+ab^T$ 可逆 $\iff 1+b^TA^{-1}a\neq 0$.

$$\begin{aligned} A+ab^T \text{ 可逆 } &\iff det(A+ab^T)\neq 0\\ &\iff det(A)det(I+A^{-1}ab^T)\neq 0\\ &\iff det(I+A^{-1}ab^T)\neq 0\end{aligned}$$

注意到 $det(I_m-PQ)=det(I_n-QP)$，则有 $det(I+A^{-1}ab^T)=det(1+b^TA^{-1}a)$

故 $A+ab^T$ 可逆 $\iff 1+b^TA^{-1}a\neq 0$.

(2) 再求 $A+ab^T$ 的逆.

对这种验证类的题目，可以直接把题目给的结果代入验证，这里不再赘述. 下面给出直接求逆的方法.

$(A+ab^T)^{-1}=(A(I+A^{-1}ab^T))^{-1}=(I+A^{-1}ab^T)^{-1}A^{-1}\overset{def}{=}BA^{-1}$

则有

$$(I+A^{-1}ab^T)B=I\to B+A^{-1}ab^TB=I \tag{1.51}$$

两边同时左乘 $A^{-1}ab^T$ 得

$$\begin{aligned} &A^{-1}ab^TB+A^{-1}ab^TA^{-1}ab^TB=A^{-1}ab^T\to A^{-1}ab^TB+A^{-1}a(b^TA^{-1}a)b^TB=A^{-1}ab^T\\ &\to(1+b^TA^{-1}a)A^{-1}ab^TB=A^{-1}ab^T\to A^{-1}ab^TB=\frac{A^{-1}ab^T}{1+b^TA^{-1}a}\end{aligned} \tag{1.52}$$

上式利用了 $b^TA^{-1}a$ 是数，可以随意交换位置

带回式 (1.51) 得 $B=I-\dfrac{A^{-1}ab^T}{1+b^TA^{-1}a}$，即 $(A+ab^T)^{-1}=BA^{-1}=A^{-1}-\dfrac{A^{-1}ab^TA^{-1}}{1+b^TA^{-1}a}$.

习题 1.41 (第四章第 38 题)

设 $A\in F^{m\times m},B\in F^{n\times n},C\in F^{n\times m}$, 且 A 为对称可逆方阵. 证明：存在可逆方阵 P 使得

$$P\begin{pmatrix}A & C^T\\ C & B\end{pmatrix}P^T \text{为准对角阵.}$$

证明 利用 Schur 公式 $\begin{pmatrix}I & \\ -CA^{-1} & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I & -A^{-1}B\\ & I\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A & \\ & D-CA^{-1}B\end{pmatrix}$ 进行对角化：

$$\begin{pmatrix}I & \\ -CA^{-1} & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & C^T\\ C & B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I & -A^{-1}C^T\\ & I\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A & \\ & B-CA^{-1}C^T\end{pmatrix} \tag{1.53}$$

易见左式最左边的矩阵即为满足要求的 P：

$det(P)=det(\begin{pmatrix}I & \\ -CA^{-1} & I\end{pmatrix})=1$，故可逆；

$P^T=\begin{pmatrix}I & \\ -CA^{-1} & I\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}I & (-CA^{-1})^T\\ & I\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I & -A^{-1}C^T\\ & I\end{pmatrix}$.

习题 1.42 (第四章第 40 题 (1)(3))

计算下列矩阵的秩. (1) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 9 \\ -2 & 1 & -4 & 2 \\ -1 & -2 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 & 9 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 9 & 16 & 25 & 36 \\ 16 & 25 & 36 & 49 \end{pmatrix}$

解 (1) 进行初等变换：

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 9 \\ -2 & 1 & -4 & 2 \\ -1 & -2 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 & 9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 7/3 & -14/3 & 8 \\ -1 & -2 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 & 9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 7/3 & -14/3 & 8 \\ 0 & -4/3 & 8/3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 9 \end{pmatrix}$$
$$\to \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 7/3 & -14/3 & 8 \\ 0 & -4/3 & 8/3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 7/3 & -14/3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 39/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.54}$$

经变换后的矩阵行列式为 0，且容易找到一个非零三阶子式：取第 1、2、3 行和第 1、2、4 列，故矩阵秩为 3

其实也可以直接从原矩阵出发：观察易知第一行和第四行相等，故其行列式为 0，再找到一个非零三阶子式即可说明秩为 3

但进行一定程度的初等变换可以让我们更容易地找到非零子式：找对角元均非零的上三角子式即可.

(2) 进行初等变换：(一般步骤应遵循高斯消元法的过程，由本题的特殊结构给出一种更简单的变换方法)

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 9 & 16 & 25 & 36 \\ 16 & 25 & 36 & 49 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{依次减去上一行}} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 11 \\ 7 & 9 & 11 & 13 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\to \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 8 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.55}$$

化简后的矩阵行列式为 0，容易找到其左上角的三阶子式不为零，故秩为 3.

习题 1.43 (第四章第 41 题)

对于 a, b 的各种取值，讨论实矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & a \\ 3 & b & 9 \end{pmatrix}$ 的秩.

解 进行初等变换：

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & a \\ 3 & b & 9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & a-6 \\ 0 & b-6 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.56}$$

对 a,b 的取值进行讨论如下：

(1) a,b 均不为 6 时，秩为 3；(2) a,b 有一个 6 时，秩为 2；(3) a,b 均为 6 时，秩为 1.

习题 1.44 (第四章第 42 题)

设 A 为 n 阶方阵，且 $A^2=I$. 求方阵 $diag(I+A, I-A)$ 的相抵标准型.

解 进行分块初等变换：

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} I+A & \\ O & I-A\end{pmatrix} &\to \begin{pmatrix} I+A & O \\ I+A & I-A\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} I+A & O \\ 2I & I-A\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} O & (I+A)(I-A)/2 \\ 2I & I-A\end{pmatrix} \\ &\to \begin{pmatrix} O & (I-A^2)/2 \\ 2I & I-A\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} O & O \\ 2I & I-A\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} O & O \\ 2I & O\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} I_n & O \\ O & O\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{1.57}$$

即相抵标准型为 $\begin{pmatrix} I_n & O \\ O & O\end{pmatrix}$

注 相抵标准型要和原矩阵大小相同，有的同学这道题直接写的 I_n，这是不正确的.

习题 1.45 (第四章第 46 题)

设 n 阶方阵 A 满足 $A^2=I$, 证明：$rank(I+A)+rank(I-A)=n$.

证明 法一：由 $rank(A)+rank(B)=rank(diag(A,B))$ 知本题与 42 题等价.

法二：利用秩不等式：(1) $rank(I+A)+rank(I-A)\geq rank((I+A)+(I-A))=n$

(2) 由 Sylvester 不等式：$rank(I+A)+rank(I-A)\leq rank((I+A)(I-A))+n=rank(O)+n=n$
综合 (1)(2) 知命题成立.

习题 1.46 (第五章第 1 题)

设 $\boldsymbol{a}_1=(1,2,-1), \boldsymbol{a}_2=(2,0,3), \boldsymbol{a}_3=(2,1,0)$ 是三维几何空间中的三个向量. 能否将其中某一个向量写成其它两个向量的线性组合? 这三个向量是否共面?

解 注意到

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0\end{vmatrix} = 7 \neq 0.$$

故向量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ 线性无关，因此其中任一向量不能表示为其它两个向量的线性组合，进而这三个向量不共面.

习题 1.47 (第五章第 3 题)

在 $\mathbb{F}^4$ 中，判断向量 $\boldsymbol{b}$ 能否写成 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ 的线性组合. 若能，写出一种表达方式.

(1) $\boldsymbol{a}_1=(-1,3,0,-5), \boldsymbol{a}_2=(2,0,7,-3), \boldsymbol{a}_3=(-4,1,-2,6), \boldsymbol{b}=(8,3,-1,-25)$.

(2) $\boldsymbol{a}_1=(3,-5,2,-4)^T, \boldsymbol{a}_2=(-1,7,-3,6)^T, \boldsymbol{a}_3=(3,11,-5,10)^T, \boldsymbol{b}=(2,-30,13,-26)^T$.

解 (1) 这个问题等价于线性方程组 $x_1\alpha_1^T+x_2\alpha_2^T+x_3\alpha_3^T=b^T$ 是否有解，若有解，给出一组解. 考虑增广矩阵

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 & 8 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & -2 & -1 \\ -5 & -3 & 6 & -25\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -8 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

解得 $(x_1,x_2,x_3)=(2,-1,-3)$, 故 $b=2\alpha_1-\alpha_2-3\alpha_3$.

(2) 类似于 (1) 考虑线性方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=b$. 对增广矩阵作初等变换

$$\begin{pmatrix}3&-1&3&2\\-5&7&11&-30\\2&-3&-5&13\\-4&4&10&-26\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&2&8&-11\\0&17&51&-85\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

解得 $(x_1,x_2,x_3)=(-3,-8,1)$, 故 $b=-3\alpha_1-8\alpha_2+\alpha_3$.

习题 1.48 (第五章第 4 题)

设 $\boldsymbol{a}_1=(1,0,0,0),\boldsymbol{a}_2=(1,1,0,0),\boldsymbol{a}_3=(1,1,1,0),\boldsymbol{a}_4=(1,1,1,1,1)$. 证明：$\mathbb{F}^4$ 中任何向量可以写成 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4$ 的线性组合，且表示唯一.

证明 对任意向量 $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3,b_4)\in\mathbb{F}^4$, 考虑线性方程组 $x_1\alpha_1^T+x_2\alpha_2^T+x_3\alpha_3^T+x_4\alpha_4^T=b^T$. 原问题等价于此线性方程组对任意向量 $\boldsymbol{b}$ 是否存在解，且解唯一. 注意到系数矩阵

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

非退化，由 *Cramer* 法则知该线性方程组存在唯一解.

习题 1.49 (第五章第 5 题)

设 $\boldsymbol{P}_i=(x_i,y_i,z_i),i=1,2,3,4$ 是三维几何空间中的点. 证明：$\boldsymbol{P}_i,i=1,2,3,4$ 共面的条件是

$$\begin{vmatrix}x_1&y_1&z_1&1\\x_2&y_2&z_2&1\\x_3&y_3&z_3&1\\x_4&y_4&z_4&1\end{vmatrix}=0.$$

证明 $\boldsymbol{P}_i,i=1,2,3,4$ 共面等价于 $\overrightarrow{P_1P_2},\overrightarrow{P_1P_3},\overrightarrow{P_1P_4}$ 线性相关，也等价于行列式

$$\begin{vmatrix}x_2-x_1&y_2-y_1&z_2-z_1\\x_3-x_1&y_3-y_1&z_3-z_1\\x_4-x_1&y_4-y_1&z_4-z_1\end{vmatrix}=0.$$

即等价于行列式

$$\begin{vmatrix}x_1&y_1&z_1&1\\x_2&y_2&z_2&1\\x_3&y_3&z_3&1\\x_4&y_4&z_4&1\end{vmatrix}=0.$$

习题 1.50 (第五章第 7 题)

设 $b_1,b_2,\cdots,b_s$ 中的每一个向量是 n 维向量 $a_1,a_2,\cdots,a_r$ 的线性组合. 证明：$b_1,b_2,\cdots,b_s$ 的任何线性组合都是 $a_1,a_2,\cdots,a_r$ 的线性组合.

证明 由于 $b_1,b_2,\cdots,b_s$ 中的每一个向量是 n 维向量 $a_1,a_2,\cdots,a_r$ 的线性组合，可假设

$$(b_1,b_2,\cdots,b_s)=(a_1,a_2,\cdots,a_r)A,\text{其中}A\in\mathbb{F}^{r\times s}.\quad\text{于是：}$$

$k_1b_1+\cdots+k_sb_s=(b_1,b_2,\cdots,b_s)(k_1,k_2,\cdots,k_s)^T=(a_1,a_2,\cdots,a_r)A(k_1,k_2,\cdots,k_s)^T$, 其中$k_i\in\mathbb{F},\forall i=1,\cdots,s$.

故 $b_1,b_2,\cdots,b_s$ 的任何线性组合都是 $a_1,a_2,\cdots,a_r$ 的线性组合.

习题 1.51 (第五章第 9 题)

判别下列线性方程组是否线性相关

$$(1)\begin{cases}-x_1+2x_2+3x_3=4\\5x_1-x_3=-1\\8x_1-6x_2-10x_3=-13\end{cases}\qquad(2)\begin{cases}2x_1+3x_2+x_3+5x_4=2\\3x_1+2x_2+4x_3+2x_4=3\\x_1+x_2+2x_3+4x_4=1\end{cases}$$

解 (1) 对线性方程组的增广矩阵作如下初等变换

$$\begin{pmatrix}-1&2&3&4\\5&0&-1&-1\\8&-6&-10&-13\end{pmatrix}\xrightarrow{5r_1+r_2,8r_1+r_3}\begin{pmatrix}-1&2&3&4\\0&10&14&19\\0&10&14&19\end{pmatrix}.$$

因此 $5r_1+r_2=8r_1+r_3$, 进而 $r_2=3r_1+r_3$.

(2) 注意到系数矩阵之子式

$$\begin{pmatrix}2&3&1\\3&2&4\\1&1&2\end{pmatrix}$$

的行列式不为零，系数矩阵秩为 3，因此线性无关.

习题 1.52 (第五章第 10 题 (1)(4))

判断下列向量组是否线性相关

(1) $a_1=(1,1,1),a_2=(1,-2,3),a_3=(1,4,9)$;

(4) $a_1=(1,-1,0,0),a_2=(0,1,-1,0),a_3=(0,0,1,-1),a_4=(-1,0,0,1)$.

解 (1) 考虑行列式

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\1&-2&3\\1&4&9\end{vmatrix}=-30\neq 0.$$

故 a_1,a_2,a_3 线性无关.

(4) 考虑行列式

$$\begin{vmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\-1&0&0&1\end{vmatrix}=0.$$

故 a_1,a_2,a_3,a_4 线性相关.

习题 1.53 (第五章第 11 题)

证明：任何一个经过以下两个平面

$$\pi_1:A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\pi_2:A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

交线的平面的方程能写成:

$$\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0.$$

其中 λ,μ 为不全为零的常数.

证明 设 π_1,π_2 所确定的直线为 l,$\pi: Ax+By+Cz+D=0$ 为经过 l 的平面方程. 故方程组

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}\tag{1.58}$$

与

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\\Ax+By+Cz+D=0\end{cases}\tag{1.59}$$

同解,故 (A,B,C,D) 可由 $(A_1,B_1,C_1,D_1),(A_2,B_2,C_2,D_2)$ 线性表出. 即存在常数 λ,μ, 使得 $Ax+By+Cz+D=\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)$. 故平面 π 的方程即为 $\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$.

注 我们对上述证明中“(A,B,C,D) 可由 $(A_1,B_1,C_1,D_1),(A_2,B_2,C_2,D_2)$ 线性表出”作详细解释:
注意到 A_1,B_1,C_1 不全为 0,不妨假设 $A_1\neq 0$,考虑方程组 (1.1) 的增广矩阵,

$$\begin{pmatrix}A_1&B_1&C_1&-D_1\\A_2&B_2&C_2&-D_2\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}A_1&B_1&C_1&-D_1\\0&B_2-\frac{B_1}{A_1}&C_2-\frac{C_1}{A_1}&-D_2+\frac{D_1}{A_1}\end{pmatrix}$$

注意到 $B_2-\frac{B_1}{A_1}$ 与 $C_2-\frac{C_1}{A_1}$ 不能同时为 0. 若同时为 0,当 $-D_2+\frac{D_1}{A_1}=0$ 时,则平面 π_1,π_2 重合;当 $-D_2+\frac{D_1}{A_1}\neq 0$ 时,则方程组 (1.1) 无解,即平面 π_1,π_2 无交 (与交为直线,无数组解相矛盾!). 记 $B_2'=B_2-\frac{B_1}{A_1},C_2'=C_2-\frac{C_1}{A_1},-D_2'=-D_2+\frac{D_1}{A_1}$. 不妨假设 $B_2'\neq 0$, 考虑方程组 (1.2) 的增广矩阵

$$\begin{pmatrix}A_1&B_1&C_1&-D_1\\A_2&B_2&C_2&-D_2\\A&B&C&-D\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}A_1&B_1&C_1&-D_1\\0&B_2'&C_2'&-D_2'\\A&B&C&-D\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{利用第一行第二行消去第三行前两列元素}}\begin{pmatrix}A_1&B_1&C_1&-D_1\\0&B_2'&C_2'&-D_2'\\0&0&C'&-D'\end{pmatrix}$$

由于方程组 (1.1) 与 (1.2) 同解,又方程组 (1.1) 有无数组解,故方程组 (1.2) 也有无数解,因此 $C'=0$(注意,若 $C'\neq 0$, 根据 *Cramer* 法则,方程组 (1.2) 的解存在且唯一,矛盾!). 若 $D'\neq 0$, 则 (1.2) 无解. 综上,$C'=0$ 且 $D'=0$. 即 $(A,B,C,-D)$ 可由 $(A_1,B_1,C_1,-D_1),(A_2,B_2,C_2,-D_2)$ 线性表出,也即 (A,B,C,D) 可由 $(A_1,B_1,C_1,D_1),(A_2,B_2,C_2,D_2)$ 线性表出.

习题 1.54 (第五章第 12 题)

下列说法是否正确?为什么?(1) 若 $a_1,a_2,\cdots,a_s(s\geq 2)$ 线性相关,则其中每一个向量都可以表示成其他向量的线性组合.
(2) 如果向量组的任何不是它本身的子向量组都线性无关,则该向量组也线性无关.
(3) 若向量组线性无关,则它的任何子向量组都线性无关.
(4)$\mathbb{F}^{n\times n}$ 的 $n+1$ 个向量组成的向量组必线性相关.
(5) 设 $a_1,a_2,\cdots,a_s$ 线性无关,则 $a_1+a_2,a_2+a_3,\cdots,a_s+a_1$ 必线性无关.
(6) 设 $a_1,a_2,\cdots,a_s$ 线性相关,则 $a_1+a_2,a_2+a_3,\cdots,a_s+a_1$ 必线性相关.
(7) 设 $a_1,a_2,\cdots,a_s\in\mathbb{F}^n$ 线性无关,则它们的加长向量组也必线性无关.
(8) 设 $a_1,a_2,\cdots,a_s\in\mathbb{F}^n$ 线性相关,则它们的加长向量组也必线性相关.

解 (1) 不正确,可以考虑向量组 $a_1,a_2,\cdots,a_s$ 中的极大无关组.

(2) 不正确，考虑 $(1,0)^T$ 与 $(2,0)^T$.

(3) 正确. 其逆否命题为“若存在一组子向量组线性相关，则该向量组线性相关”.

(4) 正确，含有 $n+1$ 个未定元的 n 个线性方程组必有非零解.

(5) 不正确，考虑 $s=2$ 时的情况.

(6) 正确，由教材定理 5.3.5 中第 3 条，知 $rank(a_1+a_2, a_2+a_3, \cdots, a_s+a_1) \le rank(a_1, a_2, \cdots, a_s) < s$.

(7) 正确，考虑线性方程组，注意到加长向量组相当于添加了更多的线性方程. 其逆否命题为“若加长向量组线性相关，则本身一定线性相关”.

(8) 不正确，考虑考虑向量组 $(1), (-1)$ 与其加长版本 $(1,0)^T, (-1,1)^T$.

习题 1.55 (第五章第 17 题)

设向量组 $a_1, a_2, \cdots, a_r$ 线性无关，且 $a_1, a_2, \cdots, a_r$ 可由向量组 $b_1, b_2, \cdots, b_r$ 线性表示，则 $b_1, b_2, \cdots, b_r$ 也线性无关.

证明 由教材定理 5.3.5 中第 3 条知向量组 $a_1, a_2, \cdots, a_r$ 的极大无关组个数小于等于向量组 $b_1, b_2, \cdots, b_r$ 的极大无关组个数. 再由向量组 $a_1, a_2, \cdots, a_r$ 线性无关，知向量组 $b_1, b_2, \cdots, b_r$ 也线性无关.