1.8 第十周作业

习题 1.56 (第五章第 19 题)

求下列向量组的极大无关组与秩：

(1) $\boldsymbol{a}_1=(3,-2,0)$, $\boldsymbol{a}_2=(27,-18,0)$, $\boldsymbol{a}_3=(-1,5,8)$.

(2) $\boldsymbol{a}_1=(1,-1,2,4)$, $\boldsymbol{a}_2=(0,3,1,2)$, $\boldsymbol{a}_3=(3,0,7,14)$, $\boldsymbol{a}_4=(1,-1,2,0)$, $\boldsymbol{a}_5=(2,1,5,6)$.

(3) $\boldsymbol{a}_1=(0,1,2,3)$, $\boldsymbol{a}_2=(1,2,3,4)$, $\boldsymbol{a}_3=(3,4,5,6)$, $\boldsymbol{a}_4=(4,3,2,1)$, $\boldsymbol{a}_5=(6,5,4,3)$.

解 (1) 假设 $k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2+k_3\boldsymbol{a}_3=0$，其系数矩阵为：

$$\begin{pmatrix}3&27&-1\\-2&-18&5\\0&0&8\end{pmatrix}\text{进行初等行变换，得}\begin{pmatrix}1&9&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

则 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 秩为 2，且有 $\boldsymbol{a}_2=9\boldsymbol{a}_1$，则 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_3$ 或 $\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 构成向量组的极大无关组。

(2) 假设 $k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2+k_3\boldsymbol{a}_3+k_4\boldsymbol{a}_4+k_5\boldsymbol{a}_5=0$，其系数矩阵为：

$$\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\-1&3&0&-1&1\\2&1&7&2&5\\4&2&14&0&6\end{pmatrix}\text{进行初等行变换，得}\begin{pmatrix}1&0&3&0&1\\0&1&1&0&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

则 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4,\boldsymbol{a}_5$ 秩为 3，且 $\boldsymbol{a}_3=3\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_5=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_4$，则 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_4$ 可构成向量组的极大无关组。

(3) 假设 $k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2+k_3\boldsymbol{a}_3+k_4\boldsymbol{a}_4+k_5\boldsymbol{a}_5=0$，其系数矩阵为：

$$\begin{pmatrix}0&1&3&4&6\\1&2&4&3&5\\2&3&5&2&4\\3&4&6&1&3\end{pmatrix}\text{进行初等行变换，得}\begin{pmatrix}1&1&1&-1&-1\\0&1&3&4&6\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

则 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4,\boldsymbol{a}_5$ 秩为 2，且五个向量中任意两个都线性无关，故任意两个向量均可构成向量组的极大无关组。

习题 1.57 (第五章第 25 题)

求下列矩阵的秩，并求出它的行空间、列空间及零空间的一组基。

$$(1)\ \begin{pmatrix}3&-2&0&1\\-1&-3&2&0\\2&0&-4&5\\4&1&-2&1\end{pmatrix}\qquad(2)\ \begin{pmatrix}3&6&1&5\\1&4&-1&3\\-1&-10&5&-7\\4&-2&8&0\end{pmatrix}$$

解 在两问中均记矩阵为 A，其四个行向量为 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4$，四个列向量为 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3,\boldsymbol{b}_4$

(1) 进行初等行变换（不交换行）得：$\begin{pmatrix}0&5&-6&4\\1&3&-2&0\\0&-6&0&5\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，矩阵秩为 3，则 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 可作为行空间的一组基。

进行初等列变换（不交换列）得：$\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&-1&1\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_3,\boldsymbol{b}_4$ 可作为列空间的一组基。

利用行变换后的结果可得 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解集为 $(8,30,49,36)^Tt, t\in\mathbb{R}$，则 $(8,30,49,36)^T$ 可作为零空间的一组基。

(2) 进行初等行变换（不交换行）得：$\begin{pmatrix}0&3&-2&2\\1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，矩阵秩为 2，则 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ 可作为行空间的一组基。

进行初等列变换（不交换列）得：$\begin{pmatrix}0&0&1&0\\-1&0&0&0\\4&0&1&0\\5&0&3&0\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_3$ 可作为列空间的一组基。

利用行变换后的结果可得 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解集为 $(-5,2,3,0)^Tt+(-1,-2,0,3)^Ts$，其中 $t,s\in\mathbb{R}$，则 $(-5,2,3,0)^T$ 与 $(-1,-2,0,3)^T$ 可作为零空间的一组基。

习题 1.58 (第五章第 28 题)

证明：n 阶方阵 A 可逆 $\iff \operatorname{rank}(A)=n \iff A$ 的行向量线性无关 $\iff A$ 的列向量线性无关

证明 n 阶方阵 A 可逆 $\iff \det(A)\neq 0 \iff \operatorname{rank}(A)=n$，同时由于矩阵的秩 $=$ 行秩 $=$ 列秩，则 $\operatorname{rank}(A)=n \iff A$ 的行向量线性无关 $\iff A$ 的列向量线性无关，命题得证。

习题 1.59 (第五章第 29 题)

设矩阵 $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$ 的秩为 r，则 A 的不等于零的 r 阶子式所在行 (列) 构成 A 的行 (列) 向量的极大无关组。

证明 由对称性，仅考虑行向量情形即可。通过交换行的位置，可以将不为 0 的 r 阶子式所在的行调整到前 r 行，故不妨设 $A=\begin{pmatrix}A_r&B\\C&D\end{pmatrix}$，其中 $\det(A_r)\neq 0$，则 A_r 中 r 个 r 维行向量线性无关，则 $(A_r\ \ B)$ 作为其加长向量组也线性无关，再由矩阵的秩为 r，可知前 r 行即为行向量的极大无关组。

习题 1.60 (第五章第 31 题)

设 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 是 $\mathbb{F}^n$ 的基，向量组 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_n$ 与 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 有关系式

$$(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_n)=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n)T.$$

证明：$\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_n$ 为 $\mathbb{F}^n$ 的基当且仅当 T 为可逆方阵。

证明 设 $T=(t_{ij})_{n\times n}$，则 $\boldsymbol{b}_j=\sum\limits_{i=1}^n t_{ij}\boldsymbol{a}_i$，而 $(\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_n)$ 为 $\mathbb{F}^n$ 的基当且仅当它们线性无关，即 $\sum\limits_{j=1}^n\lambda_j\boldsymbol{b}_j=0$ 只有零解，也即 $\sum\limits_{j=1}^n\sum\limits_{i=1}^n\lambda_j t_{ij}\boldsymbol{a}_i=\sum\limits_{i=1}^n\left(\sum\limits_{j=1}^n\lambda_j t_{ij}\right)\boldsymbol{a}_i=0$ 只有零解，由 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 是基，则 $\sum\limits_{i=1}^n\left(\sum\limits_{j=1}^n\lambda_j t_{ij}\right)\boldsymbol{a}_i=0$ 只有 $\sum\limits_{j=1}^n\lambda_j t_{ij}=0, i=1,\cdots,n$，即 $T\boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{0}$，其中 $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)^T$，其只有零解当且仅当 T 可逆，命题得证。