1.9 第十一周作业

习题 1.61 (第五章第 34 题)

以向量组 $a_1=(3,1,0),a_2=(6,3,2),a_3=(1,3,5)$ 为基，求 $\beta=(2,-1,2)$ 的坐标.

解 即求线性表示的系数，做初等变换如下：

$$\begin{pmatrix}3&6&1&2\\1&3&3&-1\\0&2&5&2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&3&3&-1\\3&6&1&2\\0&2&5&2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&3&3&-1\\0&-3&-8&5\\0&2&5&2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&3&3&-1\\0&-3&-8&5\\0&0&-1/3&16/3\end{pmatrix}\tag{1.60}$$

故坐标为 $(x_1,x_2,x_3)^T=(-76,41,-16)^T$

习题 1.62 (第五章第 35 题)

设 $a_1=(3,2,-1,4),a_2=(2,3,0,-1)$.

(1) 将 a_1,a_2 扩充为 R^4 的一组基；

(2) 给出标准基在该组基下的表示；

(3) 求 $\beta=(1,3,4,-2)$ 在该组基下的坐标.

解 虽然题目给的向量是行向量，但我们还是习惯性地使用列向量来进行计算，即将所有向量转置.

(1) 注意到 a_1,a_2 的前两个分量线性无关，故可以直接补充 $a_3=(0,0,1,0)$，$a_4=(0,0,0,1)$ 得到一组基.

(2) 基变换写为

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&2&0&0\\2&3&0&0\\-1&0&1&0\\4&-1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&2&0&0\\2&3&0&0\\-1&0&1&0\\4&-1&0&1\end{pmatrix}$$

故 $$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}'=\begin{pmatrix}3&2&0&0\\2&3&0&0\\-1&0&1&0\\4&-1&0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&2&0&0\\2&3&0&0\\-1&0&1&0\\4&-1&0&1\end{pmatrix}^{-1}$$

即标准基在这组基下的表示为 $$\begin{pmatrix}3&2&0&0\\2&3&0&0\\-1&0&1&0\\4&-1&0&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}3/5&-2/5&0&0\\-2/5&3/5&0&0\\3/5&-2/5&1&0\\-14/5&11/5&0&1\end{pmatrix}$$

(3) 由坐标变换公式，$\beta'=T^{-1}\beta=(-3/5,7/5,17/5,9/5)$.

习题 1.63 (第五章第 36 题)

将三维几何空间中的直角坐标系 $[O;e_1,e_2,e_3]$ 绕单位向量 $e=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$ 逆时针旋转 θ 角，求新坐标与原坐标之间的关系.

解 将标准基 1 换为 $e_1'=e$ 及垂直于 e 的平面内互相垂直的两单位向量 $e_2'=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0),e_3'=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)$ 组成的基 2，有过渡矩阵：

$$T_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$$

满足

$$(e_1,e_2,e_3)T_1=(e_1',e_2',e_3'); \tag{1.61}$$

再将基 2 绕 e 逆时针旋转 θ 角得到基 3：(e_1'',e_2'',e_3'')，有过渡矩阵 (即二维旋转)：

$$T_2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & cos\theta & -sin\theta\\ 0 & sin\theta & cos\theta\end{pmatrix}$$

满足

$$(e_1',e_2',e_3')T_2=(e_1'',e_2'',e_3''); \tag{1.62}$$

由于旋转过程中基 1 与基 2 的相对位置保持不变，故基 1 经旋转得到的基 4：(e_1''',e_2''',e_3''') 与基 3 之间满足和基 1 与基 2 相同的关系：

$$(e_1''',e_2''',e_3''')T_1=(e_1'',e_2'',e_3''); \tag{1.63}$$

即

$$(e_1''',e_2''',e_3''')=(e_1'',e_2'',e_3'')T_1^{-1}. \tag{1.64}$$

综合式 (1.61),(1.62),(1.64) 得到标准基在旋转前后的基变换：

$$(e_1''',e_2''',e_3''')=(e_1,e_2,e_3)T_1T_2T_1^{-1} \tag{1.65}$$

故坐标变换为：

$$\alpha'=R\alpha=T_1T_2^{-1}T_1^{-1}\alpha \tag{1.66}$$

旋转矩阵写为:

$$\begin{aligned}R&=T_1T_2^{-1}T_1^{-1}\\&=\begin{pmatrix}(1+2cos\theta)/3 & (1-cos\theta+\sqrt{3}sin\theta)/3 & (1-cos\theta-\sqrt{3}sin\theta)/3\\ (1-cos\theta-\sqrt{3}sin\theta)/3 & (1+2cos\theta)/3 & (1-cos\theta+\sqrt{3}sin\theta)/3\\ (1-cos\theta+\sqrt{3}sin\theta)/3 & (1-cos\theta-\sqrt{3}sin\theta)/3 & (1+2cos\theta)/3\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{1.67}$$

注 本题也可以直接使用 Rodrigues 转动公式：

$$R(\vec{\psi})=\begin{pmatrix}n_1^2(1-cos\psi)+cos\psi & n_1n_2(1-cos\psi)-n_3sin\psi & n_1n_3(1-cos\psi)+n_2sin\psi\\ n_1n_2(1-cos\psi)+n_3sin\psi & n_2^2(1-cos\psi)+cos\psi & n_2n_3(1-cos\psi)-n_1sin\psi\\ n_1n_3(1-cos\psi)-n_2sin\psi & n_2n_3(1-cos\psi)+n_1sin\psi & n_3^2(1-cos\psi)+cos\psi\end{pmatrix}$$

由于坐标轴绕 e 逆时针转 θ 角，故相对地，坐标绕 e 顺时针转 θ 角，即 ψ 取 $-\theta$，而转轴 e 的三个分量即为 n_1,n_2,n_3，代入得

$$\begin{aligned}R&=\begin{pmatrix}(1-cos\theta)/3+cos\theta & (1-cos\theta)/3+\sqrt{3}sin\theta/3 & (1-cos\theta)/3-\sqrt{3}sin\theta/3\\ (1-cos\theta)/3-\sqrt{3}sin\theta/3 & (1-cos\theta)/3+cos\theta & (1-cos\theta)/3+\sqrt{3}sin\theta/3\\ (1-cos\theta)/3+\sqrt{3}sin\theta/3 & (1-cos\theta)/3-\sqrt{3}sin\theta/3 & (1-cos\theta)/3+cos\theta\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}(1+2cos\theta)/3 & (1-cos\theta+\sqrt{3}sin\theta)/3 & (1-cos\theta-\sqrt{3}sin\theta)/3\\ (1-cos\theta-\sqrt{3}sin\theta)/3 & (1+2cos\theta)/3 & (1-cos\theta+\sqrt{3}sin\theta)/3\\ (1-cos\theta+\sqrt{3}sin\theta)/3 & (1-cos\theta-\sqrt{3}sin\theta)/3 & (1+2cos\theta)/3\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{1.68}$$

习题 1.64 (第五章第 40 题)

已知 F^5 中向量 $a_1=(1,2,3,2,1)^T$ 及 $a_2=(1,3,2,1,2)^T$，求找一个齐次线性方程组使得 a_1 与 a_2 为该方程组的基础解系.

解 设系数矩阵为 A，则齐次线性方程组写为 $Ax=O$，a_1 和 a_2 构成方程组的基础解系，即方程组解空间维数等于 2，故 $rankA=5-dimV=5-2=3$，故找一个列数为 5，秩为 3，$Aa_1=O, Aa_2=O$ 的矩阵 A 即可，例如：

$$A=\begin{pmatrix}1&0&-1&1&0\\1&-1&0&0&1\\-4&1&0&1&0\end{pmatrix}\tag{1.69}$$

上式中 A 的每一行是如何确定的？实际上 A 的任意行向量 α 满足 $\begin{pmatrix}a_1^T\\a_2^T\end{pmatrix}\alpha^T=O$，这即是 $A(a_1,a_2)=O$ 转置后的结果.

习题 1.65 (第五章第 41 题)

判断下列集合关于规定的运算是否构成线性空间

(1) V 是所有实数对 (x,y) 的集合，数域 $\mathbb{F}=\mathbb{R}$. 定义

$$(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2),\quad \lambda(x,y)=(x,y).$$

(2) V 是所有满足 $f(-1)=0$ 的实函数集合，数域 $\mathbb{F}=\mathbb{R}$. 定义加法为函数加法，数乘为数与函数的乘法.

(3) V 是所有满足 $f(0)\neq 0$ 的实函数的集合，数域 $\mathbb{F}=\mathbb{R}$. 定义加法为函数加法，数乘为数与函数的乘法.

(4) V 是数域 $\mathbb{F}$ 上所有 n 阶可逆方阵的全体，加法为矩阵的加法，数乘为矩阵的数乘.

解 (1) 不构成线性空间. 因为不满足数乘分配律：

$$(\lambda+\mu)(x,y)=(x,y)\neq(2x,2y)=(x,y)+(x,y)=\lambda(x,y)+\mu(x,y)\tag{1.70}$$

(2) 构成线性空间. 由于实函数在加法和数乘下构成线性空间，我们只需证 V 为实函数空间的子空间，即 V 封闭：设 $f,g\in V$，有 $(f+g)(-1)=f(-1)+g(-1)=0$，故 $f+g\in V$; $\lambda f(-1)=0$，故 $\lambda f\in V$.

(3) 不构成线性空间，因为 V 对加法不封闭：

设 $f\in V$，则 $f(0)\neq 0$，$-f(0)\neq 0$. 故 $-f\in V$，而 $f+(-f)=0$ 是恒为 0 的常量函数，其不在 V 中，故 V 对加法不封闭.

(4) 不构成线性空间，因为 V 对加法不封闭：

设 $A\in V$，则 A 可逆，显然 $-A$ 也可逆，但 $A+(-A)=O$ 不可逆，即零矩阵不在 V 中，V 对加法不封闭.

习题 1.66 (第五章第 42 题)

设 V 是所有实函数全体在实数域上构成的线性空间，判断 V 中下列函数组是否线性相关.

(1)$1,x,\sin x$;

(2)$1,x,e^x$;

(3)$1,\cos 2x,\cos^2 x$;

(4)$1,x^2,(x-1)^3,(x+1)^3$;

(5)$\cos x,\cos 2x,\cdots,\cos nx$.

解 (1) 线性无关. (2) 线性无关. (3) 线性相关，注意到 $\cos 2x=2\cos^2 x-1$.

(4) 线性相关，注意到 $(x+1)^3-(x-1)^3-6x^2-2=0$.

(5) 线性无关，我们先断言 $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \cdots, \sin nx, \cos nx$ 线性无关. 根据第五章第 12 题的第三条，知 $\cos x, \cos 2x, \cdots, \cos nx$ 线性无关.
以上断言的证明：设

$$f(x) = a + b_1 \sin x + c_1 \cos x + b_2 \sin 2x + c_2 \cos 2x + \cdots + b_n \sin nx + c_n \cos nx = 0 \quad \text{其中} a, b_i, c_i \in \mathbb{R}.$$

依次设 $g(x) = 1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \cdots, \sin nx, \cos nx$，分别计算定积分 $\int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$，可得 $a = b_1 = c_1 = \cdots = b_n = c_n = 0$.

习题 1.67 (第五章第 44 题)

设 $\mathbb{F}_n[x]$ 是次数小于或等于 n 的多项式全体构成的线性空间.
(1) 证明：$S = \{1, x-1, (x-1)^2, \cdots, (x-1)^n\}$ 构成 $\mathbb{F}^n$ 的一组基；
(2) 求 S 到基 $T = \{1, x, \cdots, x^n\}$ 的过渡矩阵；
(3) 求多项式 $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in \mathbb{F}_n[x]$ 在基 S 下的坐标.

证明 (1) 根据 $x^k = ((x-1)+1)^k (k = 0, 1, 2, \cdots, n)$ 的二项式展开及第五章第 17 题知 S 线性无关，又 $\mathbb{F}_n[x]$ 的维数为 $n+1$，故 S 构成 $\mathbb{F}_n[x]$ 的一组基.

解 (2) 根据二项式展开 $x^k = ((x-1)+1)^k = \sum\limits_{i=1}^{k} C_k^i (x-1)^i$. 故

$$(1, x, \cdots, x^n) = (1, x-1, \cdots, (x-1)^n) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & n \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \frac{n(n-1)}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

(3)

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = (1, x, \cdots, x^n) \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = (1, x-1, \cdots, (x-1)^n) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & n \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \frac{n(n-1)}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

则 $p(x)$ 在 S 下的坐标为

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & n \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \frac{n(n-1)}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(1) \\ \frac{p'(1)}{1!} \\ \vdots \\ \frac{p^{(n)}(1)}{n!} \end{pmatrix}$$

即为 $p(x)$ 在 1 处的 $Taylor$ 展开.

习题 1.68 (第五章第 46 题)

给定矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

令 V 是与 A 乘法可交换的三阶实方阵全体. 证明: V 在矩阵加法与数乘下构成实数域上的线性空间, 并求 V 的一组基与维数.

解 根据线性空间及矩阵数乘定义知 V 构成线性空间. 注意到下列矩阵

$$A=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\4&-2&1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}0&-2&0\\-1&-4&1\\-2&0&0\end{pmatrix},I_3$$

均与矩阵 A 可交换, 易知 A,B,I_3 线性无关. 下面只需说明对任意矩阵 $X=x_{ij}$, 若 X 与 A 乘法可交换, 则 X 可以被 A,B,I_3 线性表示. 比较 XA 与 AX 中各个分量的元素, 知 $X=x_{23}B+x_{11}I_3+x_{13}A$. 故 V 的基为 A,B,I_3, 维数为 3.

习题 1.69 (第五章第 47 题)

$V=\mathbb{F}^{n\times n}$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上所有 n 阶矩阵构成的线性空间. 令 W 是数域 $\mathbb{F}$ 上所有满足 $\mathrm{tr}A=0$ 的 n 阶矩阵的全体. 证明: W 是 V 的线性子空间. 并求 W 的一组基和维数.

证明 根据迹的线性性质知 W 是 V 的线性子空间. 易知 $E_{ij}(i\neq j),E_{kk}-E_{nn}\in W$, 其中 $i,j=1,2,\cdots,n,k=1,2,\cdots,n-1$, 且线性无关. 下面只需说明 $E_{ij}(i\neq j),E_{kk}-E_{nn}\in W$ 可以张成 W 即可, 假设 $A\in W$, 即 $\mathrm{tr}A=0$. 则 $a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}=0$, 因此 $a_{nn}=-a_{11}-\cdots-a_{n-1,n-1}$. 于是 $A=\sum\limits_{i\neq j}a_{ij}E_{ij}+\sum\limits_{k\neq n}a_{kk}(E_{kk}-E_{nn})$. 因此 $E_{ij}(i\neq j),E_{kk}-E_{nn}\in W$ 构成 W 的一组基, 维数为 n^2-1.