1.11 第十三周作业

习题 1.80 (第六章第 11 题)

给定 $\mathbb{R}^3$ 中线性变换 $\mathscr{A}(x,y,z)^T=(2x+y-z,x+2y+z,4x+5y+z)^T$. 求 $\mathscr{A}$ 的像空间与核空间的维数及一组基

解 由于 $\mathscr{A}e_1=(2,1,4)^T,\mathscr{A}e_2=(1,2,5)^T,\mathscr{A}e_3=(-1,1,1)^T$, 因此

$$\mathscr{A}(e_1,e_2,e_3)=(e_1,e_2,e_3)\begin{pmatrix}2&1&-1\\1&2&1\\4&5&1\end{pmatrix}.$$

作初等列变换 $\begin{pmatrix}2&1&-1\\1&2&1\\4&5&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&1&1\\0&2&1\end{pmatrix}$. 故 $\mathrm{im}\mathscr{A}$ 的基为 $e_2+2e_3,-e_1+e_2+e_3$, 维数为 2.

注意到

$$\mathscr{A}(x_1,x_2,x_3)^T=\mathscr{A}(x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3)=\mathscr{A}(e_1,e_2,e_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=(e_1,e_2,e_3)\begin{pmatrix}2&1&-1\\1&2&1\\4&5&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}.$$

由于 e_1,e_2,e_3 作为基是线性无关的，因此 $\mathscr{A}(x_1,x_2,x_3)^T=0$ 当且仅当 $\begin{pmatrix}2&1&-1\\1&2&1\\4&5&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0$. 可解得 $(x_1,x_2,x_3)=(-1,1,-1)$, 故 $\ker\mathscr{A}$ 的基为 $-e_1+e_2-e_3$, 维数为 1.

习题 1.81 (第六章第 12 题)

证明：从高维数组空间到低维数组空间的投影变换不是可逆变换.

证明 若可逆，这意味着高维数组空间的维数与低维数组空间维数相同，但这显然不可能!

习题 1.82 (补充题)

设 $\mathbb{B}_U=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n),\mathbb{B}_V=(\beta_1,\cdots,\beta_m)$ 分别为线性空间 U,V 的基.$\mathbb{B}_{U^*}=(\alpha^1,\cdots,\alpha^n),\mathbb{B}_{V^*}=(\beta^1,\cdots,\beta^m)$ 分别为 $\mathbb{B}_U$ 与 $\mathbb{B}_V$ 的对偶基. 设线性映射 $\mathscr{A}:U\to V$ 在基 $\mathbb{B}_U$ 与 $\mathbb{B}_V$ 下的矩阵为 A, 求 $\mathscr{A}^*:V^*\to U^*$ 在基 $\mathbb{B}_{U^*}$ 与 $\mathbb{B}_{V^*}$ 下的矩阵.

解 设 $\mathscr{A}^*(\beta^1,\cdots,\beta^m)=(\alpha^1,\cdots,\alpha^n)B$, 其中 $B=(b_{ij})$. 故 $\mathscr{A}^*\beta^i=\sum\limits_{j=1}^n b_{ji}\alpha^j$，两边同时作用 α_j，有 $b_{ji}=(\mathscr{A}\beta^i)(\alpha_j)=\beta^i\mathscr{A}(\alpha_j)=\beta^i(\sum\limits_{k=1}^m a_{kj}\beta_j)=a_{ij}$. 故 $B=A^T$.

习题 1.83 (第六章第 21 题)

判断以下矩阵 A,B 是否相似? 并说明理由.

$$(1)A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix};$$

$$
(1)A=\begin{pmatrix}1&2&0&0\\0&1&3&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&2&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&3\\0&0&0&1\end{pmatrix}.
$$

♠

解 (1) 注意到 $r(I-A)\neq r(I-B)$, 因此 A,B 不相似.
(2) 注意到 $r(I-A)^2\neq r(I-B)^2$, 因此 A,B 不相似.

注 后面我们将会证明：两个矩阵是否相似，可以完全由一些矩阵的秩判断.

习题 1.84 (第六章第 22 题)

求三阶可逆方阵 P 使得 $P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

♠

解 设 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, 记 $A=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. 注意到 $P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ 等价于 $A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,2\alpha_2,3\alpha_3)$. 因此问题转化为求矩阵 A 的特征向量.$A\alpha_1=\alpha_1$ 等价于 $(A-I)\alpha_1=0$, 解得 $\alpha_1=(0,1,0)^T(\alpha_1$ 取值不唯一!), 同理 $\alpha_2=(0,0,1)^T,\alpha_3=(1,0,0)^T$. 因此可以取 $P=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$.

注 事实上，以上求解过渡矩阵的过程给出了求解可对角化矩阵到对角矩阵的过渡矩阵的一般方法 (即求特征向量). 具体操作如下：
假设 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$, 且 $P^{-1}AP=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$. 于是

$$
A(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=AP=P\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)=(\lambda_1\alpha_1,\lambda_2\alpha_2,\cdots,\lambda_n\alpha_n)
$$

因此求 P 即求 α_i, 即求矩阵 A 关于特征值 λ_i 的特征向量，也即求解线性方程组 $(\lambda_i I-A)x=0$ 的解.

习题 1.85 (第六章第 24 题)

设 A 与 B 相似，C 与 D 相似. 证明：$\mathrm{diag}(A,C)$ 与 $\mathrm{diag}(B,D)$ 相似. 反之是否成立?

♠

证明 由于 A 与 B 相似，C 与 D 相似，因此存在可逆矩阵 P,Q，使得 $PAP^{-1}=B,QCQ^{-1}=D$. 故

$$
\mathrm{diag}(P,Q)\mathrm{diag}(A,C)\mathrm{diag}(P^{-1},Q^{-1})=\mathrm{diag}(B,D).
$$

反之不成立，考虑 $\mathrm{diag}(1,0)$ 与 $\mathrm{diag}(0,1)$.