1.12 第十四周作业

习题 1.86 (第六章第 13 题 (2)(4)(6))

求下列矩阵的全部特征值和特征向量

$$(2)\ \begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{pmatrix} \qquad (4)\ \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & -6 & 5 \end{pmatrix} \qquad (6)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

解 (2) 矩阵的特征方程写为

$$det(\lambda I - A) = (\lambda - cos\theta)^2 + sin^2\theta = 0 \tag{1.71}$$

解得 $\lambda = con\theta \pm isin\theta$.

$sin\theta = 0$ 时矩阵为 $\pm I$, 对应的特征值分别为 ± 1，对应的特征向量为所有非零向量；

$sin\theta \neq 0$ 时：

对于 $\lambda_1 = cos\theta + isin\theta$, 设特征向量为 $(x_1, x_2)^T$, 有

$$\begin{cases} isin\theta x_1 + sin\theta x_2 = 0 \\ -sin\theta x_1 + isin\theta x_2 = 0 \end{cases} \tag{1.72}$$

解得 $x_2 = -ix_1$. 即 $\lambda_1 = cos\theta + isin\theta$ 对应的特征向量为 $c_1(1, -i)^T, c_1 \neq 0$;

对于 $\lambda_2 = cos\theta - isin\theta$, 同理解得 $x_2 = ix_1$, 对应的特征向量为 $c_2(1, i)^T, c_2 \neq 0$.

(4) 矩阵的特征方程写为

$$det(\lambda I - A) = (\lambda - 2)^3 = 0 \tag{1.73}$$

解得 $\lambda = 2$, 为三重根.

设特征向量为 $(x_1, x_2, x_3)^T$, 有 $A(x_1, x_2, x_3)^T = 2(x_1, x_2, x_3)^T$，即

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - 6x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \tag{1.74}$$

解得特征向量 $c_1(2, 1, 0)^T + c_2(-1, 0, 1)^T$.

(6) 矩阵的特征方程写为

$$det(\lambda I - A) = (\lambda - 2)^2(\lambda^2 - 2) = 0 \tag{1.75}$$

解得 $\lambda = 2, \pm\sqrt{2}$，其中 2 为二重根.

对于 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, 列方程解得对应的特征向量为 $c_1(1, 0, 1, 0)^T + c_2(1, 0, 0, 1)^T, c_1, c_2 \neq 0$;

对于 $\lambda_3 = \sqrt{2}$, 特征向量为 $c_3(\sqrt{2} - 1, -\sqrt{2} + 1, -\sqrt{2} + 1, 1)^T, c_3 \neq 0$;

对于 $\lambda_4 = -\sqrt{2}$, 特征向量为 $c_4(-\sqrt{2} - 1, \sqrt{2} + 1, \sqrt{2} + 1, 1)^T, c_4 \neq 0$.

习题 1.87 (第六章第 14 题)

给定 $\mathbb{R}^2$ 上的线性变换 $\mathscr{A}(x, y)^T = (3x + 2y, 2x + y)^T$.$\mathscr{A}$ 将单位圆 C 映射为椭圆 C'. 求椭圆 C' 的长短半轴方向与长度, 以及椭圆的面积.

解 易知线性变换对应的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$，求得其特征值为 $\lambda_1 = 2 + \sqrt{5}, \lambda_2 = 2 - \sqrt{5}$, 对应的特征向量分别

为 $\alpha=(1,\frac{\sqrt{5}-1}{2})^T,\beta=(1,-\frac{\sqrt{5}+1}{2})^T$. 可以看到 $\alpha\perp\beta$, 则变换相当于沿这两个方向进行伸缩: 在 α 方向拉伸为原来的 $2+\sqrt{5}$ 倍, 即长半轴方向沿 α, 长半轴长度 $a=2+\sqrt{5}$; 在 β 方向反向压缩为原来的 $\sqrt{5}-2$ 倍，即短半轴方向沿 β, 短半轴长度 $b=\sqrt{5}-2$. 椭圆面积为 $S=\pi ab=\pi$.

下面直接给出这个线性变换的图示, 以便于更好地理解线性变换与特征值, 特征向量的联系:

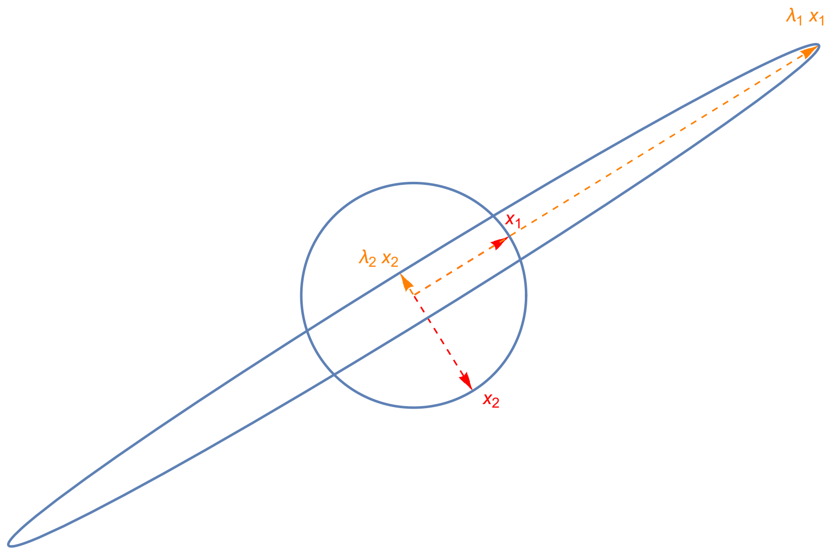

图 1.1: 一般的二维伸缩变换：由两个垂直的特征向量及其特征值可完全确定变换得到的椭圆

习题 1.88 (第六章第 15 题)

设 A 是可逆方阵. 证明: 若 λ 是 A 的一个特征值, 则 λ^{-1} 是 A^{-1} 的特征值, 且对应的特征向量相同.

证明 由于 A 可逆, 故 $detA=\prod_i\lambda_i\neq 0$, 即 A 的特征值均不为零.

设 α 为 A 关于特征值 λ 的特征向量, 则有

$$A\alpha=\lambda\alpha\Rightarrow\lambda^{-1}A\alpha=\alpha \tag{1.76}$$

两边同时左乘 A^{-1}，得到

$$\lambda^{-1}\alpha=A^{-1}\alpha \tag{1.77}$$

则命题成立.

习题 1.89 (第六章第 17 题)

设三阶方阵 A 的特征多项式为 $p_A(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda-2)$. 求方阵 $3A+2I$ 的特征值与行列式.

解 由特征多项式得 A 的三个特征值:$\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=2$, 由于单位阵 I 的特征向量为所有非零向量, 故 $3A+2I$ 的特征向量与 A 的特征向量相同, 对应地, 特征值变为 $\lambda_1'=\lambda_2'=3\times1+2=5,\lambda_3'=3\times2+2=8$. 行列式为 $det(3A+2I)=\lambda_1'\lambda_2'\lambda_3'=200$.

注 事实上, 同学们可以自行证明以下性质：

若 α 为可逆矩阵 A 属于 λ 的特征向量, 则 α 也是 $kA,A^2,aA+bI,A^m,f(A),A^{-1},A^*$ 分别属于 $k\lambda,\lambda^2,a\lambda+b,\lambda^m,f(\lambda),\lambda^{-1},\frac{|A|}{\lambda}$ 的特征向量.

习题 1.90 (第六章第 18 题)

(1) 若 $A^2=I$, 证明:A 的特征值只能是 ±1;

(2) 设 n 阶实方阵 A 满足 $A^T=-A$, 证明 A 的特征值为零或纯虚数.

证明 (1) 设 A 的特征值为 λ, 其对应的特征向量为 α, 则有

$$A^2\alpha=A\lambda\alpha=\lambda^2\alpha \tag{1.78}$$

而由 $A^2=I$ 得

$$A^2\alpha=I\alpha=\alpha \tag{1.79}$$

故 $\lambda^2=1\Rightarrow\lambda=\pm1$.

(2) 设 A 的特征值为 λ, 其对应的特征向量为 α. 对特征向量做共轭转置得到 $\bar{\alpha}^T$, 将其作用在 $A\alpha=\lambda\alpha$ 两端, 得到

$$\bar{\alpha}^TA\alpha=\lambda\bar{\alpha}^T\alpha=\lambda|\alpha|^2 \tag{1.80}$$

将上式两边同时求共轭转置, 由于 A 为实方阵, 其共轭转置就是转置:

$$\bar{\alpha}^TA^T\alpha=\bar{\lambda}|\alpha|^2\Rightarrow-\bar{\alpha}^TA\alpha=\bar{\lambda}|\alpha|^2 \tag{1.81}$$

将两式相加得

$$(\lambda+\bar{\lambda})|\alpha|^2=0 \tag{1.82}$$

由于 α 为特征向量, 故 $|\alpha|^2\neq0$, 故 $\lambda+\bar{\lambda}=0$, 命题成立.

习题 1.91 (第六章第 26 题)

设矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\x&1&y\\1&0&0\end{pmatrix}$ 有三个线性无关的特征向量, 求 x 和 y 应满足的条件.

解 A 的特征方程写为

$$det(\lambda I-A)=(\lambda+1)(\lambda-1)^2=0 \tag{1.83}$$

即 A 的三个特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=\lambda_3=1$, 其中 1 为二重根, 则命题等价于求特征值 1 对应的特征子空间维数为 2 的条件, 即令矩阵 $(I-A)$ 的秩为 1, 下面对其进行线性变换:

$$I-A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\-x&0&-y\\-1&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\-x&0&-y\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0\\-x&-y&0\\0&0&0\end{pmatrix} \tag{1.84}$$

易见令其秩为 1 等价于 $\begin{vmatrix}1&-1\\-x&-y\end{vmatrix}=0\Rightarrow x+y=0.$

习题 1.92 (第六章第 27 题)

设矩阵 A 和 B 相似, 其中

$$A=\begin{pmatrix}-2&0&0\\2&x&2\\3&1&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&y\end{pmatrix}.$$

(1) 求 x 和 y 的值;

(2) 求可逆矩阵 T, 使得 $T^{-1}AT=B$.

解 (1) $A\overset{s}{\sim}B \Rightarrow f_A(\lambda)=f_B(\lambda)$. 即

$$\lambda^3+(1-x)\lambda^2+(-x-4)\lambda+2x-4=\lambda^3+(-1-y)\lambda^2+(y-2)\lambda+2y \tag{1.85}$$

解得 $x=0, y=-2$.

(2) 三个特征值为 $-1,2,-2$, 分别求得对应的三个特征向量 $(0,2,-1)^T,(0,1,1)^T,(1,0,-1)^T$, 则 T 可取为 (结果不唯一): $\begin{pmatrix}0&0&1\\2&1&0\\-1&1&-1\end{pmatrix}$

习题 1.93 (第二章第 28 题)

设 n 阶方阵 $A\neq 0$, 满足 $A^m=0$, 其中 $m\geq 2$ 为正整数.
(1) 求 A 的特征值;
(2) 证明:A 不能相似于对角阵;
(3) 证明:$|I+A|=1$.

解 (1) 设 A 特征值为 λ, 其对应的特征向量为 α, 则有

$$A^m\alpha=\lambda A^{m-1}\alpha=\cdots=\lambda^m\alpha \tag{1.86}$$

而由题有 $A^m\alpha=0\,\alpha=0$, 故 $\lambda=0$.

(2) 用反证法, 若 A 可相似于对角阵, 则此对角阵为零矩阵, 则 A 为零矩阵, 矛盾.

(3) 存在一个 n 阶可逆方阵 T 使得 $T^{-1}AT$ 为上三角阵, 且其对角元素为 A 的特征值, 即均为 0. 故 $I+T^{-1}AT$ 为对角线元素均为 1 的上三角阵, 即 $|I+T^{-1}AT|=1$, 则

$$|I+A|=|T(I+T^{-1}AT)T^{-1}|=|T||I+T^{-1}AT||T^{-1}|=1 \tag{1.87}$$

另解: A 的特征值均为 0, 其为特征多项式的 n 重根, 则特征多项式为 $|\lambda I-A|=\lambda^n$. 取 $\lambda=-1$ 得 $(-1)^n|I+A|=(-1)^n$, 即 $|I+A|=1$. 由此看到, 利用特征多项式可以简化一些相关行列式的计算.

习题 1.94 (第六章第 29 题 (2)(3))

判断下列矩阵 A 是否可以对角化? 若可以, 试求变换矩阵 T, 使得 $T^{-1}AT$ 为对角阵.

$$(2)\ A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&4&-2\\-3&-3&5\end{pmatrix};\qquad (3)\ A=\begin{pmatrix}3&0&1\\4&-2&-8\\-4&0&-1\end{pmatrix}.$$

解 (2) 特征多项式为

$$|\lambda I-A|=(\lambda-2)^2(\lambda-6) \tag{1.88}$$

即特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=2, \lambda_3=6$.

对于二重特征值 2, 有 $rank(2I-A)=1$, 则其特征子空间维数为 2, 即 A 可对角化, 两个基 (解方程组得到) 可写为 $(1,0,1)^T$ 和 $(1,-1,0)^T$.

又特征值 6 的一个特征向量写为 $(1,-2,3)^T$, 故变换矩阵 T(不唯一) 可写为 $\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-1&-2\\1&0&3\end{pmatrix}$.

(3) 特征多项式为

$$|\lambda I-A|=(\lambda-1)^2(\lambda+2) \tag{1.89}$$

即特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1, \lambda_3=-2$.

对于二重特征值 1, 有 $rank(I-A)=2$, 则其特征子空间维数为 1, 即 A 不能对角化.

习题 1.95 (第六章第 30 题)

设 A, B 均为 n 阶方阵,A 有 n 个互异的特征值且 $AB=BA$. 证明 B 相似于对角阵.

证明 (这玩意实际上就是期中考试前那天晚上群里有人问到的往年题.)

由于 A 有 n 个互异特征值, 故 A 可对角化, 有 $T^{-1}AT=diag(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)=C$. 记 $T^{-1}BT=D$, 我们下面证明 D 为对角阵.

$AB=BA \Rightarrow T^{-1}ABT=T^{-1}BAT \Rightarrow T^{-1}ATT^{-1}BT=T^{-1}BTT^{-1}AT \Rightarrow CD=DC.$

即 D 与对角阵 C 可交换, 考虑其非对角元素 $d_{ij}, i\neq j$, 有 $\lambda_i d_{ij}=\lambda_j d_{ij}$, 由于 $\lambda_i\neq\lambda_j$, 故 $d_{ij}=0$, 所以 D 为对角阵, 命题成立.