1.14 第十六周作业

习题 1.107 (第七章第 20 题)

设 W 是由 $(1,1,0),(1,-2,1)$ 生成的 $\mathbb{R}^3$ 的子空间.
(1) 求 W 的一组标准正交基.
(2) 求 $W^{\perp}$ 的标准正交基.
(3) 求向量 $(0,0,2)$ 在 W 的正交投影.

解 (1) 作史密斯正交化：$\beta_1=\alpha_1=(1,1,0)$,$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}=(\frac{3}{2},-\frac{3}{2},1)$. 最后我们做一次单位化，有 $e_1=\frac{\beta_1}{(\beta_1,\beta_1)}=(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0),e_2=\frac{\beta_2}{(\beta_2,\beta_2)}=\frac{1}{\sqrt{22}}(3,-3,1)$.

(2) 设 $\alpha=(a_1,a_2,a_3)\in W^{\perp}$, 故 $(\alpha,\alpha_1)=0,(\alpha,alpha_2)=0$, 因此 $a_1+a_2=0,a_1-2a_2+a_3=0$, 解得 $\alpha=(t,-t,-3t)$. 又 $\mathbb{R}^3=W\oplus W^{\perp}$, 因此 $dimW^{\perp}=1$, 故 $W=span\{e_3=(1,-1,-3)\}$.

(3) 记 $x=(0,0,1)$,$Px=(x,e_1)e_1+(x,e_2)e_2=(6,-6,2)$.

习题 1.108 (第七章第 24 题)

设 $\boldsymbol{a}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的单位向量. 定义线性变换：$\mathscr{A}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}-2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}$. 证明：$\mathscr{A}$ 是正交变换，并找 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基，使得 $\mathscr{A}$ 在该组基下的矩阵为对角阵.

证明 $\mathscr{A}\boldsymbol{b},\mathscr{A}\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{b}-2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}-2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})\boldsymbol{a})=(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$, 因此 $\mathscr{A}$ 是正交变换. 将 $\boldsymbol{a}$ 扩充成 $\mathbb{R}^n$ 中的一组基，在对其进行史密斯正交化，最后在做单位化，$\mathscr{A}$ 在这组基下的矩阵为对角矩阵.

习题 1.109 (第七章第 26 题)

设
$$A=\begin{pmatrix}1&-2&0\\-2&2&-2\\0&-2&3\end{pmatrix},$$
求正交矩阵 P, 使 $P^{-1}AP$ 为对角阵. 由此计算 A^k，k 是自然数.

解 $\det\{(\lambda I-A)\}=(\lambda-5)(\lambda-2)(\lambda+1)$. 容易算得属于特征值为 5，2，-1 的特征向量分别为：
$$(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3})^T,(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},-\frac{2}{3})^T,(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3})^T$$
于是 $\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}$, 故 $P^{-1}AP=diag(-1,2,5)$. 计算得出：
$$A^k=\begin{pmatrix}4(-1)^k+2^{k+2}+5^k&4(-1)^k-2^{k+1}-2\cdot5^k&2(-1)^k-2^{k+2}+2\cdot5^k\\4(-1)^k-2^{k+2}-2\cdot5^k&4(-1)^k+a^{k+2}+4\cdot5^k&2(-1)^k+2^{k+1}-4\cdot5^k\\2(-1)^k-2^{k+2}+2\cdot5^k&2(-1)^k+2^{k+1}-4\cdot5^k&(-1)^k+2^{k+2}+4\cdot5^k\end{pmatrix}$$
.

习题 1.110 (第七章第 27 题)

证明：下列三个条件中只要有两个成立，另一个也必成立.
（1）A 是对称的；（2）A 是正交的；（3）$A^2=I$.

证明 (1)+(2)⇒(3)：$A^2 = AA^T = I$.

(1)+(3)⇒(2):$A^2 = AA^T = I$.

(2)+(3)⇒(1): 由 A 正交，$A^{-1} = A^T$, 又 $A^2 = I$, 且逆矩阵是唯一的，知 $A = A^T$.

习题 1.111 (第七章第 29 题)

设 A 是 n 阶实对称方阵，且 $A^2 = A$. 证明：存在正交方阵 T 使得 $T^{-1}AT = diag(I_r, 0)$, 这里 $r = rank(A)$.

证明 由 A 是对称实矩阵，知存在正交矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$, 其中 λ_i 是矩阵 A 的特征值，由矩阵 A 适合多项式 $x^2 - x$, 因此矩阵 A 的特征值为 0，1. 又因为交换矩阵行列对应的矩阵是正交矩阵，于是存在正交方阵 T 使得 $T^{-1}AT = diag(I_r, 0)$.

习题 1.112 (第七章第 30 题)

设 A 是 n 阶实对称方阵. 证明：$max_{0\neq x\in\mathbb{R}^n} \frac{x^TAx}{x^Tx} = \lambda_{max}$，这里 λ_{max} 是 A 的最大特征值.

证明 存在正交矩阵 P, 使得 $P^TAP = diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$. 设 $x = Py$，则 $max\frac{x^TAx}{x^Tx} = max\frac{y^TP^TAPy}{y^Ty} = \lambda_{max}$.

习题 1.113 (第七章第 31 题)

设 V 是 n 阶实方阵全体构成的线性空间. 对 $A, B \in V$, 定义 $(A, B) = tr(AB^T)$.

(1) 证明：(A, B) 构成内积，从而 V 在该内积下成为欧氏空间.

(2) 设 $A = (a_{ij})_{n\times n} \in V$，求 A 的模长.

(3) 基本矩阵 E_{ij} 是否构成 V 的一组标准正交基? 请说明理由.

证明 (1) 由矩阵乘法及迹的定义立明.

解 (2)$||A|| = \sqrt{tr(AA^T)} = \sqrt{\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2}$.

(3) 由基础矩阵乘法及迹的定义立明.

习题 1.114 (第七章第 32 题)

设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是 n 维欧氏空间 V 的一组向量. 定义其 $Gram$ 矩阵 $G = ((\alpha_i, \alpha_j)) \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

(1) 证明：$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 构成 V 的一组基当且仅当 $\det(G) \neq 0$.

(2) 设 α_i 在一组标准正交基下的坐标为 $\boldsymbol{x_i}, i = 1, 2, \cdots, n$. 记 $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{x_1}, \cdots, \boldsymbol{x_n}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$. 则 $\det(G) = \det(X)^2$.

证明 (1) $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 构成基等价于 $k_1\alpha_1 + \cdots + k_n\alpha_n = 0$ 只有零解等价于 $(k_1\alpha_1 + \cdots + k_n\alpha_n, \alpha_i) = 0, \forall i$ 等价于 G 可逆 (看成线性方程组，系数矩阵可逆).

(2) 由于 $(\alpha_i, \alpha_j) = \alpha_i^T\alpha_j = \boldsymbol{x}_i^T\boldsymbol{x}_j$, 因此 $G = X^TX$, 故 $\det(G) = \det(X)^2$.