1.15 第十七周作业

习题 1.115 (第八章第 1 题 (2)(4))

将下列二次型表示成矩阵形式

(2) $Q(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_1x_2-x_2x_3$

(4) $Q(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum\limits_{i=1}^{n-2}(x_i-x_{i+2})^2$

解 (2) $Q(x_1,x_2,x_3)=x^T\begin{pmatrix}2&1&0\\1&0&-\frac{1}{2}\\0&-\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}x$

(4) $n=3$ 时 $Q=x^T\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\-1&0&1\end{pmatrix}x$，$n\geq 4$ 时 $Q=x^T\begin{pmatrix}1&0&-1&&&&\\0&1&0&\ddots&&&\\-1&0&2&\ddots&\ddots&&\\&\ddots&\ddots&\ddots&\ddots&\ddots&\\&&\ddots&\ddots&2&0&-1\\&&&\ddots&0&1&0\\&&&&-1&0&1\end{pmatrix}x$

习题 1.116 (第八章第 2 题 (1)(2))

写出下列对称矩阵对应的二次型

(1) $\begin{pmatrix}1&3&5\\3&2&6\\5&6&4\end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix}a&b&0\\b&a&b\\0&b&a\end{pmatrix}$

解 (1) $Q=x_1^2+2x_2^2+4x_3^2+6x_1x_2+10x_1x_3+12x_2x_3$ (2) $Q=ax_1^2+ax_2^2+ax_3^2+2bx_1x_2+2bx_2x_3$

习题 1.117 (第八章第 3 题 (3)(4))

用配方法将下列二次型化为标准型，并求相应的可逆线性变换

(3) $Q=x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_1$

(4) $Q=x_1^2+5x_2^2-4x_3^2+2x_1x_2-4x_2x_3$

解 (3) 令 $\begin{cases}x_1=y_1+y_2\\x_2=y_1-y_2\\x_3=y_3+y_4\\x_4=y_3-y_4\end{cases}$，得 $Q=(y_1+y_3)^2-(y_2+y_4)^2$

再令 $\begin{cases}y_1=z_1-z_3\\y_2=z_2-z_4\\y_3=z_3\\y_4=z_4\end{cases}$，得 $Q=z_1^2-z_2^2$. 相应的变换为 $x=Pz, P=\begin{pmatrix}1&1&-1&-1\\1&-1&-1&1\\&&1&1\\&&1&-1\end{pmatrix}$

(4) 令 $\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$，得 $Q = y_1^2 + 4y_2^2 - 4y_3^2 - 4y_2y_3$；再令 $\begin{cases} y_1 = z_1 \\ y_2 = z_2 + \frac{z_3}{2} \\ y_3 = z_3 \end{cases}$，

得 $Q = z_1^2 + 4z_2^2 - 5z_3^2$. 相应的变换为 $x = Pz, P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ & 1 & \frac{1}{2} \\ & & 1 \end{pmatrix}$

习题 1.118 (第八章第 4 题 (4))

用初等变换法将下列二次型化为标准型，并求相应的可逆线性变换

(4) $Q = x^T \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} x$

解 本题第一行和第三行完全相同，第二行和第四行完全相同，可先利用这个特点消去 3、4 行及 3、4 列，再对前两列进行对角化，有：

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & & -1 & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & & -1 & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & & -1 & \\ & 1 & & -1 \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & & -1 & \\ 1 & 1 & & -1 \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -1 & \\ 1 & \frac{1}{2} & & -1 \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \tag{1.90}$$

得标准型 $Q = y^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} y$, $x = Py$, $P = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 & \\ 1 & \frac{1}{2} & & -1 \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$

习题 1.119 (第八章第 5 题 (1)(3))

求正交变换化下列实二次型为标准型

(1) $Q = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 8x_2x_3$

(3) $Q = 6x_1x_2 + 6x_1x_3 + 6x_2x_3$

解 (1) 二次型对应的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1&-2&2\\-2&4&-4\\2&-4&4\end{pmatrix}$, A 的特征值为 $0,0,9$, 分别对应特征向量 $\alpha_1=(2,1,0)^T,\alpha_2=(-2,0,1)^T,\alpha_1=(1,-2,2)^T$, 注意此时三个特征向量并不正交归一，需要进一步进行 Schmidt 正交化，得到一组标准正交向量 $e_1=(\frac{2}{\sqrt5},\frac{1}{\sqrt5},0)^T,e_2=(-\frac{2}{3\sqrt5},\frac{4}{3\sqrt5},\frac{\sqrt5}{3})^T,e_3=(\frac13,-\frac23,\frac23)^T$, 故得到标准型为 $\begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&&9\end{pmatrix}$，相应的正交变换为 $P=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt5}&-\frac{2}{3\sqrt5}&\frac13\\\frac{1}{\sqrt5}&\frac{4}{3\sqrt5}&-\frac23\\0&\frac{\sqrt5}{3}&\frac23\end{pmatrix}$

(3) 矩阵对应的特征值为 $-3,-3,6$，一组标准正交向量为 $e_1=(\frac{1}{\sqrt2},-\frac{1}{\sqrt2},0)^T,e_2=(\frac{1}{\sqrt6},\frac{1}{\sqrt6},-\frac{2}{\sqrt6})^T$，$e_3=(\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3})^T$，故标准型为 $\begin{pmatrix}-3&&\\&-3&\\&&6\end{pmatrix}$，相应的正交变换为 $P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\\-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\\0&-\frac{2}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\end{pmatrix}$

习题 1.120 (第八章第 15 题)

判断下列矩阵是否是正定矩阵

(1) $\begin{pmatrix}2&\frac12&2\\\frac12&2&-2\\2&-2&4\end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$

解 (1) $\begin{vmatrix}2&\frac12&2\\\frac12&2&-2\\2&-2&4\end{vmatrix}=-5<0$，故矩阵不是正定矩阵.

(2) $\begin{vmatrix}1&-1&1\\-1&2&0\\1&0&1\end{vmatrix}=-1<0$，故矩阵不是正定矩阵.

习题 1.121 (第八章第 16 题)

参数 t 满足什么条件时，下列二次型正定？

(1) $Q(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+tx_1x_3$

(2) $Q(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+tx_1x_2+tx_1x_3+x_2x_3$

解 (1) 二次型对应的矩阵为 $\begin{pmatrix}2&1&t/2\\1&1&0\\t/2&0&1\end{pmatrix}$, 易见 $2>0$, $\begin{vmatrix}2&1\\1&1\end{vmatrix}=1>0$, 则正定 $\iff\begin{vmatrix}2&1&t/2\\1&1&0\\t/2&0&1\end{vmatrix}=1-\frac{t^2}{4}>0$, 即 $-2<t<2$

(2) 二次型对应的矩阵为 $\begin{pmatrix}1&t/2&t/2\\t/2&2&1/2\\t/2&1/2&3\end{pmatrix}$，则正定 $\iff\begin{vmatrix}1&t/2\\t/2&2\end{vmatrix}=2-\frac{t^2}{4}>0$ 且 $\begin{vmatrix}1&t/2&t/2\\t/2&2&1/2\\t/2&1/2&3\end{vmatrix}=\frac{23}{4}-t^2>0$，解得 $-\frac{\sqrt{23}}{2}<t<\frac{\sqrt{23}}{2}$

习题 1.122 (第八章第 20 题)

设 n 元实二次型 $Q(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(x_1+a_1x_2)^2+(x_2+a_2x_3)^2+\cdots+(x_{n-1}+a_{n-1}x_n)^2+(x_n+a_nx_1)^2$，其中 $a_i(i=1,\cdots,n)$ 为实数，试问：当 $a_1,\cdots,a_n$ 满足何种条件时，$Q(x_1,\cdots,x_n)$ 为正定二次型？

解 易知 $Q\geq 0$，则 Q 正定 $\iff$ 仅在 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0$ 时取等号 $\iff$

$$\text{方程组}\begin{cases}x_1+a_1x_2=0\\x_2+a_2x_3=0\\\vdots\\x_n+a_nx_1=0\end{cases}\text{无非零解}\iff\text{系数矩阵行列式}\begin{vmatrix}1&a_1&&&\\&1&a_2&&\\&&\ddots&\ddots&\\&&&1&a_{n-1}\\a_n&&&&1\end{vmatrix}\neq 0$$

$\iff 1+(-1)^{n+1}a_1\cdots a_n\neq 0\iff a_1\cdots a_n\neq(-1)^n$